

**PARADOXE DE SCHEFFER–SHNIRELMAN REVU SOUS L’ANGLE  
DE L’INTÉGRATION CONVEXE**  
[d’après C. De Lellis et L. Székelyhidi]

par Cédric VILLANI

*“Vous, les normaux, dès qu’on vous met devant la moindre des choses  
sortant de l’ordinaire, vous vous mettez à poser des questions...”*

F. Brown, *Paradoxe Perdu*

Le paradoxe de Banach–Tarski est parfois qualifié d’“énoncé le plus surprenant de toutes les mathématiques”. Dans le domaine de la mécanique des fluides, si un théorème peut prétendre à ce titre, c’est à coup sûr le paradoxe de Scheffer–Shnirelman, selon lequel un fluide (non visqueux, incompressible) peut brusquement décider de s’agiter frénétiquement, sans qu’aucune force extérieure ne lui ait été appliquée. En fait cet énoncé est peut-être encore plus troublant que celui de Banach–Tarski, car il ne repose même pas sur l’axiome du choix. . .

Depuis sa découverte dans les années 1990, le paradoxe de Scheffer–Shnirelman a suscité l’étonnement, l’effroi ou le mépris, mais il s’agissait en tout cas d’un résultat singulier, pour ainsi dire isolé du courant de la recherche en équations aux dérivées partielles. La situation vient de changer radicalement avec les remarquables travaux de Camillo De Lellis et László Székelyhidi, qui réinterprètent et précisent les résultats de Scheffer et Shnirelman, tout en les replaçant au cœur de la recherche moderne en théorie des inclusions différentielles. Par la même occasion, ils révèlent un lien inattendu entre l’énoncé de Scheffer–Shnirelman et d’autres paradoxes célèbres, en particulier le théorème de plongement isométrique de Nash–Kuiper.

Cet exposé est consacré aux travaux de De Lellis et Székelyhidi, tels qu’on les trouve dans les articles [dLSz1, dLSz2]; les preuves des résultats principaux étant simples et élégantes, il me sera possible de les présenter dans leur intégralité. L’exposé se conclura par des prolongements, certains faisant l’objet de recherches en cours, d’autres extrêmement spéculatifs.

C’est un plaisir de remercier Camillo De Lellis et László Székelyhidi pour les innombrables échanges que nous avons eus au cours de la rédaction de ce texte. J’étends ces remerciements à Bernard Dacorogna et François Murat pour leurs explications

généreusement prodiguées; et à Claude Bardos, Yann Brenier, Alessio Figalli, Uriel Frisch, Étienne Ghys, Emmanuel Giroux, Misha Gromov, Yann Ollivier et Jean-Claude Sikorav pour leurs commentaires sur ce manuscrit.

## 1. DEUX ÉNONCÉS PARADOXAUX

### 1.1. Paradoxe de Nash–Kuiper

Pour  $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  et  $r > 0$  on note  $B^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < r\}$  et  $S^{n-1}(r) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = r\}$ , où  $|\cdot|$  désigne la norme euclidienne. On munit  $B^n(r)$  et  $S^{n-1}(r)$  de la structure de variété riemannienne induite par  $\mathbb{R}^n$  euclidien.

THÉORÈME 1.1 (Nash 1954, Kuiper 1955). — *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $r \in ]0, 1[$  il existe un plongement isométrique  $C^1$  de  $S^n(1)$  dans  $B^{n+1}(r)$ .*

En d’autres termes, il existe  $\varphi \in C^1(S^n(1); B^{n+1}(r))$  réalisant une isométrie entre les variétés riemanniennes  $S^n(1)$  et  $\varphi(S^n(1))$ , toutes deux munies de leur distance géodésique intrinsèque. En langage informel, le théorème 1.1 permet de “compactifier” une sphère de rayon 1 à l’intérieur d’une boule minuscule, *sans faire de plis*. Si cet énoncé est choquant, c’est parce qu’il va à l’encontre du principe familier<sup>(1)</sup> selon lequel, pour  $n \geq 2$ ,  $S^n(1)$  admet un unique plongement isométrique dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ , modulo bien sûr une isométrie de  $\mathbb{R}^{n+1}$  : c’est le théorème de rigidité de Cohn–Vossen, qui ici ne s’applique pas car il requiert la régularité  $C^2$ !

Même sans invoquer ce théorème de rigidité, on voit bien que le plongement de Nash–Kuiper semble contredire le “*theorema egregium*” de Gauss, selon lequel la courbure est invariante par isométrie. Soit en effet  $r' < r$  minimal tel que  $\varphi(S^n(1)) \subset \overline{B^n(r')}$ , et soit  $x$  un point où  $\varphi(S^n(1))$  est tangent (intérieurement) à  $S^n(r')$ . Un argument élémentaire de comparaison montre que les courbures sectionnelles de  $\varphi(S^n(1))$  en  $x$ , calculées extrinsèquement, sont minorées par  $1/(r')^2 > 1$  — alors que les courbures de  $S^n(1)$  sont toutes égales à 1!

En fait, toute la saveur du théorème 1.1 réside dans l’hypothèse de régularité : en régularité lipschitzienne le résultat serait à peu près évident, alors qu’en régularité  $C^2$  il serait faux. On peut d’ailleurs affiner : en régularité  $C^{1,\alpha}$  ( $0 < \alpha < 1$ ) le théorème reste vrai pour  $\alpha$  assez petit, et devient faux pour  $\alpha$  assez grand, sans que l’on sache précisément quel est l’exposant optimal [B1, B2, CdLSz].

---

<sup>(1)</sup>Pour être plus rigoureux, ce qui fait partie de notre expérience “tangibile”, c’est que l’on ne peut déformer isométriquement une sphère (ou plus généralement une surface de courbure gaussienne strictement positive), à moins de “forcer” (penser à une balle de ping-pong cabossée...). Il s’avère que le plongement de Nash–Kuiper peut s’obtenir par déformation isométrique  $C^1$  de l’identité [Gr].

Le théorème 1.1 est démontré comme cas particulier d’un énoncé beaucoup plus général : *étant données  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte de dimension  $n$ , et  $(V, h)$  une variété riemannienne de dimension  $n+1$ , s’il existe un plongement (resp. une immersion)  $\varphi \in C^1(M; V)$  telle que  $\varphi^*h < g$  (i.e.  $\varphi$  réduit strictement les distances) alors pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un plongement (resp. une immersion) isométrique<sup>(2)</sup>  $\tilde{\varphi} \in C^1(M; V)$  telle que  $\|\tilde{\varphi} - \varphi\|_{C^0} \leq \varepsilon$ . Ce théorème est présenté par exemple dans les ouvrages de Gromov [Gr, section 2.4.9], Eliashberg et Mishachev [EM, Chapitre 21], Székelyhidi [Sz]. Nash [Na] prouvait ce résultat pour une variété  $V$  de dimension  $n+2$ , et Kuiper [K1] parvenait peu après à affiner sa méthode pour aboutir à l’énoncé ci-dessus, optimal en un certain sens. Dans ces articles ainsi que dans [K2] on pourra trouver d’autres résultats, s’appliquant par exemple à des variétés non compactes.*

La stratégie de Nash, révolutionnaire à l’époque, consistait à partir de la “sous-solution stricte”  $\varphi$ , et d’accroître progressivement les distances, “direction par direction”, en introduisant des spirales ; Kuiper remplaçait ensuite les spirales par des “zig-zags” convenablement régularisés.



FIGURE 1. Brique élémentaire des constructions de Nash et Kuiper. La spirale et le zigzag sont bien plus longs que le segment, tout en étant très proches de lui pour la topologie uniforme.

Quelques décennies plus tard, le procédé de Nash fut revu en profondeur et généralisé par Gromov [Gr], fondant ainsi la théorie de l’**intégration convexe**, qui a de nombreuses applications en géométrie [EM, Partie IV] [Sp].

Entre les mains de spécialistes des équations aux dérivées partielles, la technique d’intégration convexe s’est transformée en une formidable machine à produire des contre-exemples, culminant avec la construction par Müller et Šverák [MS] de systèmes elliptiques  $2 \times 2$  “fortement quasiconvexes” admettant des solutions lipschitziennes, nulle part  $C^1$ . Un autre résultat marquant est la construction par Kirchheim et Preiss d’une application lipschitzienne non affine  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dont le gradient ne prend que cinq

<sup>(2)</sup>Rappelons la différence entre plongement  $C^1$  et immersion : dans les deux cas la différentielle est supposée injective en tout point, mais le plongement est en outre supposé globalement injectif ; en clair, une immersion autorise l’auto-intersection. Une immersion  $\varphi$  est dite isométrique si pour tout  $x$  la différentielle  $d_x\varphi$  préserve la norme des vecteurs tangents. Cela ne veut pas dire pour autant que  $\varphi$  induit une isométrie au sens des espaces métriques — sauf bien sûr si  $\varphi$  est un plongement !

valeurs différentes  $A_1, \dots, A_5$ , telle que  $u$  varie de manière “purement multidimensionnelle”, au sens où  $\text{rang}(A_i - A_j) > 1$  pour tous indices  $i, j$  distincts.<sup>(3)</sup> Sur ces sujets et d’autres applications de l’intégration convexe en théorie des équations aux dérivées partielles on pourra consulter l’article de revue [KMS].

## 1.2. Paradoxe de Scheffer–Shnirelman

Dans sa version la plus simple (du moins la plus simple à énoncer), l’équation d’Euler incompressible modélise le mouvement d’un fluide non visqueux, de densité constante emplissant tout l’espace  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ), observé sur un intervalle de temps  $I \subset \mathbb{R}$  :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot (v \otimes v) + \nabla p = f \\ \nabla \cdot v = 0, \end{cases}$$

où l’inconnue est le couple formé du champ de vitesses  $v : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$  et de la pression  $p : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}$ ; et  $f : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un champ de forces, que l’on supposera très régulier ( $C^\infty$  à support compact). Dans (1) j’ai utilisé des notations traditionnelles : en notant  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , on définit  $(\nabla p)^i = \partial_i p$ ,  $(v \otimes v)^{ij} = v^i v^j$ ,  $(\nabla \cdot M)^j = \sum_i \partial_i M^{ij}$  (divergence composante par composante de la matrice  $M$ ), et  $\nabla \cdot v = \sum_i \partial_i v^i$ . L’hypothèse de divergence nulle,  $\nabla \cdot v = 0$ , exprime l’incompressibilité du fluide et permet de réécrire  $\nabla \cdot (v \otimes v) = (v \cdot \nabla)v$ , où  $(v \cdot \nabla)v^i = \sum_j v^j \partial_j v^i$ , ce qui est la dérivée convective de la vitesse du fluide.

Le modèle d’Euler, qui vient tout juste de fêter son deux cent cinquantième anniversaire, est l’une des pierres angulaires de la mécanique des fluides. Pour en savoir plus sur ce sujet on pourra consulter [AK], [BT], [Ge], [Li], [MP], et les nombreuses références qui s’y trouvent.

La régularité des solutions de l’équation (1), pour des conditions initiales régulières, est un formidable problème ouvert en dimension  $n \geq 3$ . Il existe divers résultats de régularité “conditionnels”, par exemple un théorème de Constantin, Fefferman et Majda [CFM], qui s’applique pour des champs de vitesses bornés dont le rotationnel varie de manière lipschitzienne.

De toute façon, il est a priori légitime de vouloir appliquer l’équation d’Euler à des données physiquement réalistes, non lisses. On est donc naturellement amené à la définition suivante, où l’on note  $\mathcal{D}'$  l’espace des distributions :

**DÉFINITION 1.2.** — *On dit que  $(v, p)$  est solution faible de (1) si  $v \in C(I; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))^n \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n \times I)^n$ ,  $p \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n \times I)$ , et l’identité (1) a lieu au sens des distributions.*

<sup>(3)</sup>Si  $\nabla u$  vaut respectivement  $A_i$  et  $A_j$  de part et d’autre d’un ensemble rectifiable, il est facile de vérifier que  $\text{rang}(A_i - A_j) = 1$  et que  $u$  se comporte comme  $x \rightarrow |x_1|$  : la variation de gradient se produit “selon une direction”. Au contraire, dans l’exemple de Kirchheim et Preiss, les variations font intervenir toutes les directions à la fois.

Un bref commentaire sur l’hypothèse  $v \in L^2_{\text{loc}}(dx dt)$  : elle est naturelle du point de vue de la théorie des distributions pour donner un sens à (1) puisqu’elle implique  $v \otimes v \in L^1_{\text{loc}}$  ; elle est également naturelle du point de vue physique, car  $\frac{1}{2} |v(x, t)|^2 dx$  est la densité (instantanée) d’énergie cinétique du fluide.

Jusqu’ici il n’y a rien à redire, tout est cohérent avec la théorie générale des équations aux dérivées partielles, et le modèle semble convaincant. C’est pourquoi le résultat suivant créa un certain choc.

**THÉORÈME 1.3** (Scheffer 1993, Shnirelman 1997). — *Il existe une solution faible non nulle de l’équation d’Euler incompressible en dimension 2, sans forçage ( $f \equiv 0$ ), à support compact en espace-temps.*

Du point de vue physique, cet énoncé est “évidemment” absurde : il décrit un fluide initialement au repos, qui tout à coup se met à s’agiter spontanément, sans qu’aucune force ait été exercée sur lui ; après quoi il revient au repos de lui-même, violant outrageusement le principe de conservation de l’énergie.<sup>(4)</sup>

La preuve de Scheffer [Sch], très dense et longue, n’était accompagnée d’aucune explication, si ce n’est l’inspiration procurée par l’écoute d’un séminaire de Mandelbrot. . . On y trouve de fait une répétition “autosimilaire” d’un motif à peu près constant par morceaux. La démonstration proposée quelques années plus tard par Shnirelman [Sh1], considérablement plus lisible quoiqu’encore très complexe, fut donc accueillie avec soulagement, même si les résultats de Shnirelman étaient légèrement plus faibles (équation posée dans  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  plutôt que dans  $\mathbb{R}^2$  tout entier), et sa construction basée sur des techniques très différentes (analyse fréquentielle plutôt que spatiale).

Les solutions de Scheffer et Shnirelman étant jusqu’à nouvel ordre irréalistes, on peut douter de l’intérêt du théorème 1.3. Force est de constater cependant qu’il nous oblige à reconsidérer le modèle (1), ou tout au moins la définition des solutions. La méthode la plus simple et la plus radicale pour éliminer ces solutions paradoxales consiste à imposer la conservation de l’énergie. Cependant, pour des raisons recevables liées à la physique, on ne souhaite pas forcément le faire ; et même du point de vue mathématique, il n’est pas clair que cela soit suffisant pour sélectionner des solutions physiquement réalistes, nous en reparlerons dans la section 6. À ce jour nous ne savons pas, même en dimension 2, quelle est “la bonne” notion de solution faible de l’équation d’Euler incompressible : le paradoxe de Scheffer–Shnirelman nous a au moins permis de mieux prendre la mesure de notre ignorance dans le domaine de la mécanique des fluides.

---

<sup>(4)</sup>Un tel fluide ferait l’envie des ingénieurs hydroélectriciens. . . Cependant, comme nous le verrons plus loin, son champ de vitesses oscille si violemment que l’on ne pourrait peut-être même pas convertir son énergie en travail mécanique !

### 1.3. Énoncé précisé par De Lellis et Székelyhidi

Dix ans après le travail de Shnirelman, De Lellis et Székelyhidi proposent une nouvelle démonstration du théorème 1.3. Leur construction, élégante et simple, fournit de nombreuses informations supplémentaires, renforçant encore le caractère paradoxal des solutions. Dans l'énoncé suivant, je noterai  $C_c^\infty$  l'espace des fonctions  $C^\infty$  à support compact,  $L_w^2$  l'espace de Lebesgue  $L^2$  muni de sa topologie faible, et  $H^{-1}$  le dual distributionnel de l'espace de Sobolev  $H^1 = W^{1,2}$  (moralement  $H^{-1}$  est fait de fonctions dont la primitive est  $L^2$ ).

**THÉORÈME 1.4** (De Lellis et Székelyhidi 2007, 2008). — *Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $T > 0$ , et  $\bar{e}$  une fonction uniformément continue  $\Omega \times ]0, T[ \rightarrow ]0, +\infty[$ , avec  $\bar{e} \in L^\infty(]0, T[; L^1(\Omega))$ . Alors pour tout  $\eta > 0$  il existe une solution faible  $(v, p)$  de l'équation d'Euler (1), sans forçage ( $f \equiv 0$ ), telle que*

- (i)  $v \in C(\mathbb{R}; L_w^2(\mathbb{R}^n))^n$  ;
- (ii)  $v(x, t) = 0$  si  $(x, t) \notin \Omega \times ]0, T[$  ; en particulier  $v(\cdot, 0) = v(\cdot, T) \equiv 0$  ;
- (iii)  $\frac{|v(x, t)|^2}{2} = -\frac{n}{2} p(x, t) = \bar{e}(x, t)$  pour tout  $t \in ]0, T[$  et presque tout  $x \in \Omega$  ;
- (iv)  $\sup_{0 \leq t \leq T} \|v(\cdot, t)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^n)} \leq \eta$ .

En outre,

$$(v) (v, p) = \lim_{k \rightarrow \infty} (v_k, p_k) \text{ dans } L^2(dx dt),$$

où chaque  $(v_k, p_k)$  est un couple de fonctions  $C^\infty$  à support compact, solution classique de l'équation d'Euler (1) avec un forçage  $f_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$  bien choisi,  $f_k \rightarrow 0$  au sens des distributions.

Quelques commentaires s'imposent sur cet énoncé :

- La continuité à valeurs dans  $L_w^2$  est un résultat beaucoup plus précis que la continuité à valeurs dans  $\mathcal{D}'$  ; combinée avec l'estimation (iii), elle implique en fait la continuité à valeurs dans  $L^2$  pour  $0 < t < T$ , et pour tous les temps si  $\|\bar{e}(\cdot, t)\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow 0$  et  $t \rightarrow T$ . (Rappelons que si  $v_k \rightarrow v$  dans  $L_w^2$  et  $\|v_k\|_{L^2} \rightarrow \|v\|_{L^2}$ , alors  $v_k \rightarrow v$  dans  $L^2$ .) Ainsi le théorème 1.4 renforce le théorème 1.3 en couvrant l'espace fonctionnel naturellement associé à la conservation de l'énergie cinétique.

- La condition (iii) montre que l'on peut prescrire *arbitrairement* la norme ponctuelle du champ de vitesses à l'intérieur de  $\Omega$ . Choisissons  $\Omega = B^n(1)$ ,  $T = 1$ ,  $\bar{e} \equiv 1/2$ , et examinons une solution  $v$  fournie par le théorème 1.4 : à  $t = 0$  et  $t = 1$  toutes les particules sont au repos ; mais pour  $t \in ]0, 1[$  toutes les particules se déplacent à vitesse 1 à l'intérieur de  $\Omega$ , tandis qu'à l'extérieur de  $\Omega$  tout le monde reste au repos — bien que la frontière de  $\Omega$  ne soit matérialisée par aucune limite physique. Quant à la pression, elle est égale à une constante à l'intérieur de  $\Omega$ , ce qui correspond à une absence d'interaction entre particules... Autant d'énoncés physiquement invraisemblables !

- En corollaire, le théorème 1.4 fournit des solutions d'énergie finie (et même de vitesse uniformément bornée!), réfutant ainsi une objection que l'on avait coutume d'élever contre le théorème de Scheffer–Shnirelman. Ces solutions ne sont en revanche pas régulières : comme on le verra dans la section 6, c'est ce défaut de régularité qui autorise la non-conservation de l'énergie.

- La condition (iv) dit que le champ de vitesses  $v$  oscille extrêmement vite, de sorte que l'on n'observe presque aucun mouvement à échelle “macroscopique”.

- Enfin l'énoncé (v), déjà prouvé par Shnirelman dans le cas périodique, montre que les solutions pathologiques ne sont pas “isolées”, mais s'obtiennent comme limites de solutions “irréprochables” avec un terme de forçage (tout aussi irréprochable) bien choisi. En d'autres termes, l'adhérence (pour une topologie suffisamment grossière) de l'espace des solutions “raisonnables” contient des solutions paradoxales.

Au-delà de ces améliorations notables, le grand mérite de De Lellis et Székelyhidi est d'avoir réinterprété les solutions paradoxales en termes d'inclusion différentielle, faisant ainsi entrer ce sujet dans un cadre déjà bien exploré qui combine l'analyse oscillatoire de Tartar, l'intégration convexe de Gromov et les arguments de catégorie de Baire, pour produire des solutions irrégulières d'équations aux dérivées partielles. En ce sens le paradoxe de Scheffer–Shnirelman et celui de Nash–Kuiper se retrouvent réunis; on notera d'ailleurs a posteriori la similitude (ténue) entre les énoncés des théorèmes 1.1 et 1.4 : une obstruction (rigidité liée à la conservation de la courbure ou de l'énergie) est contournée grâce à un défaut de régularité ( $C^1$  ou  $L^\infty$ ), et l'on s'autorise en outre la petitesse dans un espace de régularité encore inférieure ( $C^0$  ou  $H^{-1}$ ). Le lien avec l'intégration convexe était déjà présent en filigrane dans l'article de Scheffer (qui dans sa thèse en 1974 avait réalisé un travail pionnier sur les “configurations  $T_k$ ”, maintenant couramment utilisées par les spécialistes d'intégration convexe [K, KMS]); cependant les articles de De Lellis et Székelyhidi rendent ce lien limpide. Pour caricaturer, ce qui dans la démonstration du théorème 1.4 joue le rôle des “zigzags” utilisés pour le théorème 1.1, ce sont des solutions particulières de l'équation d'Euler, oscillant rapidement entre deux valeurs constantes du champ de vitesses.

Les trois sections à venir sont consacrées à la preuve du théorème 1.4, les deux suivantes à des compléments et développements.

## 2. ANALYSE GÉOMÉTRIQUE DES ÉQUATIONS D'EULER INCOMPRESSIBLES

Cette section basée sur [dLSz1, dLSz2] est consacrée à l'analyse qualitative de l'équation d'Euler incompressible dans le formalisme des inclusions différentielles.



## 2.1. Inclusion différentielle

De nombreuses équations aux dérivées partielles non linéaires peuvent se réécrire comme un système d'équations *linéaires* couplé à une “relation constitutive” non linéaire, souvent appelée *inclusion différentielle* (même quand la relation ne fait pas explicitement intervenir de dérivée). Ce principe, d'usage courant, a été systématiquement étudié et formalisé par Tartar [T1, T2] pour des problèmes principalement issus de la physique, et par Gromov [Gr] pour des applications en géométrie. Il n'y a pas en général unicité de la réécriture sous forme d'inclusion différentielle ; trouver “la bonne” reformulation peut demander une réflexion spécifique sur le problème étudié.

La proposition ci-dessous [dLSz1] reformule l'équation d'Euler incompressible ; je noterai  $I_n$  la matrice identité  $n \times n$ , et  $\mathcal{S}_0^n$  l'espace des matrices symétriques réelles  $n \times n$  de trace nulle.

PROPOSITION 2.1. — *Les deux systèmes d'équations suivants sont équivalents : d'une part,*

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot (v \otimes v) + \nabla p = 0 \\ \nabla \cdot v = 0, \end{cases}$$

où  $(v, p) \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  ; *et d'autre part,*

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot M + \nabla q = 0 \\ \nabla \cdot v = 0, \end{cases}$$

$$(4) \quad M = v \otimes v - \frac{|v|^2}{n} I_n \quad \text{presque partout,}$$

où  $(v, M, q) \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_0^n \times \mathbb{R})$ .

La preuve de l'équivalence entre (2) et (3)–(4) est immédiate : il suffit de poser  $q = p + |v|^2/n$ , ou  $p = q - |v|^2/n$ . On notera que (2) décrit l'équation d'Euler incompressible sans forçage, et pour tous les temps.

Pour simple qu'elle soit, la proposition 2.1 a le mérite de séparer clairement

- d'une part, le système augmenté (3), dont la *linéarité* permettra une analyse ondulatoire ;
- d'autre part, la contrainte (4), qui invite à étudier le *graphe*

$$(5) \quad K = \left\{ (v, M) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_0^n; \quad M = v \otimes v - \frac{|v|^2}{n} I_n \right\}.$$

La clé de l'analyse à venir réside dans le comportement de  $K$  vis-à-vis des directions de résonance du système linéaire.



Dans la suite, il sera commode de considérer des “tranches” du graphe  $K$ , en se limitant à des vecteurs de norme fixée :

*Notation 2.2.* — Étant donné  $r > 0$  on pose

$$\begin{aligned} K_r &= \{(v, M) \in K; |v| = r\} \\ &= \left\{ (v, M) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_0^n; M = v \otimes v - \frac{|v|^2}{n} I_n, |v| = r \right\}. \end{aligned}$$

## 2.2. Cône d’onde de Tartar

Étant donné un système du premier ordre  $\sum_i A^i \partial_i z = 0$  (où  $z$  est une fonction à valeurs vectorielles et les  $A^i$  sont des matrices), l’identification des solutions oscillantes dirigées selon un vecteur  $a$  (dans l’espace d’arrivée) passe par la résolution de la relation de dispersion  $\sum_i \xi_i A^i a = 0$ , où  $\xi_i$  est la fréquence d’oscillation dans la direction  $i$  (dans l’espace de départ). L’ensemble des directions  $a$  pour lesquelles on peut trouver une solution  $\xi \neq 0$  est appelé **cône d’onde** du système; c’est en particulier Tartar qui a rendu son usage systématique dans divers problèmes d’équations aux dérivées partielles. L’énoncé suivant est tiré de [dLSz1]; je note  $a \cdot b$  le produit scalaire euclidien de deux vecteurs  $a$  et  $b$ .

PROPOSITION 2.3. — *Le cône d’onde associé au système (3) est égal à*

$$(6) \quad \Lambda = \left\{ (v, M, q) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_0^n \times \mathbb{R}; \det \begin{bmatrix} M + qI_n & v \\ v & 0 \end{bmatrix} = 0 \right\}.$$

*En particulier,*

(a) *Pour tout  $(v, M) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_0^n$  il existe  $q \in \mathbb{R}$  tel que  $(v, M, q) \in \Lambda$ ;*

(b) *Pour tout  $v_0 \in \mathbb{R}^n$  il existe  $p_0 \in \mathbb{R}$  et  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tel que pour toute fonction  $h \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  et tout  $\varepsilon > 0$ , le couple*

$$(v, p)(x, t) = (v_0, p_0) h \left( \frac{\xi \cdot x}{\varepsilon} \right)$$

*soit solution de l’équation (2).*

*Preuve de la proposition 2.3.* — Soit  $U$  la matrice réelle  $(n+1) \times (n+1)$  définie par  $U = \begin{bmatrix} M + qI_n & v \\ v & 0 \end{bmatrix}$ . (Je n’ai pas fait de différence notationnelle entre  $v$  et son transposé.) Le système (3) se réécrit simplement  $\text{div}_{x,t} U = 0$  (la divergence en espace-temps de  $U$  est nulle), et la relation de dispersion associée est simplement  $U[\xi, c] = 0$ , où  $(\xi, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  ( $\xi$  la fréquence spatiale,  $c$  la fréquence temporelle). Cette équation admet une solution non nulle si et seulement si  $U$  est de déterminant nul, d’où la formule (6).

L’énoncé (a) découle facilement : si  $\xi \in v^\perp$  et  $c = 0$  l’équation devient  $M\xi + q\xi = 0$ , il suffit donc de choisir  $q$  égal à une valeur propre de  $-M$ , considéré comme un opérateur

symétrique sur  $v^\perp$ . Enfin, pour obtenir (b) on pose  $M = v \otimes v - (|v|^2/n) I_n$ ,  $c = 0$ ,  $p = q - |v|^2/n$ .  $\square$

La proposition 2.3 indique que le cône d’onde de l’équation d’Euler incompressible est très gros ; en conséquence, on peut construire des solutions oscillantes en espace-temps — et même stationnaires — colinéaires à n’importe quelle direction fixée. Cependant, dans la suite il sera commode de se limiter à certaines directions de  $\Lambda$ , formées de matrices de rang 2, qui ne sont pas stationnaires en temps mais qui en contrepartie sont associées à une pression constante.

LEMME 2.4. — Soient  $a, b \in \mathbb{R}^n$  tels que  $|a| = |b|$  et  $a \neq b$ , et soit

$$W(a, b) = (a - b, a \otimes a - b \otimes b) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_0^n.$$

Alors  $(W(a, b), 0) \in \Lambda$ .

Preuve du lemme 2.4. — Il suffit de remarquer que si  $z \in (a - b)^\perp$  et  $c = z \cdot a = z \cdot b$ , alors  $(z, -c) \in \ker \begin{bmatrix} a \otimes a - b \otimes b & a - b \\ a - b & 0 \end{bmatrix}$ .  $\square$

Notation 2.5. — Avec les mêmes notations que dans la proposition 2.3 et le lemme 2.4, étant donné  $r > 0$  on pose

$$\Lambda_r = \left\{ tW(a, b); \quad |a| = |b| = r, \quad a \neq \pm b, \quad t \geq 0 \right\}.$$

Le cas échéant on identifiera  $\Lambda_r$  à  $\Lambda_r \times \{0\} \subset \Lambda$ .

### 2.3. Enveloppe $\Lambda$ -convexe de $K$

La suite du programme consiste à identifier l’enveloppe  $\Lambda$ -convexe de  $K$ , que l’on peut définir intuitivement comme l’ensemble de tous les états accessibles par “mélange” des états de  $K$  au moyen d’oscillations rapides dans les directions de  $\Lambda$ .

Dans la théorie de la **compacité par compensation**, fondée par Tartar [T1] et Murat [Mu], puis appliquée aux systèmes de lois de conservation par Tartar [T2] et DiPerna [dP], la situation favorable est celle où l’enveloppe  $\Lambda$ -convexe est aussi petite que possible, car cela limite les possibilités de perte de compacité. Au contraire, dans le cadre de l’intégration convexe, une grande enveloppe  $\Lambda$ -convexe sera synonyme de grande marge de manœuvre.

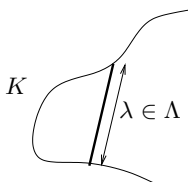


FIGURE 2. Construction de l’enveloppe  $\Lambda$ -convexe de  $K$

Dans sa version la plus restreinte, l’enveloppe  $\Lambda$ -convexe de  $K$  est définie simplement comme le plus petit ensemble  $K'$  contenant  $K$  qui soit  $\Lambda$ -convexe (c’est-à-dire :  $\forall a, b \in K', b - a \in \Lambda \implies [a, b] \subset K'$ ); c’est un cas particulier de l’“enveloppe  $P$ -convexe” considérée par Gromov [Gr]. Dans de nombreux exemples issus des équations aux dérivées partielles on est forcé de considérer une notion plus faible d’enveloppe  $\Lambda$ -convexe, à savoir le complémentaire de l’ensemble des points qui peuvent être séparés de  $K$  par une fonction  $\Lambda$ -convexe (convexe dans les directions de  $\Lambda$ ). À ce sujet on pourra consulter [KMS] pour des explications et références.<sup>(5)</sup>

Pour l’équation d’Euler incompressible, le cône d’onde est particulièrement gros, de sorte que la notion restreinte d’enveloppe  $\Lambda$ -convexe nous suffira; et suffira même à engendrer la totalité de l’enveloppe *convexe*, au sens usuel, du graphe  $K$ . C’est le contenu de la proposition suivante [dLSz1, dLSz2]; si  $A$  et  $B$  sont deux compacts de l’espace euclidien je noterai  $\text{dist}(A, B) = \inf\{|a - b|; a \in A, b \in B\}$ .

PROPOSITION 2.6. — *Avec les notations 2.2 et 2.5,*

(i) *Pour tout  $r > 0$ , l’enveloppe  $\Lambda$ -convexe de  $K_r$  coïncide avec l’enveloppe convexe de  $K_r$ , et vaut*

$$(7) \quad K_r^{\text{co}} = \left\{ (v, M) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_0^n; \quad |v| \leq r \text{ et } v \otimes v - M \leq \frac{r^2}{n} I_n \right\}.$$

*En outre  $K_r = K_r^{\text{co}} \cap \{|v| = r\}$ .*

(ii) *Il existe une constante  $C = C(n) > 0$  telle que pour tout  $r > 0$  et tout  $z = (v, M)$  dans l’intérieur de  $K_r^{\text{co}}$  il existe  $\lambda = (\bar{v}, \bar{M}) \in \Lambda_r$  tel que  $[z - \lambda, z + \lambda] \subset \text{int } K_r^{\text{co}}$  et*

$$(8) \quad |\bar{v}| \geq \frac{C}{r} (r^2 - |v|^2); \quad \text{dist} \left( [z - \lambda, z + \lambda], \partial K_r^{\text{co}} \right) \geq \frac{1}{2} \text{dist} (z, \partial K_r^{\text{co}}).$$

Comme corollaire important de la proposition 2.6 (i), la solution nulle appartient à l’intérieur de l’enveloppe  $\Lambda$ -convexe de  $K$ . C’est ce qui permettra de construire des solutions paradoxales à support compact, en partant de 0. La dernière partie de l’énoncé indique que  $K_r$ , vu selon  $\Lambda_r$ , n’est pas “trop pointu” : dès que  $z \in K_r^{\text{co}}$  est quelque peu éloigné du bord, on peut l’écrire comme milieu d’un  $\Lambda_r$ -segment de taille minorée, inclus dans  $K_r^{\text{co}}$ .

*Remarque 2.7.* — Du point de vue technique, la convexité de l’enveloppe  $\Lambda$ -convexe est un soulagement. En effet, contrairement à d’autres notions classiquement utilisées en intégration convexe (enveloppe rang-1-convexe, enveloppe quasiconvexe), l’enveloppe convexe est stable par perturbation, ce qui nous permettra d’échapper complètement au problème de l’“approximation par l’intérieur” [KMS], pensum classique dans le sujet.

<sup>(5)</sup>Notons, en rapport avec le sujet de cet exposé, que l’enveloppe  $\Lambda$ -convexe généralisée semble remonter à la thèse non publiée de Scheffer !

(Cette propriété d'approximation est liée à la “propriété de relaxation” considérée dans [DM2].)

*Preuve de la proposition 2.6.* — Soit  $C_r$  l'ensemble apparaissant au membre de droite de (7); il est évident que  $K_r \subset C_r$ . On va montrer que (a)  $C_r$  est convexe; (b)  $C_r$  est compact; (c)  $K_r$  contient tous les points extrémaux de  $C_r$ . Le théorème de Krein–Milman impliquera alors  $K_r^{\text{co}} = C_r$ .

Preuve de (a) : Si  $\sigma_{\max}(S)$  désigne la plus grande valeur propre de la matrice symétrique  $S$ , et  $\langle x, y \rangle = x \cdot y$  est le produit scalaire de  $x$  et  $y$ , on a

$$\Phi(v, M) := \sigma_{\max}(v \otimes v - M) = \max_{\xi \in S^{n-1}(1)} (\langle \xi, v \rangle^2 - \langle M\xi, \xi \rangle);$$

la fonction  $\Phi$ , supremum de fonctions convexes, est donc convexe sur  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_0^n$ . Il s'ensuit que  $C_r = \Phi^{-1}([0, r^2/n]) \cap \{|v| \leq r\}$  est bien convexe. (Noter que pour tout  $S \in \mathcal{S}_0^n$  on a  $\sigma_{\max}(S) \geq 0$ .)

Preuve de (b) : Si  $(v, M) \in C_r$  on a  $M \geq v \otimes v - (r^2/n) I_n \geq -(r^2/n) I_n$ , et la condition de trace nulle entraîne donc  $M \leq (1 - 1/n) r^2 I_n$ . Ces bornes impliquent la compacité de  $C_r$ .

Preuve de (c) : Soit  $(v, M) \in C_r$ . Quitte à effectuer un changement de base on peut supposer que  $v \otimes v - M = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  avec  $r^2/n \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ . On distingue alors trois cas :

- Si  $|v| = r$  alors  $M - (v \otimes v - \frac{|v|^2}{n} I_n) \geq 0$ , et comme c'est une matrice à trace nulle elle est identiquement nulle, d'où  $(v, M) \in K_r$ .

- Si  $\lambda_n = r^2/n$ , alors  $v \otimes v - M = \frac{r^2}{n} I_n$ , en prenant la trace on trouve  $|v|^2 = r^2$ , d'où  $(v, M) \in K_r$ .

- Si  $|v| < r$  et  $\lambda_n < r^2/n$ , écrivons  $v = \sum v^i e_i$ , où les  $e_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) sont les vecteurs de base; on pose alors  $\bar{v} = e_n$ ,  $\bar{M} = \sum_{i=1}^{n-1} v^i (e_i \otimes e_n + e_n \otimes e_i) = v \otimes e_n + e_n \otimes v - 2v^n e_n \otimes e_n$ , de sorte que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$(v + t\bar{v}) \otimes (v + t\bar{v}) - (M + t\bar{M}) = (v \otimes v - M) + (2tv^n + t^2) e_n \otimes e_n.$$

Comme  $\lambda_n < r^2/n$ , cette identité implique  $\Phi(v + t\bar{v}, M + t\bar{M}) \leq r^2/n$  pour  $|t|$  assez petit; condition qui implique aussi  $|v + t\bar{v}| < r$ . Donc  $(v, M)$  n'est pas un point extrémal de  $C_r$ , ce qui achève la démonstration de (c). Au passage, on a montré que  $C_r \cap \{|v| = r\} \subset K_r$ , et il s'ensuit que  $K_r = C_r \cap \{|v| = r\}$ .

Continuons la preuve de la proposition 2.6. Si l'on prouve (ii), alors pour  $z$  et  $\lambda$  comme dans l'énoncé, on peut prolonger le segment  $[z - \lambda, z + \lambda]$  jusqu'à ce qu'il rencontre  $\partial C_r$ ; on aura ainsi  $z$  barycentre de  $(z_0, z_1)$  avec  $z_0 - z_1 \in \Lambda_r$ , et chaque  $z_i = (v_i, M_i)$  vérifiera soit  $|v_i| = r$  (donc  $z_i \in K_r$ ), soit  $|v_i| < r$  et  $\lambda_1(v_i, M_i) = r^2/n$ , où  $\lambda_1(v, M) \geq \dots \geq \lambda_n(v, M)$  désignent les valeurs propres ordonnées de  $v \otimes v - M$ . Dans ce dernier cas on appliquera à nouveau (ii) et un passage à la limite facile pour écrire  $z_i$  comme

barycentre de  $(z_{i,0}, z_{i,1})$  avec  $z_{i,0} - z_{i,1} \in \Lambda_r$ ,  $|z_{i,0} - z_{i,1}| \geq \text{const.}$   $(r^2 - |v_i|^2)/r > 0$ , et chaque  $z_{i,j} = (v_{i,j}, M_{i,j})$  vérifiera soit  $|v_{i,j}| = r$ , soit  $\lambda_1(v_{i,j}, M_{i,j}) = \lambda_2(v_{i,j}, M_{i,j}) = r^2/n$ . On continuera de même, jusqu'à avoir exprimé  $z$  comme " $\Lambda_r$ -barycentre" d'éléments  $(v, M)$  vérifiant tous  $|v| = r$  ou  $\lambda_n(v, M) = r^2/n$ , et appartenant donc tous à  $K_r$ ; ceci achèvera de prouver (i).

Établissons donc (ii). Soit  $z = (v, M) \in \text{int } K_r^{\text{co}}$ , où  $\text{int}$  désigne l'intérieur topologique. Par le théorème de Carathéodory,  $z$  est combinaison convexe d'au plus  $N + 1$  éléments de  $K_r$ , où  $N = \dim(\mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_0^n) = n(n + 3)/2 - 1$  : autrement dit, il existe  $m \leq N + 1$ ,  $(z_i)_{1 \leq i \leq m}$  dans  $K_r$ , et  $(\mu_i)_{1 \leq i \leq m}$  dans  $[0, 1]$ , tels que  $z = \sum_i \mu_i z_i$  et  $\sum_i \mu_i = 1$ .

Comme  $z$  est dans l'intérieur de  $K_r^{\text{co}}$ , quitte à réduire  $m$ , on peut supposer que tous les coefficients  $\mu_i$  sont dans l'intervalle ouvert  $]0, 1[$ . Écrivons  $z_i = (v_i, v_i \otimes v_i - \frac{r^2}{n} I_n)$ ,  $|v_i| = r$ . Quitte à perturber les  $z_i$  (ce qui est possible tout en restant dans l'intérieur de  $K_r^{\text{co}}$ ), on peut supposer que  $v_i \neq \pm v_j$  pour  $i \neq j$ . Sans perte de généralité  $\mu_1 = \max_i \mu_i$ . Soit  $j > 1$  tel que  $\mu_j |v_j - v_1| = \max_{i \geq 2} \mu_i |v_i - v_1|$ ; on pose

$$\bar{z} = (\bar{v}, \bar{M}) = \frac{1}{2} \mu_j (v_j - v_1, v_j \otimes v_j - v_1 \otimes v_1) = \frac{\mu_j}{2} (z_j - z_1).$$

Alors pour tout  $t \in [-1, 1]$ , on a  $z + t\bar{z} = \sum_i \mu'_i z_i$ , où  $\mu'_i = \mu_i$  pour  $i \notin \{1, j\}$ ,  $\mu'_1 = \mu_1 - t\mu_j/2$ ,  $\mu'_j = \mu_j + t\mu_j/2$ . On vérifie aisément que tous ces coefficients restent dans  $]0, 1[$  pour  $t \in [-1, 1]$ , et que  $\sum \mu'_i = \sum \mu_i = 1$ ; on a donc bien  $[z - \bar{z}, z + \bar{z}] \subset \text{int } K_r^{\text{co}}$ . Enfin,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4rN}(r^2 - |v|^2) &= \frac{1}{4rN}(r + |v|)(r - |v|) \leq \frac{r - |v|}{2N} = \frac{|v_1| - |v|}{2N} \\ &\leq \frac{|v_1 - v|}{2N} = \frac{|\sum \mu_i (v_i - v_1)|}{2N} \leq \frac{\mu_j |v_j - v_1|}{2} = |\bar{v}|, \end{aligned}$$

ce qui établit la première inégalité dans (8). Pour obtenir la seconde, il suffit de diviser  $\lambda$  par 2 et d'utiliser la convexité de  $K_r^{\text{co}}$ .  $\square$

### 3. SOLUTIONS OSCILLANTES LOCALISÉES

Notre but maintenant est de construire des solutions du système linéaire (3), *localisées en espace-temps*, qui oscillent entre deux états de  $K_r^{\text{co}}$  selon une direction  $\lambda \in \Lambda$  donnée : quelque chose qui ressemble à  $\lambda h(\frac{x \cdot \xi + ct}{\varepsilon})$ , où  $h$  est à valeurs réelles comme dans la proposition 2.3.

Du fait de la contrainte de localisation (support compact), on ne peut espérer construire des solutions dont l'image soit *exactement* dirigée selon  $\lambda$ ; mais on va voir que l'on peut leur imposer de prendre leurs valeurs dans un voisinage arbitraire de  $[-\lambda, \lambda]$ .

Cette construction est la brique élémentaire des preuves de De Lellis et Székelyhidi. On peut la réaliser pour n'importe quel  $\lambda \in \Lambda$  [dLSz1, proposition 2.2], mais il est commode de se restreindre aux  $\lambda \in \Lambda_r$  [dLSz2] : cette restriction permettra d'imposer une contrainte supplémentaire de pression constante.

Localiser une onde à valeurs vectorielles, dont les composantes sont tenues de vérifier certaines relations, est délicat. En revanche, localiser une fonction à valeurs réelles est facile : il suffit de multiplier par une fonction plateau. Pour localiser les solutions oscillantes de (3), nous allons d'abord encoder une onde à valeurs vectorielles par une onde scalaire, que nous appellerons *potentiel*. Voici une analogie : si l'on veut localiser un champ de gradients,  $F = \nabla\psi$ , plutôt que d'appliquer une transformation matricielle et différentielle compliquée à  $\nabla\psi$  il sera beaucoup plus efficace de considérer  $\nabla(\chi\psi)$ , où  $\chi$  est une fonction plateau.

### 3.1. Potentiel

On rappelle la notation 2.5.

**PROPOSITION 3.1.** — *Pour tout  $r > 0$  et tout  $\lambda \in \Lambda_r$  il existe un opérateur différentiel matriciel homogène d'ordre 3, à coefficients constants,*

$$A(\nabla) : C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_0^n),$$

et  $(\xi, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ,  $\xi \neq 0$ , tels que

- (i) pour tout  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ ,  $A(\nabla)\varphi$  est solution du système linéaire (3) avec  $q = 0$  ;
- (ii) si  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$  et  $\varphi(x, t) = \psi(\xi \cdot x + ct)$ , alors

$$[A(\nabla)\varphi](x, t) = \lambda \psi'''(\xi \cdot x + ct).$$

On peut en fait exhiber une formule explicite (ingénieuse) pour l'opérateur  $A$ . Dans [dLSz2] cela est fait via l'identification  $(v, M) \rightarrow \begin{bmatrix} M & v \\ v & 0 \end{bmatrix}$  ; ici je travaillerai directement sur  $v$  et  $M$ , au risque de renforcer l'apparence miraculeuse des formules. (On trouvera dans [dLSz1] une formule plus simple pour la dimension 2.)

*Preuve de la proposition 3.1.* — Sans perte de généralité on suppose  $\lambda = W(a, b)$ , avec  $a, b \in \mathbb{R}^n$ ,  $|a| = |b| = r > 0$ ,  $b \neq \pm a$ . Notons  $\partial_i = \partial/\partial x^i$ ,  $\partial_t = \partial/\partial t$ . On définit alors  $A = (A_v, A_M)$ , avec, pour  $1 \leq i, j \leq n$ ,

$$\begin{cases} A_v^i(\nabla) = \sum_{k, \ell} (a^i b^k - b^i a^k) \partial_{k\ell} \\ A_M^{ij}(\nabla) = \sum_k (b^i a^k - a^i b^k) \partial_{tkj} + \sum_k (b^j a^k - a^j b^k) \partial_{tki}, \end{cases}$$

où les indices  $k$  et  $\ell$  varient dans  $\{1, \dots, n\}$ .

Soient maintenant  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ ,  $v_f = A_v(\nabla)f$ ,  $M_f = A_M(\nabla)f$ . Par calcul direct,

- $\text{tr } M = 2 \sum_{i, k} (b^i a^k - a^i b^k) \partial_{tki} f = 0$  (par échange de  $i$  et  $k$ ) ;

- $(\partial_t v + \nabla \cdot M)^j = \sum_{\ell,k} (a^j b^k - b^j a^k) \partial_{kt\ell\ell} f + \sum_{i,k} (b^i a^k - a^i b^k) \partial_{ktij} f + \sum_{i,k} (b^j a^k - a^j b^k) \partial_{ktii} f = 0;$
- $\nabla \cdot v = \sum_{i,k,\ell} (a^i b^k - b^i a^k) \partial_{k\ell\ell i} f = 0.$

Ceci prouve (i). Ensuite, si  $f(x, t) = \psi\left(\frac{(a+b) \cdot x + Kt}{\varepsilon}\right)$ , alors par calcul explicite

$$(v_f, M_f)(x, t) = \varepsilon^{-3} \left( 2(a-b) s^2, -2(a \otimes a - b \otimes b) sK \right) \psi''' \left( \frac{(a+b) \cdot x + Kt}{\varepsilon} \right),$$

où  $s = |a+b|^2/2 = r^2 + a \cdot b$ . Il suffit de choisir  $K = -s$ ,  $\varepsilon = (2s^2)^{1/3}$ ,  $\xi = (a+b)/\varepsilon$ ,  $c = K/\varepsilon$  pour obtenir (ii). □

### 3.2. Localisation

On désigne par  $|A|$  la mesure de Lebesgue d'un ensemble borélien  $A \subset \mathbb{R}^n$ .

**PROPOSITION 3.2.** — Soient  $O$  un ouvert borné non vide de  $\mathbb{R}^n$ ,  $I = ]t_0, t_1[ \subset \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ ,  $\lambda = (\bar{v}, \bar{M}) \in \Lambda_r$ , et  $\mathcal{V}$  un voisinage de  $[-\lambda, \lambda] \subset \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_0^n$ . Soient  $O'$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\bar{O}' \subset O$ ,  $\theta \in ]0, (t_1 - t_0)/2[$  et  $I_\theta = [t_0 + \theta, t_1 - \theta]$ . Alors pour tout  $\eta > 0$  il existe  $z = (v, M) \in C_c^\infty(O \times I; \mathcal{V})$  tel que

- $(v, M, 0)$  est solution de (3);
- $\sup_{t \in I} \|v(\cdot, t)\|_{H^{-1}(O)} \leq \eta;$
- $\inf_{t \in I_\theta} \frac{1}{|O'|} \int_{O'} |v(x, t)|^2 dx \geq \frac{|\bar{v}|^2}{3}.$

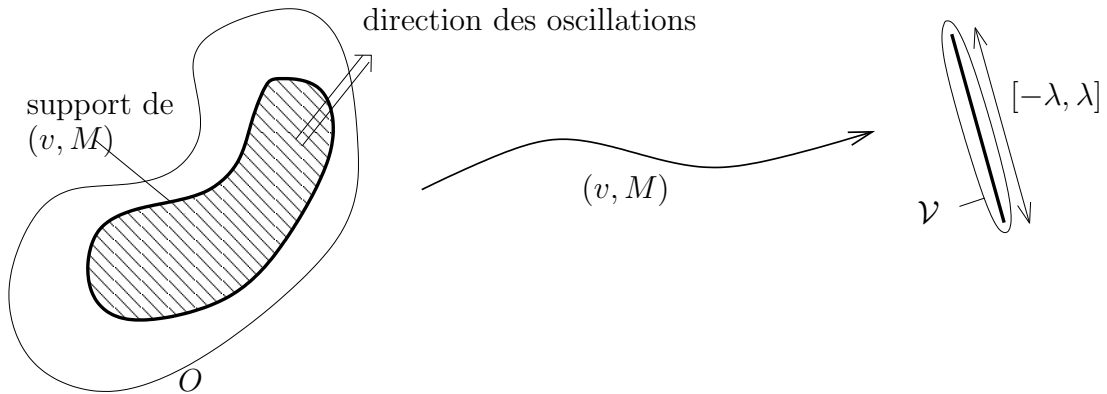


FIGURE 3. Ondes localisées à grande fréquence, d'après la proposition 3.2.

*Preuve de la proposition 3.2.* — Étant donné  $\lambda$ , soient  $A$  et  $(\xi, c)$  comme dans l'énoncé de la proposition 3.1. Soit  $\varphi = \varphi(x, t)$  une fonction plateau  $C^\infty$  à support compact dans



$O \times I$ ,  $0 \leq \varphi \leq 1$ ,  $\varphi$  identiquement égale à 1 sur  $O' \times I_\theta$ . On pose (avec un léger abus de notation)

$$z_\varepsilon(x, t) = (v_\varepsilon, M_\varepsilon)(x, t) = A(\nabla) \left[ \varepsilon^3 \varphi(x, t) \cos \left( \frac{\xi \cdot x + ct}{\varepsilon} \right) \right].$$

Cette fonction est bien sûr à support compact dans  $O \times I$ , et par la proposition 3.1 (i),  $(v_\varepsilon, M_\varepsilon, 0)$  résout (3). Par la formule de Leibniz,

$$z_\varepsilon(x, t) = \varepsilon^3 \varphi A(\nabla) \cos \left( \frac{\xi \cdot x + ct}{\varepsilon} \right) + \sum_k \varepsilon^3 B_k(\nabla) \varphi C_k(\nabla) \cos \left( \frac{\xi \cdot x + ct}{\varepsilon} \right),$$

où les  $B_k$  et  $C_k$  sont des opérateurs matriciels, les  $C_k$  étant homogènes de degré 0, 1 ou 2. D'après la proposition 3.1 (ii),  $A(\nabla) \cos(\frac{\xi \cdot x + ct}{\varepsilon}) = \lambda \varepsilon^{-3} \sin(\frac{\xi \cdot x + ct}{\varepsilon})$ ; on conclut que

$$\left\| z_\varepsilon(x, t) - \lambda \varphi(x, t) \sin \left( \frac{\xi \cdot x + ct}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^\infty(O \times I)} = O(\varepsilon).$$

En choisissant  $\varepsilon$  assez petit, on est assuré que  $z_\varepsilon$  prend ses valeurs dans le voisinage  $\mathcal{V}$  de  $[-\lambda, \lambda]$ .

Par ailleurs,  $z_\varepsilon(x, t) = \lambda \sin(\frac{\xi \cdot x + ct}{\varepsilon})$  dès que  $(x, t) \in O' \times I_\theta$ ; donc

$$\frac{1}{|O'|} \int_{O'} |v_\varepsilon(x, t)|^2 dx = |\bar{v}|^2 \left( \frac{1}{|O'|} \int_{O'} \sin^2 \left( \frac{\xi \cdot x + ct}{\varepsilon} \right) dx \right).$$

Par un calcul classique, le terme entre parenthèses converge vers 1/2 quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , *uniformément en t*. On conclut que pour  $\varepsilon$  assez petit,  $\frac{1}{|O'|} \int_{O'} |v(x, t)|^2 dx \geq |\bar{v}|^2/3$ .

Soit maintenant  $\zeta \in H^1(O)$ ; en utilisant la définition de  $z_\varepsilon$  et en intégrant une fois par parties dans les variables  $x^i$ , on voit que *pour chaque t*, on a  $|\int z_\varepsilon(x, t) \zeta(x) dx| \leq O(\varepsilon) \int |\nabla \zeta| dx \leq O(\varepsilon) \|\zeta\|_{H^1(O)}$ . On en déduit que  $\|z_\varepsilon\|_{H^{-1}(O)} = O(\varepsilon)$ . Finalement,  $z = z_\varepsilon$  remplit toutes les conditions requises pour  $\varepsilon$  assez petit.  $\square$

#### 4. INTÉGRATION CONVEXE

Le principe général de l'intégration convexe, développée pour les équations aux dérivées partielles par Gromov [Gr], et pour les équations différentielles ordinaires par Filippov [Fi], se résume ainsi : étant donnée une équation non linéaire  $\mathcal{E}(u)$ ,

- (i) on réécrit  $\mathcal{E}(u)$  sous la forme  $\mathcal{L}(z) \wedge (z \in K)$ , où  $\mathcal{L}$  est une équation linéaire;
- (ii) on introduit un  $z_0$  sous-solution stricte du système, c'est-à-dire vérifiant  $\mathcal{L}(z_0)$  et  $z_0 \in \text{int } K^{\text{co}}$ , où  $K^{\text{co}}$  désigne l'enveloppe convexe, en un sens adéquat (par exemple l'enveloppe  $\Lambda$ -convexe) de  $K$ ;
- (iii) on construit une suite  $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , définie récursivement par des opérations linéaires, qui s'approche du bord de  $K^{\text{co}}$ ;

(iv) on passe à la limite, après avoir éventuellement modifié la suite  $(z_k)$  pour assurer sa convergence en un sens approprié.

De nombreux exemples sont traités dans les ouvrages [Gr, Sp, Sz].

Dans notre cas, l'étape (i) a été réalisée dans la sous-section 2.1, et la proposition 2.6 nous autorise à choisir  $z_0 = 0$ . Il reste à définir précisément l'espace des sous-solutions, construire une suite s'approchant du bord de cet espace, et passer à la limite; c'est ce que nous allons faire dans cette section.

#### 4.1. Espace de sous-solutions

Avec les notations du théorème 1.4, et la notation 2.2, posons

$$(9) \quad X_0 = \left\{ z = (v, M) \in C_c^\infty(\Omega \times ]0, T[; \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_0^n), \quad \text{solution de (3) avec } q = 0; \right. \\ \left. \forall (x, t) \in \Omega \times ]0, T[, \quad z(x, t) \in \text{int } K^{\text{co}} \sqrt{2\bar{\varepsilon}(x, t)} \right\}.$$

Ce sera l'espace des sous-solutions strictes. Notons que  $z \in X_0$  sera considéré comme défini *pour tous les temps*, même s'il est bien sûr nul en dehors de  $]0, T[$ .

On définit en outre, pour  $\tau \in ]0, T/2[$  et  $\Omega_0$  un ouvert d'adhérence compacte incluse dans  $\Omega$ ,

$$(10) \quad J_{\tau, \Omega_0}(v) = \sup_{\tau \leq t \leq T-\tau} \int_{\Omega_0} \left[ \bar{\varepsilon}(x, t) - \frac{|v(x, t)|^2}{2} \right] dx.$$

Cette fonctionnelle (ou plutôt cette famille de fonctionnelles, quand  $\tau$  et  $\Omega_0$  varient) quantifiera l'éloignement de  $z$  du bord de  $X_0$ . On note que  $J_{\tau, \Omega_0}(v) \geq 0$  si  $z = (v, M) \in X_0$ .

Dans la suite, si  $X$  est un espace métrique, je désignerai par  $C(]0, T[; X)$  l'espace des fonctions continues  $]0, T[ \rightarrow X$ , muni de la topologie de la convergence *localement* uniforme sur  $]0, T[$ ; et par  $L_{\text{loc}}^2$  l'espace des fonctions localement carré-intégrables, muni de sa topologie naturelle.

**PROPOSITION 4.1.** — *Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , et  $T > 0$ ; soit  $X_0$  défini par (9). Alors*

(i) *Si  $z = (v, M)$  appartient à  $X_0$  et  $p = -|v|^2/n$ , alors  $(v, p)$  est solution de l'équation d'Euler (1) avec forçage  $f = \nabla \cdot (v \otimes v - \frac{|v|^2}{n} I_n - M) \in C_c^\infty(\Omega \times ]0, T[; \mathbb{R}^n)$ .*

(ii) *Soit  $(v_k, M_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs dans  $X_0$ , convergeant dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$  et dans  $C(]0, T[; L_{\text{loc}}^2(\Omega))$  vers  $z = (v, M)$ , telle que  $J_{\tau, \Omega_0}(v_k) \rightarrow 0$  pour tout  $\tau > 0$  et pour tout ouvert  $\Omega_0$  d'adhérence compacte incluse dans  $\Omega$ . Alors  $v$  est une solution faible de*

(2), et vérifie

$$\begin{cases} v \in C(\mathbb{R}; L_w^2(\mathbb{R}^n)); \\ \frac{|v(x, t)|^2}{2} = \bar{e}(x, t) = -\frac{n}{2} p(x, t) \quad \text{pour tout } t \in ]0, T[ \text{ et presque tout } x \in \Omega; \\ v \text{ est identiquement nulle en dehors de } \Omega \times ]0, T[. \end{cases}$$

*Preuve de la proposition 4.1.* — L'énoncé (i) est évident.

Avant de démontrer (ii), notons que, d'après la définition de  $K_r$  et la preuve de la proposition 2.6, on a  $|v_k(x, t)|^2 \leq 2\bar{e}(x, t)$  et  $|M_k(x, t)| \leq C(n)\bar{e}(x, t)I_n$  presque partout;  $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est donc globalement borné dans  $L^\infty(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n; \mathcal{S}_0^n))$ . On déduit de l'équation (3) que  $(v_k)$  est précompacte dans  $C(\mathbb{R}; W^{-1,1}(\mathbb{R}^n))$ ; quitte à extraire une sous-suite on a donc  $v_k \rightarrow v$  dans cet espace, et  $M_k \rightarrow M$  au sens des distributions. En particulier,  $v \in C(\mathbb{R}; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)) \cap L^\infty(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ , et il s'ensuit que  $v \in C(\mathbb{R}; L_w^2(\mathbb{R}^n))$ .

Maintenant, pour prouver que  $v$  est solution faible de l'équation d'Euler, on utilise la proposition 2.1; le passage à la limite dans (3) ne pose pas de problème car les équations sont linéaires, il suffit donc de vérifier la condition (4).

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on a  $|v_k(x, t)|^2 \leq 2\bar{e}(x, t)$  en tout  $(x, t) \in \Omega \times ]0, T[$ . Comme  $v_k \rightarrow v$  dans  $C(]0, T[; L_{\text{loc}}^2(\Omega))$  et que  $\bar{e}$  est continue, on déduit de résultats classiques sur la convergence faible que  $|v(x, t)|^2 \leq 2\bar{e}(x, t)$  pour tout  $t \in ]0, T[$  et presque tout  $x \in \Omega$ .

De même, si l'on pose  $\Phi(v, M) = \sigma_{\max}(v \otimes v - M)$  comme dans la preuve de la proposition 2.6, la convexité de  $\Phi$  entraîne  $\Phi(v, M) \leq \liminf \Phi(v_k, M_k)$ , d'où  $\Phi(v, M) \leq \bar{e}$ , c'est-à-dire  $(v, M) \in K_{\sqrt{2\bar{e}}}$ , pour presque tout  $(x, t) \in \Omega \times ]0, T[$ .

Soient  $\tau \in ]0, T/2[$  et  $\Omega_0$  un ouvert compactement inclus dans  $\Omega$ . Par hypothèse, pour tout  $t \in ]\tau, T - \tau[$ ,

$$\int_{\Omega_0} \left[ \bar{e}(x, t) - \frac{|v_k(x, t)|^2}{2} \right] dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

et par convergence forte (dans  $C([\tau, T - \tau]; L^2(\Omega_0))$ ) on peut passer à la limite pour trouver  $\frac{|v(x, t)|^2}{2} = \bar{e}(x, t)$  pour presque tout  $x \in \Omega_0$ . Grâce à la proposition 2.6 (i) on a donc  $(v, M)(x, t) \in K_{\sqrt{2\bar{e}(x, t)}}$ . Ceci étant vrai pour tout choix de  $\tau$  et  $\Omega_0$ , on a  $(v, M)(x, t) \in K$  pour tout  $t \in ]0, T[$  et presque tout  $x \in \Omega$ .

Par ailleurs,  $v(x, t)$  s'annule identiquement pour  $t$  en dehors de  $[0, T]$ . La convergence dans  $C(\mathbb{R}; L_w^2(\mathbb{R}^n))$  garantit que  $v$  est continue en temps à valeurs distributions, d'où  $v(\cdot, 0) = v(\cdot, T) = 0$ . Soit  $t \in ]0, T[$ ; alors, comme  $|v(x, t)|^2 = 2\bar{e}(x, t)$  pour presque tout  $x \in \Omega$ , on a  $\int_{\Omega} |v(x, t)|^2 dx \leq \int_{\Omega} |v(x, t)|^2 dx \leq \liminf \int_{\Omega} |v_k(x, t)|^2 dx \leq 2 \int_{\Omega} \bar{e}(x, t) dx = \int_{\Omega} |v(x, t)|^2 dx$ , ce qui force  $v(x, t) = 0$  presque partout en dehors de  $\Omega$ . (Il était clair a priori que  $v$  s'annulait identiquement en dehors de  $\bar{\Omega}$ , mais nous voulions une information plus précise.)

On conclut que (quitte à le redéfinir sur un ensemble négligeable)  $(v, M)$  est partout à valeurs dans  $K$ , et par la proposition 2.1,  $v$  est bien une solution de l'équation d'Euler. Ceci achève la preuve.  $\square$

## 4.2. Amélioration

Soit  $z \in X_0$ ; nous allons voir que l'on peut l'approcher au sens faible par un  $z'$  qui est "plus près du bord de  $X_0$ " que  $z$ .

PROPOSITION 4.2 (Étape d'amélioration). — *Avec les notations précédentes, soient  $z = (v, M) \in X_0$ ,  $\tau \in ]0, T/2[$  et  $\Omega_0$  un ouvert d'adhérence compacte incluse dans  $\Omega$ . On suppose que*

$$J_{\tau, \Omega_0}(v) \geq \alpha > 0$$

et on se donne  $\eta > 0$ . Alors il existe  $z' = (v', M') \in X_0$  tel que

- $\|z' - z\|_{C([0, T]; H^{-1}(\Omega))} \leq \eta$ ;
- $J_{\tau, \Omega_0}(v') \leq J_{\tau, \Omega_0}(v) - \beta(\alpha)$ ,

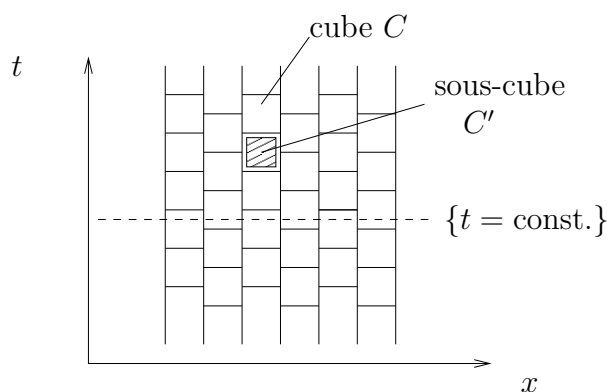
où  $\beta(\alpha) = \beta_{\tau, \Omega_0}(\alpha)$  est une fonction positive strictement croissante de  $\alpha$ .

Remarque 4.3. — Comme on va le voir, on peut donner une formule assez explicite pour la fonction  $\beta(\alpha)$ , qui se comporte comme  $\alpha^2$  pour de petites valeurs de  $\alpha$  [dLSz2]. Cette information est inutile pour la preuve du théorème 1.4, mais pourrait s'avérer importante pour l'étude quantitative des solutions construites par ce théorème.

Preuve de la proposition 4.2. — L'idée consiste à identifier les endroits où  $\bar{v} - \frac{|v|^2}{2}$  est grand, et à y ajouter des oscillations rapides dans des directions autorisées, de façon à faire augmenter  $\frac{|v|^2}{2}$  en moyenne. Sans perte de généralité on supposera  $\alpha \in ]0, 1]$ .

On divise  $\Omega_0 \times [\tau, T - \tau]$  selon un pavage régulier dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , avec décalage d'un demi-carreau d'une colonne à l'autre, de sorte que chaque ligne  $\{t = \text{constante}\}$  ne rencontre que la moitié des jointures. (Voir la Figure 4; c'est à dessein que je reste informel, les formules précises auraient pour résultat probable d'emplier le lecteur de confusion.) Oubliant ce qui se passe près des bords, je ferai comme si  $\Omega_0 \times [\tau, T - \tau]$  était une union de cubes  $C$  de côté  $\varepsilon$ .

Dans chaque cube  $C$  on définit un sous-cube  $C'$ , de même centre que  $C$ , de côté  $(0, 9)^{1/n}\varepsilon$ . Comme  $v$  et  $\bar{v}$  sont uniformément continues sur  $\Omega_0 \times [\tau, T - \tau]$ , l'oscillation de  $\bar{v} - |v|^2/2$  sur chaque cube  $C$  est majorée par  $\alpha/10$  pour  $\varepsilon$  assez petit. De plus, toute ligne  $\{t = t_0\}$  intersecte (aux bords près...) au moins un sur deux des cubes  $C'$  tels que  $C$  intersecte  $\{t = t_0\}$ , soit une proportion supérieure à (disons)  $1/4$  des  $x \in \Omega_0$ . Un

FIGURE 4. Pavage de  $\Omega_0 \times [\tau, T - \tau]$ 

argument de type “somme de Riemann” montre alors que pour  $\varepsilon$  assez petit (dépendant de  $\alpha$ ),

$$(11) \quad \int_{\Omega_0} \left[ \bar{e}(x, t_0) - \frac{|v(x, t_0)|^2}{2} \right] dx \leq 4 \sum_{C' \cap \{t=t_0\} \neq \emptyset} |C'| \left( \bar{e}_C - \frac{|v_C|^2}{2} \right) + \frac{\alpha}{10},$$

où  $\bar{e}_C$  (resp.  $v_C$ ) est la valeur de  $\bar{e}$  (resp.  $v$ ) en le centre du cube  $C$ . Notons que  $|C'| = O(\varepsilon^n)$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Pour tout  $c > 0$ , la contribution au membre de droite de (11) des cubes  $C$  tels que  $\bar{e}_C - \frac{|v_C|^2}{2} \leq c\alpha$  est grossièrement majorée par  $4|C'| \mathcal{N}c\alpha$ , où  $\mathcal{N} = O(1/\varepsilon^n)$  est le nombre maximal de cubes intersectant  $\{t = t_0\}$ ; en choisissant  $c > 0$  (indépendant de  $\varepsilon$ ) tel que  $c \leq 1/(40|C'| \mathcal{N})$  on obtient

$$\int_{\Omega_0} \left[ \bar{e}(x, t_0) - \frac{|v(x, t_0)|^2}{2} \right] dx \leq 4 \sum_C \left\{ |C'| \left( \bar{e}_C - \frac{|v_C|^2}{2} \right); \bar{e}_C - \frac{|v_C|^2}{2} \geq c\alpha \right\} + \frac{\alpha}{5}.$$

En particulier,

$$(12) \quad \sum_C \left\{ |C'| \left( \bar{e}_C - \frac{|v_C|^2}{2} \right); \bar{e}_C - \frac{|v_C|^2}{2} \geq c\alpha \right\} \geq \frac{\alpha}{5}.$$

On cherche maintenant un couple  $(v', M')$  qui fasse mieux que  $(v, M)$ , sous la forme

$$(v', M') = (v, M) + \sum_C (\tilde{v}_C, \tilde{M}_C),$$

où chaque  $z_C = (\tilde{v}_C, \tilde{M}_C)$  est à support compact dans  $C$ . Si  $\bar{e}_C - \frac{|v_C|^2}{2} \leq c\alpha$ , on pose  $\tilde{z}_C = 0$ . Le gain au niveau de la fonctionnelle  $J_{\tau, \Omega_0}$  (au temps  $t_0$ ) sera donc

$$\begin{aligned} \Delta &:= \int_{\Omega_0} \left[ \bar{e}(x, t_0) - \frac{|v'(x, t_0)|^2}{2} \right] dx - \int_{\Omega_0} \left[ \bar{e}(x, t_0) - \frac{|v(x, t_0)|^2}{2} \right] dx \\ &= \int_{\Omega_0} \left( \frac{|v'(x, t_0)|^2}{2} - \frac{|v(x, t_0)|^2}{2} \right) dx \\ &= \sum_{\bar{e}_C - \frac{|v_C|^2}{2} \geq c\alpha} \left( \int_C \frac{|\tilde{v}_C(x, t_0)|^2}{2} dx + \int_C v(x, t_0) \cdot \tilde{v}_C(x, t_0) dx \right) \\ &\geq \sum_{\bar{e}_C - \frac{|v_C|^2}{2} \geq c\alpha} \left( \int_{C'} \frac{|\tilde{v}_C(x, t_0)|^2}{2} dx - \|v(\cdot, t_0)\|_{H^1} \|\tilde{v}_C(\cdot, t_0)\|_{H^{-1}(C)} \right). \end{aligned}$$

On imposera  $\|\tilde{v}_C(\cdot, t_0)\|_{H^{-1}(C)} \leq \delta / (\mathcal{N} \|v(\cdot, t_0)\|_{H^1})$ , de sorte que

$$(13) \quad \Delta \geq \sum_{\bar{e}_C - \frac{|v_C|^2}{2} \geq c\alpha} \int_{C'} \frac{|\tilde{v}_C(x, t_0)|^2}{2} dx - \delta,$$

avec  $\delta$  aussi petit que l'on souhaite.

Si l'on peut imposer également

$$\frac{1}{|C'|} \int_{C'} \frac{|\tilde{v}_C(x, t_0)|^2}{2} dx \geq \frac{\beta}{\alpha} \left( \bar{e}_C - \frac{|v_C|^2}{2} \right),$$

alors en reportant dans (13) et en choisissant  $\delta$  suffisamment petit, on obtiendra la borne  $\Delta \geq \sum \frac{|C'|}{2} \frac{\beta}{\alpha} \left( \bar{e}_C - \frac{|v_C|^2}{2} \right)$ , d'où  $\Delta \geq \beta/10$  par (12).

Récapitulons : étant donné un cube  $C$ , tel que  $\bar{e}_C - \frac{|v_C|^2}{2} \geq c\alpha$ , il suffit de construire  $(\tilde{v}_C, \tilde{M}_C)$  à support compact dans  $C$ , tel que

$$(a) \quad (v + \tilde{v}_C, M + \tilde{M}_C) \in \text{int } K_{\sqrt{2\bar{e}}}^{\text{co}} \text{ en tout } (x, t) \in C;$$

$$(b) \quad \frac{1}{|C'|} \int_{C'} \frac{|\tilde{v}_C(x, t_0)|^2}{2} dx \geq \frac{\beta}{\alpha} \left( \bar{e}_C - \frac{|v_C|^2}{2} \right);$$

$$(c) \quad \sup_t \|\tilde{v}_C(\cdot, t)\|_{H^{-1}} \leq \eta, \text{ arbitrairement petit.}$$

Soit  $\rho = \inf \left\{ \text{dist} \left( z(x, t), \partial K_{\sqrt{2\bar{e}(x,t)}}^{\text{co}} \right); (x, t) \in \Omega_0 \times [\tau, T - \tau] \right\} > 0$ . La proposition 2.6 (ii) fournit  $\lambda = (\bar{v}, \bar{M})$  tel que  $z_C + [-\lambda, \lambda]$  est inclus dans  $K_{\sqrt{2\bar{e}_C}}^{\text{co}}$ , à une distance au moins  $\rho/2$  du bord, et  $|\bar{v}| \geq \text{const.} (\bar{e}_C - |v_C|^2/2)^2 / \|\bar{e}\|_\infty$ . Comme  $z$  et  $K_{\sqrt{2\bar{e}}}^{\text{co}}$  varient uniformément continûment en fonction de  $(x, t)$ , quitte à réduire encore  $\varepsilon$  on peut supposer que  $z(x, t) + [-\lambda, \lambda]$  est inclus dans l'intérieur de  $K_{\sqrt{2\bar{e}(x,t)}}^{\text{co}}$  pour tout  $(x, t) \in C$ . Il existe donc un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $[-\lambda, \lambda]$  tel que  $z(x, t) + \mathcal{V} \subset \text{int } K_{\sqrt{2\bar{e}(x,t)}}^{\text{co}}$  pour tout

$(x, t) \in C$ . On construit alors par la proposition 3.2 une onde  $\tilde{z}_C$  localisée, à support dans  $C$ , à valeurs dans  $\mathcal{V}$ , telle que

$$\frac{1}{|C'|} \int_{C'} |\tilde{v}_C(x, t)|^2 dx \geq \frac{|\bar{v}|^2}{3} \geq \text{const.} \left( \bar{e}_C - \frac{|v_C|^2}{2} \right)^2 \geq \text{const.} \alpha \left( \bar{e}_C - \frac{|v_C|^2}{2} \right),$$

et  $\sup_t \|\tilde{v}_C(\cdot, t)\|_{H^{-1}}$  est arbitrairement petit. Ceci achève la preuve avec  $\beta = \text{const.} \alpha^2$ .  $\square$

Avec une démonstration presque identique, on prouve la variante suivante de la proposition 4.2 :

**PROPOSITION 4.4** (Amélioration sur plusieurs sous-ouverts). — *Soient  $z = (v, M) \in X_0$ ,  $(\tau_\ell)_{1 \leq \ell \leq L}$  et  $(\Omega_\ell)_{1 \leq \ell \leq L}$  vérifiant  $0 < \tau_{\ell+1} < \tau_\ell < T/2$  et  $\bar{\Omega}_\ell \subset \Omega_{\ell+1} \subset \bar{\Omega}_{\ell+1} \subset \Omega$  pour tout  $\ell \in \{1, \dots, L\}$ . On suppose que*

$$J_{\tau_\ell, \Omega_\ell}(v) \geq \alpha_\ell > 0,$$

et on se donne  $\eta > 0$ . Alors il existe  $z' = (v', M') \in X_0$  tel que

- $\|z' - z\|_{C([0, T]; H^{-1}(\Omega))} \leq \eta$  ;
- $\forall \ell \in \{1, \dots, L\}, J_{\tau_\ell, \Omega_\ell}(v') \leq J_{\tau_\ell, \Omega_\ell}(v) - \beta_\ell(\alpha_\ell)$ ,

où  $\beta_\ell(\alpha) = \beta_{\tau_\ell, \Omega_\ell}(\alpha)$  est une fonction positive strictement croissante de  $\alpha$ .

### 4.3. Itération

On peut maintenant démontrer le théorème 1.4, en utilisant de manière répétée la proposition 4.2 pour construire une suite  $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$  qui s'approche du bord de  $X_0$ . Pour assurer la convergence (localement) forte on séparera les échelles en régularisant dans le style de Nash. (Le formalisme est proche de [MS, Section 3.3].)

*Preuve du théorème 1.4.* — Soit  $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  un noyau régularisant en espace-temps, construit selon le procédé habituel :  $\rho_\varepsilon(x, t) = \varepsilon^{-(n+1)} \psi(x/\varepsilon) \chi(t/\varepsilon)$ , où  $\psi$  et  $\chi$  sont des fonctions positives  $C^\infty$  d'intégrale unité, respectivement sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}$ , à support dans la boule unité. Si  $f$  est une fonction  $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ , on notera  $f * \rho_\varepsilon$  le produit de convolution de  $f$  par  $\rho_\varepsilon$  sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

On se donne  $(\tau_j)_{j \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres positifs dans  $]0, T/2[$ , décroissante et tendant vers 0 ; ainsi qu'une suite  $(\Omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$  d'ouverts bornés tels que  $\bar{\Omega}_j \subset \Omega_{j+1}$  et  $\bigcup \Omega_j = \Omega$ . On note  $\beta_j = \beta_{\tau_j, \Omega_j}$  la fonction strictement croissante apparaissant dans la proposition 4.4.

On pose  $z_0 = 0$ ,  $\varepsilon_0 = 1$ . Ayant construit  $z_j = (v_j, M_j) \in X_0$  et  $\varepsilon_j > 0$  pour  $j \leq k-1$ , on applique la proposition 4.4 pour trouver  $z_k = (v_k, M_k)$  satisfaisant

- $J_{\tau_j, \Omega_j}(v_k) \leq J_{\tau_j, \Omega_j}(v_{k-1}) - \beta_j(J_{\tau_j, \Omega_j}(v_{k-1}))$  pour tout  $j \leq k$  ;
- $\sup_t \|(z_k - z_{k-1}) * \rho_{\varepsilon_j}\|_{L^2(\Omega)} < 2^{-k}$  pour tout  $j \leq k-1$  ;
- $\sup_t \|z_k - z_{k-1}\|_{H^{-1}(\Omega)} < \eta 2^{-k}$ .



Puis on choisit  $\varepsilon_k$  tel que  $\|z_j - z_j * \rho_{\varepsilon_k}\|_{L^2} < 2^{-k}$  pour tout  $j \leq k$ .

La suite  $(z_k)$  est globalement bornée dans  $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ , et donc (à extraction près) converge au sens des distributions vers  $z \in L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ . En particulier,  $z_\ell * \rho_{\varepsilon_k} \longrightarrow z * \rho_{\varepsilon_k}$  quand  $\ell \rightarrow \infty$ ,  $k$  étant fixé.

Il est clair que  $\sup_t \|z\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \sum_k \sup_t \|z_k - z_{k-1}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \eta$ .

Soit maintenant  $j$  fixé. Pour tout  $k \geq j$  on a, dans  $C([\tau_j, T - \tau_j]; L^2(\Omega_j))$ ,

$$(14) \quad \|z_k - z\| \leq \|z_k - z_k * \rho_{\varepsilon_k}\| + \|z_k * \rho_{\varepsilon_k} - z * \rho_{\varepsilon_k}\| + \|z * \rho_{\varepsilon_k} - z\|.$$

Par construction, le premier terme du membre de droite de (14) est majoré par  $2^{-k}$ ; quant au dernier, il converge vers 0 quand  $k \rightarrow \infty$ . Pour estimer le second, on écrit

$$\|z_k * \rho_{\varepsilon_k} - z * \rho_{\varepsilon_k}\| = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \|z_k * \rho_{\varepsilon_k} - z_\ell * \rho_{\varepsilon_k}\| \leq \sum_{m \geq k} \|(z_m - z_{m+1}) * \rho_{\varepsilon_k}\| \leq 2^{-k}.$$

Il s'ensuit que  $z_k$  converge vers  $z$  dans  $C([\tau_j, T - \tau_j]; L^2(\Omega_j))$ , et donc dans  $C(]0, T[; L^2_{\text{loc}}(\Omega))$  (convergence localement uniforme en  $t$ ) puisque  $j$  est arbitraire.

Soit  $\ell_j = \limsup J_{\tau_j, \Omega_j}(z_k)$ ; si  $\ell_j \geq \alpha > 0$ , alors en passant à la limite dans l'inégalité d'amélioration de  $J$  on trouve  $\ell_j \leq \ell_j - \beta_j(\alpha) < \ell_j$ , ce qui est absurde. On a donc  $\lim_{k \rightarrow \infty} J_{\tau_j, \Omega_j}(z_k) = 0$ . Ceci étant vrai pour tout  $j$ , on a  $\lim_{k \rightarrow \infty} J_{\tau, \Omega_0}(z_k) = 0$  pour tout  $\tau > 0$  et tout ouvert  $\Omega_0$  compactement inclus dans  $\Omega$ . Il suffit maintenant d'appliquer la proposition 4.1 pour conclure la preuve du théorème 1.4.  $\square$

## 5. ARGUMENT DE CATÉGORIE DE BAIRE

La théorie de Baire est le point de départ d'une méthode de résolution des inclusions différentielles, alternative à l'intégration convexe. Après les travaux pionniers de Cellina [C], De Blasi et Pianigiani [dBP], Bressan et Flores [BF], cette méthode a été amenée à un haut degré de sophistication par Dacorogna et Marcellini (voir [DM1] et les nombreux travaux qui ont suivi). Le livre de Dacorogna et Marcellini [DM2] présente un exposé complet de la théorie, en partie motivée par le désir d'aller au-delà des limitations de la méthode des solutions de viscosité.

Les deux stratégies (intégration convexe et théorie de Baire) fournissent des résultats comparables pour quantité de problèmes, et comportent en fait de nombreux points communs; ceci est particulièrement clair dans la présentation de Kirchheim [K] (réécrite dans [DP]), basée sur l'étude des points de continuité d'une fonction de première catégorie au sens de Baire (i.e. limite ponctuelle d'une suite de fonctions continues). Les liens entre ces deux méthodes sont également analysés de manière synthétique par Sychev [Sy].

Certains énoncés d'intégration convexe, comme le théorème de Nash–Kuiper, ont jusqu'à présent résisté aux tentatives d'approche topologique "à la Baire"; il en va

de même de certains problèmes dans lesquels les considérations topologiques (au sens géométrique) ou la régularité jouent un rôle important.<sup>(6)</sup>

En revanche, le théorème de Scheffer–Shnirelman s’y prête fort bien, et c’est d’ailleurs la méthode privilégiée par De Lellis et Székelyhidi [dLSz1, dLSz2]. Je vais expliquer le cœur de l’argument :

*Ébauche de preuve topologique du théorème 1.4.* — Soit  $X$  l’adhérence de  $X_0$  pour la topologie  $C(\mathbb{R}; \mathcal{D}'(\Omega)) \cap C(]0, T[; L^2_{\text{loc}}(\Omega))$ . Pour tous  $\tau > 0$  et  $\Omega'$  ouvert d’adhérence compacte dans  $\Omega$ , la fonctionnelle  $J_{\tau, \Omega'}$  est semi-continue supérieurement sur  $X$ ; on en déduit que ses points de continuité forment un ensemble gras au sens de Baire (i.e. contenant une intersection dénombrable d’ouverts denses). Soit  $z$  un tel point de continuité : si l’on n’avait pas  $z \in K$  pour tout  $t \in ]\tau, T - \tau[$  et presque tout  $x \in \Omega'$ , on pourrait utiliser la proposition 4.2 pour construire une suite  $(z_k)$ , convergeant vers  $z$  dans  $X$ , telle que  $\limsup J_{\tau, \Omega'}(z_k) < J_{\tau, \Omega'}(z)$ , ce qui serait absurde.

Soient maintenant  $(\tau_j)_{j \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres positifs décroissant vers 0, et  $(\Omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$  une suite croissante exhaustive d’ouverts dans  $\Omega$ . L’ensemble des points de continuité de toutes les fonctionnelles  $J_{\tau_j, \Omega_j}$  est encore gras; et si  $z = (v, M)$  est un tel point de continuité, le raisonnement précédent montre que  $z$  est à valeurs dans  $K$ , pour tout  $t$  et presque tout  $x$ . Par la proposition 2.1,  $v$  est une solution de l’équation d’Euler (4).  $\square$

Par rapport à la technique itérative de la sous-section 4.3, l’argument topologique a l’avantage de fournir automatiquement *une infinité* de solutions distinctes; en outre il est légèrement plus simple à mettre en œuvre. En contrepartie, l’intégration convexe est plus constructive et laisse la porte ouverte à une étude qualitative et quantitative plus fine.

## 6. PROLONGEMENTS ET PERSPECTIVES

### 6.1. Unicité

L’unicité de la solution d’une équation aux dérivées partielles, pour une condition initiale donnée, est une question essentielle. Pour l’équation d’Euler incompressible, le principal résultat en la matière est le célèbre théorème de Yudovich : unicité en dimension 2 dans la classe des solutions de tourbillon (= rotationnel) borné.

---

<sup>(6)</sup>Comme le remarque Gromov, il est intéressant de comparer la méthode de Baire et l’intégration convexe dans le problème de la construction d’applications isométriques lipschitziennes entre variétés de dimension égale : la première méthode fournit une application dont la différentielle est presque partout une isométrie, tandis que la seconde fournit une “vraie” isométrie pour la distance intrinsèque. Même dans cet énoncé où la régularité n’est pas meilleure que lipschitzienne, l’intégration convexe fournit donc en un certain sens plus de régularité.

Les solutions paradoxales de Scheffer et Shnirelman montrent que l'on ne peut espérer l'unicité de la solution des équations d'Euler incompressible pour une donnée initiale irrégulière (disons  $L^2$  ou  $L^\infty$ ) à moins d'imposer des conditions supplémentaires. Mais quel critère de sélection utiliser ? Au vu de considérations physiques et de divers exemples d'équations aux dérivées partielles, il est naturel d'imposer, au choix et selon son tempérament :

- la préservation de la borne d'énergie :  $\int |v(x, t)|^2 dx \leq \int |v(x, 0)|^2 dx$  (la condition la plus faible) ;
- la conservation globale de l'énergie :  $\int |v(x, t)|^2 dx = \int |v(x, 0)|^2 dx$  ;
- la décroissance globale de l'énergie :  $\int |v(x, t)|^2 dx \leq \int |v(x, s)|^2 dx \quad (t \geq s)$  ;
- la décroissance locale de l'énergie :  $\partial_t \frac{|v|^2}{2} + \nabla \cdot \left[ \left( \frac{|v|^2}{2} + p \right) v \right] \leq 0$  (condition imposée par Shnirelman dans [Sh2]) ;
- la conservation locale de l'énergie :  $\partial_t \frac{|v|^2}{2} + \nabla \cdot \left[ \left( \frac{|v|^2}{2} + p \right) v \right] = 0$  (la condition la plus forte).

En exploitant leur construction, De Lellis et Székelyhidi montrent qu'*aucun* de ces critères ne garantit l'unicité. Je vais exposer les grandes lignes de leur argumentation.

Tout d'abord, de même que dans le théorème de Nash–Kuiper on peut partir de n'importe quelle contraction stricte pour la déformer en une isométrie, dans le théorème 1.4 on peut partir de n'importe quelle "sous-solution stricte" de l'équation d'Euler pour la déformer en une vraie solution. Ici une sous-solution désigne un triplet  $(v_0, M_0, q_0)$ , solution du système linéaire (3), de classe  $C^\infty$ , à support strictement inclus dans  $\Omega$  pour tout  $t \in ]0, T[$ , et tel que  $v_0 \otimes v_0 - M_0 < (2\bar{e}/n)I_n$  dans  $\Omega \times ]0, T[$ . (Dans le théorème 1.4 nous nous contentions de choisir  $(v_0, M_0, q_0) = 0$ .)

Donnons-nous maintenant une fonction positive  $e$  sur  $\mathbb{R}$ , paire, telle que  $e(0) = 1/2$  et  $e$  décroît pour  $t > 0$  jusqu'à s'annuler en  $t = 1$ . On pose  $\Omega = B^n(1)$ . En modifiant légèrement la démonstration du théorème 1.4, on peut construire de telles sous-solutions, à support dans  $\{-1 \leq t \leq 1\}$ , telles que  $|v_0(x, 0)| = 1$  presque partout dans  $\Omega$ ,  $(v, M)(x, t) \in \text{int } K_{\sqrt{2e(t)}}$  pour  $t \neq 0$ , et  $(v, M)$  est *lisse* en dehors de  $\{t = 0\}$ . (Le défaut de régularité ne survient que lorsqu'on touche le bord du convexe, ici en  $t = 0$ .)

Choisissons alors  $v_0(\cdot, 0)$  comme donnée initiale, et donnons-nous un nouveau profil d'énergie  $\bar{e} \geq e$ . En appliquant encore une démonstration similaire à celle du théorème 1.4, et l'argument de catégorie de Baire, on peut construire une infinité de solutions définies sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{R}^n \times I$ ,  $I$  étant un intervalle contenant 0), qui partent de la donnée initiale  $v_0$  en  $t = 0$ , et vérifient  $|v(x, t)|^2 = 2\bar{e}(x, t)$  pour tout  $t > 0$  et

presque tout  $x \in \Omega$ ; et  $v = 0$  en dehors de  $\Omega$ . On a beaucoup de marge pour choisir le profil  $\bar{e}$  : la seule contrainte est qu’il soit strictement au-dessus de  $e$  pour  $t \neq 0$  (à chaque étape de la preuve de De Lellis et Székelyhidi, l’énergie ne peut qu’augmenter ; de même qu’au cours de la preuve du théorème de Nash–Kuiper, les distances ne peuvent que croître). Ce profil  $\bar{e}$  peut donc être constant, ou strictement décroissant ; on peut même choisir  $\bar{e} = 1/2$  pour  $|t| < 1$ , et imposer  $v \equiv 0$  en  $|t| = 1$ , puis répéter par périodicité, de façon à construire une solution d’Euler qui s’annule périodiquement. . .

Ces solutions mettent facilement en défaut tous les critères de sélection proposés ci-dessus. Par exemple, si l’on choisit  $\bar{e} \equiv 1/2$ , on a  $|v(x, t)| = 1$  et  $p(x, t) = -1/n$  pour tout  $t$  et presque tout  $x \in \Omega$ , donc  $\partial_t \frac{|v|^2}{2} = 0$ ,  $\nabla \cdot [(\frac{|v|^2}{2} + p)v] = \nabla \cdot [(\frac{|v|^2}{2} + p)(1_{x \in \Omega})v] = ((n - 2)/(2n))\nabla \cdot v = 0$ , et la conservation *locale* de l’énergie est vérifiée !

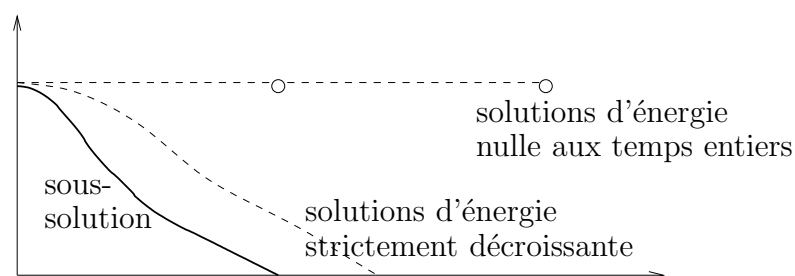
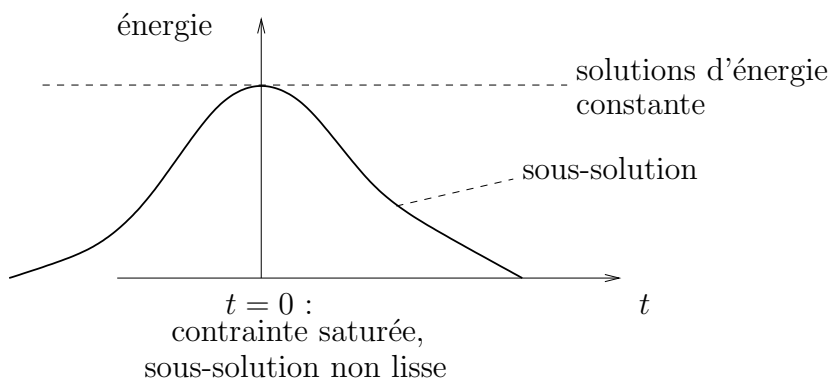


FIGURE 5. Construction de contre-exemples à l’unicité

En fait, parmi tous les critères de sélection habituellement utilisés en mécanique des fluides, le seul dont on puisse encore espérer qu’il s’applique ici est celui de Dafermos, qui postule que la solution pertinente est celle qui fait décroître l’énergie le plus vite possible. Rien cependant ne laisse penser que ce critère s’appliquera tel quel à l’équation d’Euler incompressible, et il faut peut-être se résoudre à abandonner la propriété d’unicité pour des données initiales dans l’espace d’énergie — ou à rechercher cette unicité pour des quantités “moyennées”.

## 6.2. Régularité, dissipation et conjecture d’Onsager

Dans un célèbre article sur la turbulence [On], Onsager suggérait que des solutions suffisamment irrégulières de l’équation d’Euler incompressible en dimension 3 pourraient dissiper de l’énergie. Cette conjecture, si elle était vérifiée, suggérerait la possibilité d’utiliser l’équation d’Euler pour modéliser la turbulence et les cascades d’énergie à la Kolmogorov — plutôt que l’équation de Navier–Stokes dans la limite de faible viscosité, ou grand nombre de Reynolds.

Onsager suggérait même une valeur exacte pour la régularité critique :  $1/3$  de dérivée. Ce nombre est lié à d’autres “constantes magiques” ( $4/3$ ,  $4/5$ ,  $4/15$ ,  $5/3\dots$ ) apparaissant en théorie statistique de la turbulence, obtenues par des raisonnements heuristiques et des hypothèses ad hoc (possibilité de prendre des moyennes sur l’ensemble des solutions, hypothèse “ergodique” de Taylor, hypothèse de dissipation non nulle de Kolmogorov...). Pour en savoir plus sur les théories de turbulence, parmi un très grand nombre de sources (parfois contradictoires) on pourra consulter les ouvrages [Fr] et [MP, Chapitre 7], la synthèse [BT] ou les articles de recherche [DR2, Ey].

Par la suite, Constantin, E et Titi [CET] ont effectivement prouvé qu’une solution d’Euler périodique en dimension 3, admettant plus d’ $1/3$  de dérivée (au sens technique où cette solution appartient à un espace de Besov  $B^{(\alpha,\infty),3}(\mathbb{T}^3)$  pour  $\alpha > 1/3$ ) vérifie la loi de conservation de l’énergie. Ce résultat a été précisé dans [DR1, DR2] et [ChCFSH], entre autres.

En contrepartie, ce n’est qu’en 2000 que Shnirelman [Sh2] construisit des solutions distributionnelles de l’équation d’Euler tridimensionnelle dont l’énergie est *strictement* décroissante. Le théorème de De Lellis et Székelyhidi permet maintenant de renforcer ces résultats en imposant un profil arbitraire à l’énergie cinétique en fonction du temps.

Les données initiales construites par De Lellis et Székelyhidi (selon le schéma présenté dans la sous-section 6.1) sont forcément “très irrégulières” : elles n’admettent pas de solution régulière, même en temps petit ! En effet, les solutions d’Euler vérifiant la préservation de la borne d’énergie sont des solutions dissipatives au sens de Lions [Li] [dLSz2, Section 8], et donc coïncident automatiquement avec la solution régulière s’il en existe une (dans ce cas nécessairement unique). Ici, “régulière” veut dire que le champ de vitesses  $v$  appartient à  $C([0, T]; L^2(\mathbb{R}^n))$  et  $\nabla v + (\nabla v)^T \in L^1([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}^n))$ .

Si tout cela semble corroborer l’intuition d’Onsager, il faut cependant noter que la construction de De Lellis et Székelyhidi (de même que les résultats de Constantin, E et Titi) s’applique en dimension 2 aussi bien qu’en dimension 3, alors que la suggestion d’Onsager était spécifiquement liée à la dimension 3. En fait, on peut soutenir qu’il n’existe à ce jour aucun argument vraiment convaincant, basé sur l’analyse des équations d’Euler ou de Navier–Stokes incompressibles, reflétant la différence — sur laquelle s’accordent les physiciens — entre les turbulences 2-dimensionnelle et 3-dimensionnelle ! Un nouveau rappel, s’il en était besoin, de notre ignorance en la matière.

Indépendamment de toute interprétation physique, ce serait remarquable si l'exposant  $1/3$  proposé par Onsager était effectivement optimal, au sens où pour tout  $\alpha < 1/3$  on pourrait construire des solutions “dérivables  $\alpha$  fois” d'énergie strictement décroissante. (Onsager énonçait cette conjecture dans les espaces de Hölder, mais il n'y a pas vraiment d'argument pour les préférer à d'autres familles d'espaces fonctionnels quantifiant le degré de régularité, tels que les espaces de Sobolev ou de Besov. . .) Pour l'instant, même la continuité des solutions construites par De Lellis et Székelyhidi reste un rêve lointain ; en dimension 2 elle semble utopique à cause de la petitesse de  $K$ , mais en dimension plus grande cette question n'est peut-être pas désespérée.

On notera au passage que la même problématique se pose pour les isométries de Nash–Kuiper : on sait d'après Borisov [B1, B2] que (au moins pour des surfaces analytiques de courbure strictement positive) l'on peut construire des isométries “paradoxaes” en régularité  $C^{1,\alpha}$  pour  $\alpha < 1/7$ , alors qu'il y a rigidité pour  $\alpha > 2/3$ . Pour diverses raisons, Borisov suggère que l'exposant  $1/2$  est un bon candidat pour être optimal, mais ce problème reste grand ouvert. Dans un travail en cours [CdLSz], Conti, De Lellis et Székelyhidi simplifient et améliorent les résultats de Borisov, ce qui constitue peut-être un premier pas dans cette direction.

### 6.3. $h$ -principe pour l'équation d'Euler

La notion de  $h$ -principe ( $h$  = “homotopie”), popularisée par Gromov [Gr], s'applique à des équations aux dérivées partielles, ou plus généralement des inclusions différentielles, pour lesquelles les seules obstructions sont de nature “globale”. Par exemple, dans le théorème de Nash–Kuiper, l'existence d'une immersion de  $M$  dans  $V$  (contrainte globale, topologique, souple) implique l'existence d'immersions isométriques (condition locale, en apparence rigide), que l'on peut obtenir par déformation à partir de la première. Raffinée pour tenir compte au mieux de la topologie, l'intégration convexe a constitué l'une des bases — mais pas la seule — de la théorie du  $h$ -principe, forte de nombreux résultats frappants. Citons le paradoxe du retournement de la sphère [Sm], l'approximation par des métriques à courbure de Ricci négative [Lo], la déformation de champs d'hyperplans en feuilletages [Th], et de nombreuses avancées en géométrie symplectique [Do, Gr]. Le livre d'Eliashberg et Mishachev [EM] fournit une introduction au  $h$ -principe.

Comme on l'a vu, en un certain sens l'équation d'Euler vérifie ce principe : toute “sous-solution stricte”, au sens expliqué dans la sous-section 6.1, peut être déformée en une solution exacte. Dans le cadre du problème de Cauchy, on est naturellement amené à la question non triviale : *pour quelles données initiales peut-on trouver une sous-solution stricte de l'équation d'Euler ?* Comme on l'a déjà noté, ces données initiales sont nécessairement très *irrégulières*, en un sens mal défini. Pour ce qui est de caractériser,

ou tout au moins de décrire plus précisément ces solutions, en termes analytiques et/ou géométriques, nous n’avons pour l’heure essentiellement aucun indice.

## 7. ÉPILOGUE

Je conclurai cet exposé par des considérations peu mathématiques. De manière générale, pour résoudre un paradoxe, les deux principales attitudes consistent soit à accepter et réinterpréter l’énoncé paradoxal, soit à rejeter le modèle et les axiomes qui y ont conduit. Pour exclure Banach–Tarski, on pourra ainsi, selon ses goûts, s’interdire de considérer des ensembles non mesurables, ou bien rejeter l’axiome du choix.

L’attitude à adopter face aux plongements de Nash–Kuiper n’est pas évidente. On pourrait chercher des critères “extrinsèques” interdisant ces plongements ; on peut aussi, au contraire, accepter ces plongements comme réalistes. Après tout, les plongements lipschitziens ne sont pas inaccessibles. Considérons par exemple une sphère élastique que l’on comprime et que l’on laisse se détendre ; des simulations numériques mèneront parfois à une position finale qui n’est pas une sphère standard, mais bien une sphère cabossée [Ol].<sup>(7)</sup>

Pour ce qui est du paradoxe de Scheffer–Shnirelman, on a pu penser un temps que la clé de la résolution résidait dans la définition des solutions faibles. Après les travaux de De Lellis et Székelyhidi, ce point de vue semble difficile à défendre ; en revanche on pourrait maintenant remettre en cause le modèle d’Euler lui-même, du moins quand il est appliqué à des données initiales trop irrégulières. Du point de vue physique, cela signifierait que l’équation d’Euler est impuissante à décrire des échelles très fines. En revanche, tant que l’on reste dans le cadre de la théorie de Yudovich, c’est-à-dire avec un tourbillon borné en dimension 2, le modèle semble inattaquable ; le cas des solutions faibles de Delort [De] (dont le tourbillon peut être une mesure positive) restant à approfondir.

Ce n’est d’ailleurs pas la première fois que l’équation d’Euler est contestée : le paradoxe de D’Alembert [MP, Appendice 1.4], selon lequel un oiseau ne peut voler dans une atmosphère inviscide, incompressible et irrotationnelle, a déjà ébréché sa crédibilité il y a bien longtemps. On peut répondre au paradoxe de D’Alembert en invoquant la présence de vorticité, elle-même engendrée par la viscosité au bord (près de l’aile de l’oiseau...) [MP, Section 1.4]. Ceci revient au fond à modifier le modèle, ou tout au moins à restreindre son champ d’application ; faut-il faire de même pour répondre à De Lellis et Székelyhidi ?

---

<sup>(7)</sup>Cette expérience rappelle Lebesgue froissant son mouchoir pour démontrer qu’une surface dévlopable n’est pas forcément réglée...



## RÉFÉRENCES

- [AK] V.I. ARNOLD, B.A. KHESIN – *Topological methods in hydrodynamics*. Applied Mathematical Sciences, Vol. 125. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [BT] C. BARDOS, E.S. TITI – *Euler equations for incompressible ideal fluids*. Russian Math. Surveys **62**, 3 (2007), 409–451.
- [B1] Ju.V. BORISOV –  *$C^{1,\alpha}$ -isometric immersions of Riemannian spaces*. Dokl. Akad. Nauk. SSSR **163** (1965), 11–13. Traduction en anglais : Soviet. Math. Dokl. **6** (1965), 869–871.
- [B2] Ju.V. BORISOV – *Irregular  $C^{1,\beta}$ -surfaces with an analytic metric*. Siberian Math. J. **45**, 1 (2004), 19–52.
- [BF] A. BRESSAN, F. FLORES – *On total differential inclusions*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **92** (1994), 9–16.
- [C] A. CELLINA – *On the differential inclusion  $x' \in [-1, +1]$* . Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **69**, 1-2 (1980), 1–6.
- [ChCFSh] A. CHESKIDOV, P. CONSTANTIN, S. FRIEDLANDER, R. SHVYDKOY – *Energy conservation and Onsager’s conjecture for the Euler equations*. Nonlinearity **21**, 6 (2008), 1233–1252.
- [CFM] P. CONSTANTIN, Ch. FEFFERMAN, A. MAJDA – *Geometric constraints on potentially singular solutions for the 3-D Euler equation*. Comm. Partial Differential Equations **21**, 3–4 (1996), 559–571.
- [CET] P. CONSTANTIN, W. E, E.S. TITI – *Onsager’s conjecture on the energy conservation for solutions of Euler’s equation*. Comm. Math. Phys. **165**, 1 (1994), 207–209.
- [CdLSz] S. CONTI, C. DE LELLIS, L. SZÉKELYHIDI – Travail en cours.
- [DM1] B. DACOROGNA, P. MARCELLINI – *General existence theorems for Hamilton–Jacobi equations in the scalar and vectorial cases*. Acta Math. **178**, 1 (1997), 1–37.
- [DM2] B. DACOROGNA, P. MARCELLINI – *Implicit partial differential equations*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, Vol. 37. Birkhäuser, Boston, 1999.
- [DP] B. DACOROGNA, G. PISANTE – *A general existence theorem for differential inclusions in the vector valued case*. Port. Math. **62**, 4 (2005), 421–436.
- [dBP] F.S. DE BLASI, G. PIANIGIANI – *A Baire category approach to the existence of solutions of multivalued differential equations in Banach spaces*. Funkcial. Ekvac. **25**, 2 (1982), 153–162.
- [dLSz1] C. DE LELLIS, L. SZÉKELYHIDI – *The Euler equations as a differential inclusion*. À paraître dans Ann. Math. Consultable en ligne à [arXiv:math/0702079](https://arxiv.org/abs/math/0702079)

- [dLSz2] C. DE LELLIS, L. SZÉKELYHIDI – *On admissibility criteria for weak solutions of the Euler equations*. Consultable en ligne à [arXiv:0712.3288](https://arxiv.org/abs/0712.3288)
- [dLSz3] C. DE LELLIS, L. SZÉKELYHIDI – Communication personnelle.
- [De] J.-M. DELORT – *Existence de nappes de tourbillon en dimension deux*. J. Amer. Math. Soc. **4**, 3 (1991), 553–586.
- [dP] R.J. DIPERNA – *Compensated compactness and general systems of conservation laws*. Trans. Amer. Math. Soc. **292**, 2 (1985), 383–420.
- [Do] S.K. DONALDSON – *Symplectic submanifolds and almost complex geometry*. J. Diff. Geom. **44**, 4 (1996), 666–705.
- [DR1] J. DUCHON, R. ROBERT – *Dissipation d'énergie pour des solutions faibles des équations d'Euler et Navier–Stokes incompressibles*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **329**, 3 (1999), 243–248.
- [DR2] J. DUCHON, R. ROBERT – *Inertial energy dissipation for weak solutions of incompressible Euler and Navier–Stokes equations*. Nonlinearity **13**, 1 (2000), 249–255.
- [EM] Y. ELIASHBERG, N. MISHACHEV – *Introduction to the  $h$ -principle*. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 48. American Mathematical Society, Providence, 2002.
- [Ey] G. EYINK – *Local 4/5-law and energy dissipation anomaly in turbulence*. Nonlinearity **16**, 1 (2003), 137–145.
- [Fi] A.F. FILIPPOV – *Classical solutions of differential equations with multi-valued right-hand side*. SIAM J. Control **5** (1967), 609–621.
- [Fr] U. FRISCH – *Turbulence : the legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1995.
- [Ge] P. GÉRARD – *Résultats récents sur les fluides parfaits incompressibles bi-dimensionnels (d'après J.-Y. Chemin et J.-M. Delort)*. Séminaire Bourbaki, Vol. 1991-92, Astérisque **206**, Exp. No. 757, 5 (1992), 411–444.
- [Gr] M. GROMOV – *Partial Differential Relations*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol. 9. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [K] B. KIRCHHEIM – *Rigidity and geometry of microstructures*. Thèse d'habilitation, Université de Leipzig, 2003.
- [KMS] B. KIRCHHEIM, S. MÜLLER, V. ŠVERÁK – *Studying nonlinear PDE by geometry in matrix space*. Geometric analysis and nonlinear partial differential equations, édité par S. Hildebrandt et H. Karcher, Springer-Verlag, 2003, pp. 347–395.
- [K1] N.H. KUIPER – *On  $C^1$  isometric imbeddings, I, II*. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **58** [Indag. Math. **17**] (1955), 545–556, 683–689.

- [K2] N.H. KUIPER – *Isometric and short imbeddings*. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **62** [Indag. Math. **21**] (1959), 11–25.
- [Li] P.-L. LIONS – *Mathematical topics in fluid mechanics, Vol. 1 : Incompressible models*. Oxford Lecture Series in Mathematics and its applications, Vol. 3, Oxford University Press, New York, 1996.
- [Lo] J. LOHKAMP – *Curvature  $h$ -principles*. Ann. of Math. **142**, 3 (1995), 457–498.
- [MP] C. MARCHIORO, M. PULVIRENTI – *Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids*. Applied Mathematical Sciences, Vol. 96. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [MS] S. MÜLLER, V. ŠVERÁK – *Convex integration for Lipschitz mappings and counterexamples to regularity*. Ann. of Math. **157**, 3 (2003), 715–742.
- [Mu] F. MURAT – *Compacité par compensation*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **5**, 3 (1978), 489–507; Partie II : Proceedings of the International Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis (Rome, 1978), Pitagora, Bologna, 1979, pp. 245–256.
- [Na] J. NASH –  *$C^1$  isometric imbeddings*. Ann. Math. **60**, 3 (1954), 383–396.
- [Ol] Y. OLLIVIER – Communication personnelle.
- [On] L. ONSAGER – *Statistical hydrodynamics*. Nuovo Cimento **6**, Supplemento, 2 (1949), 279–287.
- [Sch] V. SCHEFFER – *An inviscid flow with compact support in space-time*. J. Geom. Anal. **3**, 4 (1993), 343–401.
- [Sh1] A. SHNIRELMAN – *On the nonuniqueness of weak solution of the Euler equation*. Comm. Pure Appl. Math. **50**, 12 (1997), 1261–1286.
- [Sh2] A. SHNIRELMAN – *Weak solutions with decreasing energy of incompressible Euler equations*. Comm. Math. Phys. **210**, 3 (2000), 541–603.
- [Sm] S. SMALE – *A classification of immersions of the two-sphere*. Trans. Amer. Math. Soc. **90** (1958), 281–290.
- [Sp] D. SPRING – *Convex integration theory. Solutions to the  $h$ -principle in geometry and topology*. Monographs in Mathematics, Vol. 92. Birkhäuser Verlag, Basel, 1998.
- [Sy] M.A. SYCHEV – *A few remarks on differential inclusions*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **136**, 3 (2006), 649–668.
- [Sz] L. SZÉKELYHIDI – *Differential inclusions*. Ouvrage en cours de rédaction.
- [T1] L. TARTAR – *Compensated compactness and applications to partial differential equations*. Nonlinear analysis and mechanics : Heriot-Watt symposium, IV, Vol. **39** de Res. Notes in Math. Pitman, Boston, 1979, pp. 136–212.

- [T2] L. TARTAR – *The compensated compactness method applied to systems of conservation laws*. Systems of nonlinear partial differential equations (Oxford, 1982), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. **111**, Reidel, Dordrecht, 1983, pp. 263–285.
- [Th] W. THURSTON – *Existence of codimension one foliation*. Ann. of Math. **104**, 2 (1976), 249–268.

Cédric VILLANI

École Normale Supérieure de Lyon

U.M.P.A.

UMR 5669 du CNRS

46 allée d'Italie

F-69364 Lyon Cedex 07

*E-mail*: Cedric.VILLANI@umpa.ens-lyon.fr