Séminaire BOURBAKI Juin 2009
61ème année, 2008-2009, n$^{\text{o}}$ 1008

ÉQUIDISTRIBUTION DES ORBITES TORIQUES SUR LES ESPACES HOMOGÈNES [d'après M. Einsiedler, E. Lindenstrauss, Ph. Michel, A. Venkatesh]

par **Emmanuel BREUILLARD**

1. INTRODUCTION

Soit $G = SL(d, \mathbb{R})$, $\Gamma = SL(d, \mathbb{Z})$, A le sous-groupe des matrices diagonales et $\Omega = \Gamma\backslash G$, l'espace des réseaux unimodulaires de $\mathbb{R}^d$. Soit H un sous-groupe fermé de G et dg une mesure de Haar sur G ou sur Ω. Depuis que Raghunathan a mis en évidence à la fin des années 1970 tout le profit qu'il y aurait à tirer de l'étude des H-orbites $x \cdot H$ dans Ω, $x \in \Omega$, pour diverses questions classiques de théorie des nombres, beaucoup de chemin a été parcouru. Margulis (1986) a démontré la conjecture d'Oppenheim en suivant cette stratégie et Ratner (1990) a répondu aux conjectures de Raghunathan en donnant une description précise des propriétés topologiques et statistiques du système dynamique (Ω, H, dg) *lorsque H est un sous-groupe fermé engendré par des unipotents de G*. Pour de tels sous-groupes H (par exemple si H est semi-simple sans facteurs compacts) l'adhérence des orbites est « algébrique » : cela veut dire que cette adhérence est elle-même l'orbite d'un sous-groupe fermé L contenant H et possédant une mesure L-invariante finie. Un des aspects surprenants de la preuve de Ratner est qu'elle déduit ce théorème topologique d'un théorème métrique : elle classifie d'abord les mesures ergodiques H-invariantes sur Ω. Forts de ce résultat, de ses généralisations naturelles dans le contexte S-arithmétique, et des nouvelles techniques dites de linéarisation développées par Dani, Margulis et Shah, de nombreux auteurs (voir par exemple [29], [28], [26], [32]) ont fait intervenir ces théorèmes dans diverses situations comme le comptage des points entiers sur une variété homogène, l'équidistribution des translatées de H-orbites, et même récemment la conjecture d'André-Oort ([72],[38]).

Dans cet exposé, nous nous intéressons au cas opposé où le sous-groupe H n'est pas engendré par des unipotents. Plus précisément nous supposons que $H = A$ est le tore diagonal. Là aussi de nombreuses études ont été poursuivies, mais certaines questions importantes demeurent. Le cas $d = 2$ est dans une large mesure bien compris : il correspond au flot géodésique sur une surface hyperbolique, ici la surface modulaire. On sait alors décrire les A-orbites via le codage markovien (voir par exemple [67]). Dans ce cas, la plupart des A-orbites ont un comportement chaotique. Par exemple on construit facilement des A-orbites dont l'adhérence a une dimension de Hausdorff qui peut prendre une valeur quelconque entre $1 = \dim A$ et $3 = \dim G$. De même ces compacts invariants peuvent être les supports de mesures de probabilité A-invariantes et ces mesures peuvent avoir de l'entropie pour l'action de A. Lorsque $d \geq 3$ la situation est très différente et un phénomène de rigidité lié au rang supérieur (i.e. l'existence d'au moins deux actions linéairement indépendantes qui commutent) apparaît : on s'attend au contraire – voir plus bas §5 et l'article de Margulis [46] pour une formulation précise de ces conjectures – à ce que les adhérences de A-orbites soient beaucoup mieux contrôlées et que les mesures de probabilité A-invariantes et ergodiques soient elles aussi « algébriques », c'est-à-dire des mesures de Haar sur des sous-espaces homogènes de Ω. Après le travail initial de Katok et Spatzier [37] deux méthodes (dites de haute entropie et basse entropie) permettant de préciser la nature algébrique des mesures ergodiques A-invariantes ont vu le jour pour culminer avec le théorème de Einsiedler-Katok-Lindenstrauss [20] affirmant

Théorème 1.1 (Einsiedler-Katok-Lindenstrauss [20]). — *Toute mesure de probabilité A-invariante ergodique sur Ω ayant de l'entropie positive pour au moins un sous-groupe à un paramètre de A est algébrique.*

Comme pour le théorème de Ratner, la classification des mesures A-invariantes sur Ω, et donc le théorème d'Einsiedler-Katok-Lindenstrauss, possède potentiellement des applications arithmétiques. Par exemple, Margulis a observé qu'une réponse positive à sa conjecture (sans condition supplémentaire d'entropie positive) impliquerait la fameuse conjecture de Littlewood en approximation diophantienne (voir plus bas §4). Malheureusement, vérifier la condition d'entropie positive demande souvent une hypothèse supplémentaire : par exemple on montre dans [20] que l'ensemble des exceptions possibles à Littlewood est de dimension de Hausdorff zéro en raisonnant par l'absurde et en construisant une mesure d'entropie positive. Il en est de même pour l'ensemble des contre-exemples éventuels (A-orbites irrégulières) à la conjecture de Margulis.

Dans [22] Einsiedler, Lindenstrauss, Michel et Venkatesh s'intéressent à la distribution des A-orbites compactes dans Ω. Ils posent entre autres les questions suivantes : est-ce que seul un nombre fini de A-orbites compactes peuvent rester confinées dans un compact donné de Ω ? Une suite d'orbites compactes dont le volume tend vers l'infini devient-elle toujours équidistribuée pour la mesure de Haar dans Ω ?

Alors qu'on s'attend (d'après ces mêmes conjectures de Margulis) à une réponse positive à la première question, les auteurs de [22] obtiennent la réponse approchée suivante (on définit au §2 la notion de discriminant d'une orbite compacte) :

Théorème 1.2 ([22]). — *On fixe $d \geq 3$. Soit C un compact de Ω. Le nombre de A-orbites compactes contenues dans C et de discriminant au plus D est $\ll_\varepsilon D^\varepsilon$.*

C'est donc très peu d'orbites car le nombre total d'orbites de discriminant au plus D est polynomial en D (cf. proposition 2.3). La réponse à la seconde question est non (voir plus bas §3). Cependant, les auteurs de [22] conjecturent :

Conjecture 1.3. — *Soit $\rho > 0$ et $(x_n \cdot A)_n$ une suite de A-orbites compactes dans Ω de discriminant D_n telle que $vol(x_n \cdot A) \geq (D_n)^\rho$ pour tout entier n. Alors si μ_n est la mesure de probabilité A-invariante sur $x_n \cdot A$, la suite μ_n converge vers la mesure de Haar normalisée sur Ω.*

Dans les deux cas il s'agit de vérifier que l'hypothèse faite (sur le nombre d'orbites de discriminant au plus D dans le cas du théorème 1.2 et sur le volume de l'orbite dans le cas de la conjecture 1.3) se traduit par une condition d'entropie positive pour toute limite faible des μ_n. Cette idée repose sur ce que ses auteurs appellent le « principe de Linnik » en hommage à Y. Linnik qui, dans son livre [44], a été un des premiers à étudier le problème de la distribution des A-orbites compactes d'un point de vue ergodique.

Soit Y_n une A-orbite ou un ensemble fini de A-orbites de discriminant au plus D_n. On note $vol(Y_n)$ le volume total de Y_n et μ_n la mesure de Haar normalisée sur Y_n (i.e. la mesure de probabilité assignant un poids relatif à chaque orbite égal à son volume A-invariant). Si μ est une mesure A-invariante sur Ω et $a \in A$, on note $h_\mu(a)$ l'entropie de μ pour la translation à droite par a.

Proposition 1.4 ([22] « Principe de Linnik »). — *Supposons qu'il existe un $\rho > 0$ tel que $vol(Y_n) \geq (D_n)^\rho$ et soit μ_∞ une valeur d'adhérence de la suite μ_n qui est de masse totale 1 sur Ω. Alors $h_{\mu_\infty}(a) \geq \rho \cdot h(a)$ pour tout $a \in A$, où $h(a)$ est une fonction positive sur A et strictement positive sur les éléments réguliers de A.*

Moyennant ce principe on obtient facilement la

Preuve du théorème 1.2 : Soit μ_∞ une valeur d'adhérence de μ_D la mesure A-invariante normalisée sur Y_D la réunion des A-orbites compactes de discriminant au plus D incluses dans C. Comme C est compact, il n'y a pas de fuite de masse et $\mu_\infty(\Omega) = 1$. Le volume d'une A-orbite compacte est clairement minoré par une constante strictement positive car la plus grande valeur propre d'un élément semi-simple $\mathbb{R}$-déployé de Γ est elle-même minorée. Ainsi si le cardinal de Y_D est au moins D^ε, c'est que le volume total de Y_D est aussi au moins D^ε. Par le principe de Linnik, μ_∞ a de l'entropie positive, donc possède une composante ergodique d'entropie positive. Celle-ci est algébrique d'après le théorème 1.1. Mais son support est compact : c'est donc la probabilité A-invariante sur une A-orbite compacte. Mais une telle mesure est d'entropie nulle (translation sur un tore). D'où la contradiction. *CQFD.*

L'application du principe à la seconde question, i.e. à la conjecture 1.3 permet de montrer que toute limite μ_∞ possède de l'entropie. Le problème est que, bien que clairement A-invariante, μ_∞ n'est pas nécessairement ergodique. Ce type de problème est classique dans les applications arithmétiques du théorème de Ratner et les techniques de linéarisation de Dani-Margulis et Shah ([13] [68]) ont été développées en partie pour y remédier. Il peut aussi y avoir fuite de masse (voir §3). Dans cette situation il faut donc se contenter de :

Corollaire 1.5 ([22]). — *On fixe $d = 3$ et on se place dans la situation de la conjecture 1.3. Pour toute mesure limite μ_∞ des μ_n telle que $\mu_\infty(\Omega) > 0$ on note $\nu_\infty = \frac{\mu_\infty}{\mu_\infty(\Omega)}$ la mesure renormalisée. Alors $\nu_\infty \geq \rho \cdot c \cdot dg$ où dg est la mesure de Haar normalisée sur Ω et $c > 0$ est une constante.*

Preuve : C'est la conséquence de la combinaison du principe de Linnik et du théorème 1.1 d'Einsiedler-Katok-Lindenstrauss. Plus précisément, fixons $a \in A$ un élément régulier (i.e. à valeurs propres de modules distincts). Soit $\mu_\infty = \int_X \nu_\xi dm(\xi)$ la décomposition ergodique de μ_∞ pour l'action de a. Écrivons $\mu_\infty = t\nu_1 + (1-t)\nu_2$ où ν_1 (resp. ν_2) est la partie de la décomposition de μ_∞ dont les composantes ergodiques ν_ξ sont d'entropie strictement positive (resp. nulle) pour a. D'après le théorème 1.1 chaque ν_ξ est algébrique, i.e. L-invariante pour un certain sous-groupe fermé L contenant A. Notons que $A \subsetneq L$ car la mesure de Haar sur une A-orbite compacte est d'entropie nulle pour tout $a \in A$. Mais comme $d = 3$, la seule possibilité est que $L = G$ (voir la discussion après le théorème 4.3 plus bas) et donc $\nu_\xi = dg$ et $h_{\nu_1}(a) = h_{dg}(a)$. On sait par ailleurs calculer $h_{dg}(a)$, c'est la somme des $\log^+$ des valeurs propres de a, il est donc strictement positif. Mais $h_{\mu_\infty}(a) = \int h_{\nu_\xi}(a)dm(\xi) = th_{\nu_1}(a)$ et $h_{\mu_\infty} \geq c(a) \cdot \rho$ d'après le principe de Linnik 1.4. D'où $t \geq \frac{c(a)}{h_{dg}(a)} \cdot \rho$. *CQFD.*

Lorsque d est premier impair la conclusion subsiste avec la même preuve. Pour d quelconque en revanche des mesures algébriques intermédiaires peuvent en principe apparaître et la conclusion qu'on tire par cette méthode est donc plus faible. De toute façon cet argument n'interdit pas une fuite de masse éventuelle. Néanmoins lorsque l'on considère $\Omega = \Gamma' \backslash G$ où Γ' est un réseau arithmétique co-compact associé à une algèbre à division sur $\mathbb{Q}$, alors le principe de Linnik reste valide et la co-compacité fait qu'il n'y a pas de problème de fuite de masse : les auteurs de [22] en déduisent alors semblablement que la réunion d'une *suite stricte* de A-orbites compactes (i.e. telle que seul un nombre fini d'entre elles soient contenues dans une L-orbite périodique donnée associée à un sous-groupe $L \subsetneq G$) est dense dans Ω pourvu qu'il existe un $\rho > 0$ tel que la réunion Y_D des orbites de la suite dont le discriminant est D vérifie $vol(Y_D) \geq D^\rho$.

En sus de ce corollaire c'est le résultat principal de Einsiedler, Lindenstrauss, Michel et Venkatesh dans [24] qui vient apporter le plus de créance à la conjecture 1.3 : ce résultat confirme la conjecture pour $d = 3$ dans le cas où Y_n est une réunion de « paquets » d'orbites :

Théorème 1.6 (équidistribution des paquets [24]). — *On fixe $d = 3$. Soit Y_n une suite infinie de « paquets » de A-orbites. Alors μ_n converge vers la mesure de Haar sur Ω. En particulier, si Y_n est la réunion des toutes les A-orbites compactes de même volume $V = V_n \uparrow +\infty$, alors μ_n converge vers Haar.*

Ce théorème s'inscrit dans le cadre d'une conjecture plus générale due à Clozel et Ullmo concernant l'équidistribution des translatés adéliques de mesures algébriques (voir §6 plus bas). La seconde assertion est aussi l'analogue du résultat fameux de Bowen [6] et Margulis [47] sur l'équidistribution des géodésiques fermées de longueur au plus L dans une variété compacte à courbure strictement négative et des travaux de Zelditch [77] sur la surface modulaire. Nous définissons les paquets d'orbites au paragraphe 6. Pour l'instant contentons-nous d'indiquer que ce sont des sous-ensembles finis d'orbites formant une partition de l'ensemble des A-orbites compactes. Dans un même paquet toutes les orbites ont le même volume (ce qui explique pourquoi la deuxième partie de l'énoncé découle de la première) et le même discriminant. Pour obtenir la convergence vers Haar et non plus seulement un résultat partiel comme le corollaire précédent qui donnait que toute limite n'est pas étrangère à Haar, il faut bien sûr montrer que toutes les composantes ergodiques d'une limite sont d'entropie positive. Les auteurs de [24] établissent cette propriété en montrant la convergence des μ_n sur une partie seulement des fonctions sur Ω à savoir sur les séries de Siegel-Eisenstein. Nous verrons au paragraphe 7 comment l'analyse harmonique permet de déduire cette convergence de la sous-convexité de certaines fonctions L. C'est là le second ingrédient essentiel de la preuve du théorème 1.6.

Signalons que l'on peut envisager d'autres groupements naturels (et moins fins) de A-orbites, comme le groupement par discriminant fixé, par ordre fixé, ou bien encore par l'action des opérateurs de Hecke. Cette dernière option est étudiée en détail par Benoist et Oh dans [1] où est établie l'équidistribution des orbites sous Hecke d'une A_0-orbite compacte quelconque pour un sous-tore A_0 de A non nécessairement maximal.

Quand $d = 2$, bien qu'il n'y ait plus rigidité des mesures d'entropie positive, les auteurs de [24] conjecturent que l'énoncé de la conjecture 1.3 reste vrai. En fait l'analogue pour $d = 2$ du théorème 1.6 lui aussi est vrai : c'est le théorème de Duke [14] sur l'équidistribution des points de Heegner et des géodésiques fermées de la surface modulaire. La preuve de Duke reposait sur la traduction classique du problème via la série théta associée : l'équidistribution revient alors à montrer une borne non triviale sur les coefficients de Fourier de cette forme modulaire (qui est de poids demi-entier), ce que Duke établit en généralisant une idée due à Iwaniec. Cependant, grâce à la formule de Waldspurger [75] (voir aussi [56]) qui relie l'intégrale d'une forme automorphe sur un paquet aux valeurs spéciales de certaines fonctions L (voir §7) il est aussi possible de déduire le théorème de Duke d'estimations de sous-convexité relatives à ces fonctions L – voir en particulier l'article de Clozel et Ullmo [10] où ces techinques sont mises en œuvre. Ces estimations, reposant sur les travaux initiaux de Burgess [7], puis de Duke-Friedlander-Iwaniec [15], permettent de montrer (pour $d = 2$) l'équidistribution des μ_n évaluées contre n'importe quelle forme automorphe, ce qui suffit bien sûr à montrer la convergence de μ_n vers Haar.

Pour $d = 3$ cette méthode est difficile à mettre en œuvre, surtout pour la partie cuspidale du spectre car on ne dispose pas de formule liant l'intégrale sur un paquet aux fonctions L associées. Cependant pour les séries de Siegel-Eisenstein, on dispose d'une telle formule, c'est la formule de Hecke qui exprime l'intégrale sur un paquet comme un produit de la fonction de Dedekind ζ_K du corps cubique relatif à l'orbite et d'un terme local associé à l'ordre correspondant. La borne de sous-convexité nécessaire pour ζ_K est connue par les travaux de Duke-Friedlander-Iwaniec [16] et Blomer-Harcos-Michel [4]. Une partie importante de l'article [24] consiste à montrer le contrôle du terme local. Ceci entraîne finalement l'équidistribution sur les séries de Siegel-Eisenstein. Mais il se trouve que cette information est suffisante pour établir l'entropie positive de toute mesure limite. On peut alors conclure en utilisant le théorème 1.1. L'hypothèse d'entropie positive nécessaire à la preuve ergodique est donc fournie par la sous-convexité. Comme Einsiedler, Lindenstrauss, Michel et Venkatesh l'ont observé ce principe était déjà présent en filigrane dans les travaux de Linnik ([44]) qui, moyennant l'hypothèse de Riemann (ou bien une « condition de Linnik » imposant une condition de congruence sur le discriminant du paquet), obtenait le cas $d = 2$ par une méthode purement ergodique.

Signalons que tout récemment Michel et Venkatesh [51] ont grandement généralisé ces bornes de sous-convexité en obtenant un énoncé général et uniforme valable pour toute forme automorphe sur GL_2. Aussi, dans un troisième volet toujours en préparation (voir [24] Theorem 4.6), Einsiedler, Lindenstrauss, Michel et Venkatesh obtiennent une vaste généralisation du théorème de Duke au cadre adélique sur GL_2, i.e. l'équidistribution des paquets dans n'importe quelle algèbre de quaternions sur un corps de nombres et sans restriction sur l'espace des paramètres (tore, places). Enfin ils obtiennent aussi une preuve purement ergodique du théorème de Duke pour les géodésiques en montrant une version forte du principe de Linnik énoncé ci-dessus consistant à établir que l'entropie de toute mesure limite est maximale, donc Haar. Cette preuve est le produit de la relecture moderne, via l'entropie, que font Einsiedler, Lindenstrauss, Michel et Venkatesh du livre de Linnik [44] dans lequel un tel argument dynamique est mis en œuvre pour établir l'équidistribution sous une condition de congruence (condition de Linnik).

Dans la suite de l'exposé nous décrivons plus précisément les travaux de Einsiedler, Lindenstrauss, Michel et Venkatesh et donnons les ingrédients de preuve des théorèmes ci-dessus. Ce texte n'est pas un survol de fond du sujet, au plus c'est une invitation à la lecture des articles [22] et [24] où le lecteur pourra trouver tous les détails des preuves ainsi que plusieurs extensions des énoncés donnés dans cette introduction.

2. ORBITES TORIQUES COMPACTES : DISCRIMINANT ET VOLUME

Lorsque $d = 2$, les A-orbites compactes de Ω peuvent être décrites géométriquement : ce sont les géodésiques orientées fermées de la surface modulaire. Tout relevé $\widetilde{\xi}$ d'une telle géodésique au revêtement universel, i.e. au demi-plan de Poincaré, est un arc de cercle orienté d'extrémités ξ_- et ξ_+ situées sur la droite réelle. Il se trouve que ξ_- et ξ_+ sont les racines d'un trinôme $ax^2 + bx + c$ à coefficients entiers. Réciproquement tout tel trinôme avec $D > 0$ donne lieu à une géodésique fermée. Si on choisit $pgcd(a, b, c) = 1$, alors $D = b^2 - 4ac$ est un entier qui est indépendant du choix du relevé. C'est le discriminant de l'orbite.

En dimension quelconque, les A-orbites compactes de Ω sont mieux décrites via l'arithmétique. Soit K un corps de nombres totalement réel de degré d sur $\mathbb{Q}$ et L un réseau de K, c'est-à-dire un $\mathbb{Z}$-module libre de rang d inclus dans K qui engendre K comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Soit $\sigma : K \to \mathbb{R}^d$, $x \mapsto (\sigma_1(x), ..., \sigma_d(x))$ un plongement canonique de K via les d différents $\mathbb{Q}$-isomorphismes $\sigma_1, ..., \sigma_d : K \hookrightarrow \mathbb{R}$. L'image de L par σ est un réseau de $\mathbb{R}^d$ qu'on peut renormaliser pour le rendre unimodulaire (noter que $\Omega = SL(d,\mathbb{Z})\backslash SL(d,\mathbb{R}) = PGL(d,\mathbb{Z})\backslash PGL(d,\mathbb{R})$). Sa A-orbite est compacte dans Ω. En effet $a = diag(a_1, ..., a_d) \in A$ est dans le stabilisateur de $\sigma(L)$ si et seulement si $a_i = \sigma_i(x)$ pour un certain $x \in \mathcal{O}_L^\times$ le groupe des éléments inversibles de l'ordre $\mathcal{O}_L = \{k \in K, kL \subseteq L\}$. Clairement $\mathcal{O}_L$ (resp. $\mathcal{O}_L^\times$) est d'indice fini l'ordre maximal $\mathcal{O}_K$ (resp. $\mathcal{O}_K^\times$) et d'après le théorème des unités de Dirichlet, $\{diag(\sigma_1(x), ..., \sigma_d(x)), x \in \mathcal{O}_K^\times\}$ est discret et co-compact dans A. Notons que deux choix L et L' donnent lieu à la même orbite si et seulement si $L' = kL$ pour un certain $k \in K^\times$. Comme on le vérifie aisément, cette construction produit en fait toutes les A-orbites compactes :

Proposition 2.1. — *L'ensemble des A-orbites compactes de Ω est naturellement paramétré par les triplets $(K, [L], \sigma)$, où K est un corps de nombres totalement réel, $[L]$ une classe d'homothétie de réseaux de K et σ le choix (parmi $d!$) d'un plongement canonique.*

Le corps K et la classe $[L]$ sont uniquement déterminés par la A-orbite ; il se peut en revanche que deux σ distincts donnent la même orbite. Le corps K est tout simplement la sous $\mathbb{Q}$-algèbre engendrée par le stabilisateur dans A d'un point de l'orbite, lequel est un sous-groupe d'indice fini du groupe des unités de K.

On peut préciser cette correspondance en étudiant le tore associé. La A-orbite de $\sigma(L)$ s'écrit ΓgA où g est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $(\sigma_1(v_i), ..., \sigma_d(v_i))$ où $v_1, ..., v_d$ est une $\mathbb{Z}$-base de L. Le tore $T = gAg^{-1}$ est un tore maximal $\mathbb{R}$-déployé de $SL(d,\mathbb{R})$ qui est défini sur $\mathbb{Q}$ car il est clairement stable sous $Gal(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$. C'est un tore $\mathbb{Q}$-anisotrope car $T \cap \Gamma$ est co-compact dans T. En tant que $\mathbb{Q}$-tore, il est isomorphe aux éléments de norme 1 dans la restriction des scalaires $Res_{\mathbb{Q}}^K \mathbb{G}_m$ du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ de K à $\mathbb{Q}$. L'application $x \to g \cdot diag(\sigma_1(x), ..., \sigma_d(x)) \cdot g^{-1}$ permet aussi d'identifier K à une sous-algèbre $\mathfrak{t}_{\mathbb{Q}}$ de $M_d(\mathbb{Q})$. Sous cette identification, les éléments de norme 1 dans K s'identifient à $T(\mathbb{Q})$. Réciproquement tout tore maximal $\mathbb{R}$-déployé et $\mathbb{Q}$-anisotrope donne lieu à une orbite compacte, ou plutôt $d!$ orbites compactes. Notons en effet que deux orbites $\Gamma g_1 A$ et $\Gamma g_2 A$ produisent le même tore si et seulement si $g_2 \in N_G(A)$ le normalisateur de A dans G. Il y a donc au plus $d!$ orbites distinctes correspondant à un même tore : en projection dans l'espace localement symétrique $X = \Gamma\backslash G/K$ ces $d!$ orbites s'envoient sur un même tore immergé et le choix d'une chambre de Weyl les distingue (modulo une éventuelle auto-intersection) dans $\Gamma\backslash G$.

Prendre un conjugué sur $\mathbb{Q}$ de T revient à faire varier le réseau L associé à l'orbite sur $\mathbb{Q}$. Enfin, par Skolem-Noether, deux tores sont associés au même corps de nombres K (i.e. sont isomorphes sur $\mathbb{Q}$) si et seulement si ils sont conjugués dans $GL_n(\mathbb{Q})$.

On retiendra surtout de cette classification qu'à toute A-orbite compacte on peut associer deux données essentielles : *son volume V et son discriminant D*. Le volume est par définition le volume A-invariant naturel pour un choix de mesure de Haar sur A fixé une fois pour toutes. Dans l'identification ci-dessus, le volume est le régulateur $reg(\mathcal{O}_L)$ de l'ordre $\mathcal{O}_L$, c'est-à-dire le co-volume de $\sigma(\mathcal{O}_L^\times)$ après le plongement habituel dans l'hyperplan de $\mathbb{R}^d$ formé des points de coordonnées à somme nulle via l'application $\log|\cdot|$. Le discriminant de l'orbite est par définition le discriminant $disc(\mathcal{O}_L)$ de l'ordre associé. C'est une quantité arithmétique associée à l'orbite, en particulier c'est un entier. Dans l'identification ci-dessus le discriminant correspond, à un facteur multiplicatif fixe près, au co-volume de $\mathfrak{t}_{\mathbb{Q}} \cap M_d(\mathbb{Z})$ dans $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{t}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ pour la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ associée à la structure euclidienne standard sur $M_d(\mathbb{R})$.

Discriminant et volume sont liés par la relation fondamentale suivante :

Proposition 2.2 ([22]). — *On fixe $d \geq 2$. Il existe une constante $C = C(d) > 0$ telle que pour toute union Y de A-orbites compactes de même discriminant D*

$$\log D \ll vol(Y) \ll D^C$$

où $\ll$ signifie comme d'habitude une inégalité à des constantes multiplicatives près (dépendant de d seulement).

Comme le volume d'une A-orbite est uniformément minoré (rayon d'injectivité minoré), on en déduit que le nombre de A-orbites compactes de volume (ou discriminant) borné est fini (un fait établi précédemment dans [54]). Plus précisément on montre :

Proposition 2.3 ([22]). — 1) *Le nombre $N(D)$ de A-orbites compactes de discriminant au plus D vérifie $D^\alpha \ll N(D) \ll D^\beta$ pour des constantes $\alpha, \beta > 0$.*

2) *Si d est premier, le nombre $N(V)$ de A-orbites compactes de volume au plus V vérifie $V^{1/(d-1)} \ll \log N(V) \ll V^{1/(d-1)}$.*

3) *Le volume d'une A-orbite compacte de discriminant D est $\ll_\varepsilon D^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ et le volume total des A-orbites compactes de même déterminant D est $\gg_\varepsilon D^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$.*

Disons quelques mots sur ces estimées. La borne supérieure dans 1) résulte de la proposition 2.2 et de la remarque qui la suit. Pour la borne inférieure, il suffit d'exhiber suffisamment d'orbites compactes de petit discriminant ; l'exemple de Cassels donné à la fin de la section 3 est à cet égard suffisant car il exhibe n orbites distinctes de discriminant au plus $n^{d(d-1)}$. Pour la borne supérieure de 2) remarquons que, si d est premier, il n'y a pas de corps intermédiaire entre $\mathbb{Q}$ et K et on peut alors améliorer la borne inférieure de la proposition 2.2 comme suit $vol(Y) \gg (\log D)^{d-1}$. Cette dernière minoration du volume résulte par le théorème de Minkowski sur les corps convexes de ce que $\log ||\sigma(x)|| \geq O(\log D)$ pour toute unité x du corps K associé à Y. Et cette dernière borne est la conséquence du fait que le $\mathbb{Z}$-module engendré par $1, x, ..., x^{d-1}$ est d'indice fini dans $\mathcal{O}_K$ car $\mathbb{Q}(x) = K$. La borne inférieure du 2) résulte aussi de l'exemple de Cassels. Le 3) en revanche est une conséquence de l'estimation du volume d'un paquet d'orbite (voir §6 ci-dessous) par le théorème de Brauer-Siegel.

Le point le plus délicat est certainement la borne supérieure dans la proposition 2.2. Intuitivement elle résulte du fait que deux orbites distinctes de discriminant au plus D ne peuvent s'approcher trop près l'une de l'autre. Plus précisément on a le :

Lemme 2.4 (isolation des orbites compactes [22]). — *Il existe une constante $c = c(d) > 0$ telle que si g_1 et g_2 sont deux éléments de G vérifiant $g_1 A \neq g_2 A$, $||g_i|| \leq R$ $i = 1, 2$ et si les A-orbites $\Gamma \backslash \Gamma g_i A$ sont toutes deux compactes et de discriminant au plus D, alors $d(g_1, g_2) \geq (RD)^{-c}$.*

Ici d est une métrique riemannienne invariante à gauche sur G. Comme une A-orbite compacte de discriminant au plus D ne peut s'aventurer trop loin vers l'infini (cf. proposition 3.1) on conclut de l'énoncé précédent que les A-orbites compactes de discriminant au plus D sont $D^{-O_d(1)}$-isolées les unes des autres, i.e. les $D^{-O_d(1)}$-voisinages tubulaires autour d'elles sont disjoints, ce qui fournit immédiatement la borne supérieure dans la proposition 2.2 par la finitude du volume de $\Gamma \backslash G$. Le lemme 2.4 est aussi le point clé pour montrer le principe de Linnik (cf. proposition 1.4 ci-dessus et 5.2 ci-dessous).

3. FUITE DE MASSE

Pour une A-orbite compacte, le fait d'aller plus ou moins loin à l'infini se traduit aisément en termes de l'ordre associé. Appelons Ω_ε l'ensemble des réseaux Λ de Ω dont la systole $\delta(\Lambda) = \inf\{||v||, v \in \Lambda \backslash \{0\}\}$ est $\leq \varepsilon^{\frac{1}{d}}$. Rappelons que d'après le critère de Mahler (voir [5]) les Ω_ε, $\varepsilon > 0$, forment une base de voisinages de l'infini dans Ω.

Proposition 3.1. — *On considère la A-orbite compacte associée à $(K, [L], \sigma)$ et D son discriminant (voir §2).*

a) *Elle rencontre Ω_ε si et seulement si $\exists x \in L$ tel que $N_{K|\mathbb{Q}}(x) \leq \varepsilon \cdot covol_{\mathbb{R}^d}(\sigma(L))$.*

b) *Si $\varepsilon < D^{-\frac{1}{2}}$ alors elle ne rencontre pas Ω_ε.*

Preuve : En effet dire que $N_{K|\mathbb{Q}}(x) \leq \varepsilon \cdot covol_{\mathbb{R}^d}(\sigma(L))$ revient à dire que le réseau renormalisé de covolume 1 associé possède un vecteur non-nul dont le produit des coordonnées est au plus ε, si bien que quitte à appliquer un élément de A on a bien un vecteur de norme au plus $\varepsilon^{\frac{1}{d}}$. Pour le *b*) noter que $x\mathcal{O}_L \subseteq L$ pour tout $x \in L$ et donc que $N_{K|\mathbb{Q}}(x) D^{\frac{1}{2}} \geq covol_{\mathbb{R}^d}(\sigma(L))$. *CQFD.*

Le théorème suivant montre qu'il est nécessaire de grouper les A-orbites compactes si on souhaite avoir de l'équidistribution. Une orbite individuelle peut très bien avoir un comportement pathologique du point de vue de l'équidistribution : il peut y avoir fuite de masse à l'infini dans l'espace des réseaux.

Théorème 3.2 (Fuite de masse individuelle). — *On fixe $d \geq 2$. Il existe une suite de A-orbites compactes Y_n telles que pour tout compact C de Ω on ait $\mu_{Y_n}(C) \to 0$ pour n assez grand.*

Lorsque $d = 2$ ce phénomène est facile à mettre en évidence grâce au codage markovien : il existe des géodésiques fermées dans la surface modulaire qui passent une proportion négligeable de leur vie dans toute partie compacte fixée. En effet, le codage symbolique du flot géodésique permet aisément de construire de telles géodésiques : il suffit de considérer une géodésique du demi-plan de Poincaré dont le codage dans la triangulation de Farey est périodique de la forme $...DG^nDG^nDG^nD...$, c'est-à-dire que cette géodésique laisse la pointe n fois sur sa gauche (G) avant de la laisser une fois sur sa droite (D) puis de recommencer ad libitum. Les points limites de cette géodésique sont les nombres quadratiques ξ_- et ξ_+ dont le développement en fractions continues est donné par $\xi_+ = [n, 1, n, 1, ...]$ et $-1/\xi_- = [1, n, 1, n, ...]$. Quand n devient très grand, on constate aisément qu'une telle géodésique fermée passe une fraction $1 - \varepsilon$ de son temps à distance au moins $\varepsilon \log n$ d'une origine fixe dans la surface. En particulier toute la masse s'échappe à l'infini : la mesure de probabilité uniforme sur la géodésique converge vers la masse de Dirac en l'infini. Pour une explication de ce codage via la triangulation de Farey et du lien avec les fractions continues, on renvoie le lecteur à l'article [67].

On remarquera que, dans cet exemple de géodésique non équirépartie ci-dessus en dimension 2, le discriminant de l'orbite compacte est égal à $D = n(n + 4)$, tandis que la longueur de l'orbite est $2\log \lambda_D$ où $\lambda_D = \frac{n+2+\sqrt{D}}{2}$, c'est-à-dire que le volume (ici la longueur) de l'orbite est comparable au logarithme du discriminant. Cela veut dire que le volume de l'orbite est petit : il est proche de la borne inférieure de l'encadrement (2.2). Le contenu de la conjecture 1.3 est que ce phénomène est le seul obstacle à l'équidistribution. Selon ce principe, les orbites mal équiréparties auraient un petit volume par rapport au discriminant et plus le volume de l'orbite est gros, plus l'orbite aurait de chance d'être bien équirépartie.

3.1. Exemple de Cassels

Montrons le théorème 3.2. Il est en fait dû à Cassels[(1)] qui construit dans [8] une suite de corps totalement réels dont le régulateur est petit par rapport au discriminant. Décrivons son exemple. On fixe $a_1 < a_2 < ... < a_d$ des entiers positifs non nuls. Pour tout entier $n > 0$, on définit $P_n \in \mathbb{Z}[t]$ par $P_n(t) - 1 = \Pi_{1 \leq i \leq d}(t - na_i)$. On vérifie aisément que P_n est irréductible sur $\mathbb{Q}$ et que le corps $K_n = \mathbb{Q}(\theta)$ engendré par une racine est totalement réel. Aussi on voit que, lorsque n est grand, les conjugués de Galois de θ sont très proches des na_i. Il en résulte que son discriminant est de l'ordre de $n^{d(d-1)}$. Mais l'équation $\Pi_{1 \leq i \leq d}(\theta - na_i) = 1$ montre que chaque $\theta - na_i$ est une unité de K_n. On vérifie aisément qu'elle engendre un sous-groupe $\mathcal{U}$ de rang $d - 1$ dans le groupe des unités de K_n. Ainsi le régulateur de K_n est un $O((\log n)^{d-1})$.

(1) Je remercie Uri Shapira et Elon Lindenstrauss pour m'avoir signalé cet exemple et l'article [8].

On considère maintenant l'orbite compacte associée au réseau $L = \mathbb{Z}[\theta]$ de K_n. On a $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}_L^\times$ et $disc(L) \simeq n^{d(d-1)}$. D'après le critère de Mahler (voir [5]) montrer qu'il y a fuite de masse ou plus précisément que toute la masse part à l'infini revient à vérifier que pour un ensemble de $a \in A$ mod $\mathcal{U}$ de mesure presque totale le réseau aL possède un petit vecteur, i.e. de norme $o(disc(L)^{1/2})$. C'est bien le cas car si $a = diag(\Pi_{1\leq i\leq d}(\sigma_j(\theta) - na_i)^{r_i})_j$ avec $r_i \in \mathbb{R}$ avec $\sum r_i = 1$ et si v est le vecteur de L correspondant à $1 \in K_n$ alors la norme de av est un $o(n^{(d-1)/2})$ dès que les r_i vérifient le système d'inégalités $\left|\sum_{j\neq i} r_j - (d-1)r_i\right| < \frac{d-1}{2}$. Mais cette région de l'hyperplan $\sum r_i = 1$ est de volume 1 modulo $\mathbb{Z}^d$, ce qui termine la preuve. Dans [22] les auteurs utilisent une construction similaire due à Duke.

Une question intéressante – pour $d \geq 3$ – est de déterminer si la fuite de masse peut aussi s'opérer vers d'autres orbites compactes, au lieu de l'infini, ou bien les deux à la fois. En particulier, une valeur d'adhérence de μ_{Y_n} peut-elle être non ergodique ?

4. DYNAMIQUE DES FLOTS DIAGONAUX DANS Ω : ADHÉRENCES D'ORBITES ET CLASSIFICATION TOPOLOGIQUE

Peut-être la plus frappante des conjectures concernant les orbites du flot diagonal est la conjecture de Margulis ([45]) :

Conjecture 4.1 (Margulis). — *On fixe $d \geq 3$. Tout compact A-invariant de Ω est une réunion de A-orbites compactes.*

Notons que cet énoncé équivaut à demander que toute A-orbite bornée soit compacte. Remarquons d'autre part qu'il ne conclut pas qu'il s'agit d'une réunion *finie* d'orbites, néanmoins nous verrons plus bas (théorème d'isolation) que ce n'est qu'une apparence : la conjecture 4.1 entraîne bien que tout compact A-invariant est une réunion finie de A-orbites compactes.

Dans [45], Margulis explique aussi comment une réponse positive à cette conjecture entraînerait une réponse positive à la célèbre conjecture de Littlewood :

Conjecture 4.2 (Littlewood). — *Pour tous réels a et b on a*

$$\lim \inf_{n\to+\infty} n \cdot ||na|| \cdot ||nb|| = 0,$$

où $||x||$ désigne la distance à l'entier le plus proche.

Expliquons brièvement quel est le raisonnement de Margulis (voir [45]) pour passer de la conjecture (4.1) à la conjecture (4.2). En fait, comme Margulis l'a découvert a posteriori, ce raisonnement était déjà présent, bien que formulé différemment, dans un article des années 50 de Cassels et Swinnerton-Dyer [9]. Bien que ses auteurs n'aient pas employé ce langage dynamique, cet article est l'un des tout premiers à aborder la question des orbites du sous-groupe diagonal dans l'espace des réseaux Ω. On pose $F(x, y, z) = x(ax + y)(bx + z)$. C'est une forme cubique ; $F = F_0 \circ u_{a,b}$ où

$F_0(x,y,z) = xyz$ et $(x,y,z)\cdot u_{a,b} = (x, y+ax, z+bx)$ est une matrice unipotente de $SL_3(\mathbb{R})$. Le stabilisateur $\{g \in SL_3(\mathbb{R}), F_0 \circ g = F_0\}$ est le tore diagonal A. Ainsi $F(\mathbb{Z}^3) = F_0(\Delta \cdot A)$ où Δ est le réseau $\mathbb{Z}^3 \cdot u_{a,b}$.

Notons qu'on a toujours $F(0) = 0$ et que par conséquent (critère de Mahler) la A-orbite $\Delta \cdot A$ est non bornée. Toutefois, si le couple (a,b) est une exception à la conjecture (4.2), alors $F(\mathbb{Z}^3)$ ne contient pas 0 comme point d'accumulation et donc $\Delta \cdot A$ n'est pas dense dans Ω, mieux l'orbite *du cône positif* $A^+ = \{diag(e^{-(t+s)}, e^t, e^s), t,s > 0\}$, i.e. $\Delta \cdot A^+$ est bornée. Ceci permet de construire une vraie A-orbite bornée : il suffit en effet de considérer un point d'accumulation disons Δ_∞ de $\Delta \cdot A^+$ pour avoir que $\Delta_\infty \cdot A$ est bornée. Si l'on croit à la conjecture 4.1, alors cette orbite doit être compacte. On va en déduire que l'orbite de départ, à savoir $\Delta \cdot A$ est aussi compacte ; ce sera une contradiction car par la remarque faite ci-dessus (F représente 0), cette orbite n'est pas compacte. Cette déduction est aujourd'hui appelée *théorème d'isolation* et peut se formuler comme suit :

Théorème 4.3 (Théorème d'isolation). — *On fixe $d = 3$. Soit $\Delta \cdot A$ une A-orbite dans Ω. Supposons que l'adhérence $\overline{\Delta \cdot A}$ contienne une A-orbite compacte. Alors soit $\overline{\Delta \cdot A} = \Omega$ soit $\overline{\Delta \cdot A} = \Delta \cdot A$.*

La preuve moderne de ce théorème consiste à montrer que si $\Delta \cdot A$ possède un point d'accumulation situé sur une A-orbite compacte, alors $\overline{\Delta \cdot A}$ est invariant par un sous-groupe strictement plus gros que A qui contient notamment un sous-groupe à un paramètre unipotent, et de conclure par le théorème de Ratner que $\overline{\Delta \cdot A} = \Omega$. Ce type d'argument de dérive qui permet d'obtenir une invariance supplémentaire dans une direction transverse au flot est omniprésent tant dans la preuve originale de la conjecture d'Oppenheim par Margulis que dans l'œuvre de Ratner(2).

Expliquons succinctement cette mécanique : si $\Delta \cdot a_n \to \Delta_0$ avec $\Delta_0 \cdot A$ compacte et distincte de $A \cdot \Delta$, alors on peut écrire pour chaque n grand $\Delta \cdot a_n = \Delta_0 \cdot g$ avec $g \notin A$ très proche de 1. On décompose g sous la forme $g^{-1} = au^+u^-$ avec $a \in A$ et u^+ et u^- des matrices unipotentes (respectivement triangulaires supérieure et inférieure) très proches de 1 avec disons u^- petit mais non trivial. Le groupe diagonal A normalise les groupes U^+ et U^- et les contracte (resp. dilate) : on peut ainsi trouver un grand élément $b \in A$ qui contracte u^+ (tout en dilatant u^-) de sorte que $u_b^+ := bu^+b^{-1}$ soit extrêmement proche de 1 tandis que $u_b^- := bu^-b^{-1}$ lui atteint une taille macroscopique. Finalement puisque $\Delta_0 \cdot bu_b^- u_b^+ \in \Delta \cdot A$ et que $\Delta_0 \cdot A$ est compact, on obtient à la limite (quand $n \uparrow +\infty$) un élément $u_\infty^- \in U^- \backslash \{1\}$ tel que $\Delta_0 \cdot u_\infty^- \in \overline{\Delta \cdot A}$ puis, en faisant agir A à nouveau, on constate que $\overline{\Delta \cdot A}$ contient en fait toute l'orbite du sous-groupe à un paramètre U qui contient u_∞^-. On peut donc appliquer Ratner !

(2) Signalons à ce propos que Einsiedler a récemment donné dans [17] une preuve simplifiée du théorème de Ratner dans le cas particulier de l'action d'un sous-groupe semi-simple : la propriété de réductibilité complète d'un groupe semi-simple simplifie grandement l'argument de dérive !

Par Ratner $\overline{\Delta \cdot A}$ contient maintenant une orbite fermée $\Delta_0 \cdot H$ de H-volume invariant fini où H est un sous-groupe fermé normalisé par A. On conclut que $\Delta_0 \cdot AH$ est aussi fermée de AH-covolume fini. À ce stade on n'a plus que deux possibilités pour AH : soit c'est $G = SL_3(\mathbb{R})$ tout entier, soit c'est un sous-groupe localement isomorphe à $GL_2(\mathbb{R})$. Pour se débarrasser de ce dernier cas, il faut utiliser une propriété particulière de $SL_3(\mathbb{Z})$ qui n'est pas partagée par tous les réseaux de $SL_3(\mathbb{R})$: les éléments semi-simples d'ordre infini de $SL_3(\mathbb{Z})$ sont réguliers, or un réseau dans $GL_2(\mathbb{R})$ intersecte le centre non trivialement, donc contient un élément non régulier, i.e. avec deux valeurs propres identiques. On conclut que $AH = SL_3(\mathbb{R})$ et que $\overline{\Delta \cdot A} = \Omega$.

Cet argument, du moins la première partie, semble marcher aussi sur $SL_2(\mathbb{R})$: en fait on a triché au moment de passer de $\Delta_0 \cdot u_\infty^-$ à toute une orbite unipotente contenue dans $\overline{\Delta \cdot A}$. Pour cela il nous fallait faire agir à nouveau par un élément $a \in A$ *qui fixe* Δ_0 de sorte que $\{a^k u_\infty^- a^{-k}, k \in \mathbb{Z}\}$ soit dense dans U et ceci ne peut être réalisé sur $SL_2(\mathbb{R})$ car cette orbite est toujours discrète dans ce cas. Pour les détails de cette preuve ainsi qu'une généralisation de ce théorème d'isolation en dimension supérieure, on renvoie à l'article de Lindenstrauss et Weiss [43] : en général il est nécessaire de prendre en compte d'autres sous-groupes intermédiaires entre A et G (l'énoncé précédent reste vrai cependant si la dimension d est un nombre premier). Notons finalement que, dans l'argument ci-dessus, on peut remplacer $\overline{\Delta \cdot A}$ par n'importe quel fermé A-invariant F s'accumulant sur une A-orbite compacte : la conclusion est que soit $F = \Omega$ soit F est une réunion finie d'orbites compactes. En particulier on voit qu'étant donnée une A-orbite compacte $\Delta_0 \cdot A$ toute autre A-orbite compacte qui s'approche très près de $\Delta_0 \cdot A$ doit partir très loin à l'infini dans Ω : cela justifie le terme d'*isolation* pour désigner ce théorème. La conjecture 4.1 entraîne donc

Conjecture 4.4. — *On fixe $d \geq 3$. Etant donné un compact K de Ω, il n'existe qu'un nombre fini de A-orbites compactes contenues dans K.*

Cette propriété particulière de $SL_3(\mathbb{Z})$ de ne pas posséder d'éléments non réguliers est claire : les valeurs propres d'un élément de $SL_3(\mathbb{Z})$ sont des unités algébriques dont le produit vaut 1 et si deux d'entre elles sont égales alors le polynôme caractéristique n'est pas irréductible sur $\mathbb{Q}$ et possède ainsi une racine dans $\mathbb{Q}$ qui est donc ± 1, ce qui force ± 1 et $\pm i$ pour les autres racines et on a donc affaire à un élément d'ordre fini.

Comme Mary Rees l'a mis en évidence pour la première fois dans ce contexte dynamique, on peut néanmoins construire des exemples de réseaux Γ de $G = SL_3(\mathbb{R})$ pour lesquels cette propriété n'est pas vérifiée, c'est-à-dire qu'il existe un $\gamma_0 \in \Gamma$ non régulier semi-simple d'ordre infini. L'existence de ces exemples est problématique de plusieurs points de vue. Dans l'exemple de Rees le centralisateur H de γ_0 dans G est localement isomorphe à $GL_2(\mathbb{R})$ et $H \cap \Gamma$ est un réseau de H ; ainsi $\Gamma \backslash \Gamma H$, qui est une sous-variété fermée de $\Gamma \backslash G$, est aussi un fibré en cercles au-dessus de $\Gamma \backslash \Gamma H_0$, qui est un quotient de volume fini de $H_0 \simeq SL_2(\mathbb{R})$. L'action de A est le produit d'une action isométrique dans la fibre et du flot géodésique sur $\Gamma \backslash \Gamma H_0$. Ainsi toutes les pathologies du flot géodésique de $SL_2(\mathbb{R})$ apparaissent dans ce contexte. En particulier dans un tel espace $\Gamma\backslash G$ il y a pléthore de compacts A-invariants irréguliers : des fibrés en cercles de compacts irréguliers invariants par le flot géodésique sur la surface hyperbolique plongée ; ces compacts donnent aussi lieu à des mesures A-invariantes irrégulières et qui ont même entropie positive au moins pour des directions de A transverses aux fibres. On renvoie le lecteur à la section 9 de l'article de Einsiedler et Katok [18] pour une description détaillée de ces exemples.

En résumé, ces exemples démontrent que toute généralisation hâtive de la conjecture 4.1 ci-dessus est vouée à l'échec. Margulis avait donc proposé dans [46] un énoncé conjectural, décrivant l'adhérence dans $\Gamma\backslash G$ des orbites d'un sous-groupe fermé de G, énoncé qui englobait à la fois le théorème de Ratner et les orbites des flots diagonaux tout en tenant compte de la présence de ces exemples à la Rees. Malheureusement même cet énoncé s'est avéré insuffisant : Maucourant a en effet construit dans [49] un nouvel exemple non algébrique d'adhérence d'orbite. Pour $G = SL_3(\mathbb{R}) \times SL_3(\mathbb{R})$ et $\Gamma = SL_3(\mathbb{Z}) \times SL_3(\mathbb{Z})$ il considère l'orbite par le sous-groupe de codimension un A_1 de $A \times A = \mathbb{R}^{*2} \times \mathbb{R}^{*2}$ défini par $\lambda_1/\lambda_3 = \mu_3/\mu_1$ (où $diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ et $diag(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ sont les deux composantes du tore diagonal) du point $p := (\Delta_0 \cdot u, \Delta_0 \cdot u)$ où $u = u(1)$ est un élément unipotent non trivial du sous-groupe racinaire $\{u(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ associé à la racine $\lambda_1 - \lambda_3$ (coin supérieur droit) et où Δ_0 est un réseau dont la A-orbite est compacte. Vu le choix de A_1, il est clair que $p\cdot A_1$ évite l'ensemble $C^c \times C^c$ où C^c est le complémentaire du voisinage compact $C = \Delta_0 \cdot A\{u(t)\}_{t\in[0,1]}$ de l'orbite compacte $\Delta_0 \cdot A$. Ainsi $p\cdot A_1$ n'est pas dense et Maucourant vérifie, en utilisant le théorème d'isolation de Lindenstrauss et Weiss, qu'elle n'est pas non plus algébrique.

Dans cet exemple de Maucourant, le groupe A_1 n'est pas le tore maximal. Tout récemment Shapira [69] a construit un autre exemple surprenant dans $\Omega = SL_3(\mathbb{Z})\backslash SL_3(\mathbb{R})$ cette fois-ci et avec le tore diagonal maximal A :

Théorème 4.5 (Shapira [69]). — *Soit $d = 3$. Il existe un réseau unimodulaire $\Delta_0 \in \Omega$ dont la A-orbite n'est pas dense et n'est pas contenue dans un sous-espace homogène fermé propre de Ω.*

Le réseau dans l'exemple de Shapira peut être pris simplement de la forme $\Delta_0 = \mathbb{Z}^3 \cdot u_{a,a}$ (on rappelle la notation $u_{a,b} : (x, y, z) \mapsto (x, y + ax, z + bx)$). Sa méthode consiste à étudier le « minimum inhomogène » $\mu(\Delta) := \sup_{y\in\mathbb{R}^3} \inf_{v\in\Delta} F_0(v + y)$ où F_0 est la forme cubique $F_0(x, y, z) = xyz$ et à vérifier que pour ces exemples $\mu(\Delta_0) > 0$. Mais une adaptation de la preuve du théorème d'isolation lui permet d'établir que $\mu(\Delta) = 0$ dès que $\overline{\Delta \cdot A}$ contient une orbite compacte, en particulier dès que $\Delta \cdot A$ est dense. Cela prouve la non-densité ; pour obtenir la seconde assertion, il faut faire varier a et tirer parti du fait qu'il n'y a qu'un nombre dénombrable de sous-espaces homogènes fermés.

Dans l'exemple de Cassels décrit au paragraphe précédent, la suite de A-orbites compactes s'accumule sur la A-orbite (fermée mais non compacte) de $\mathbb{Z}^d$. Ainsi il peut exister des fermés A-invariants non algébriques de Ω qui contiennent une infinité de A-orbites compactes.

Pour une description des A-orbites fermées (compactes ou non) voir l'article de Tomanov et Weiss [71] où il est montré entre autres qu'une A-orbite est fermée si et seulement si c'est la translatée de l'orbite d'un $\mathbb{Q}$-tore et à l'article de Tomanov [70] pour le cas S-arithmétique et l'application concrète suivante : si $f = l_1 \cdot \ldots \cdot l_k$ est un produit de $k \leq d$ formes linéaires reélles linéairement indépendantes tel que $f(\mathbb{Z}^d)$ soit discret dans $\mathbb{R}$, alors f est proportionnel à un polynôme à coefficients entiers. Dans l'appendice de [71], on trouve aussi une preuve due à Margulis de la propriété structurelle importante suivante :

Proposition 4.6. — *Il existe un compact C de Ω qui rencontre toutes les A-orbites.*

La preuve de ce résultat est basée sur le critère de Mahler et un très joli jeu d'élimination des petits vecteurs d'un réseau qui rappelle le fameux lemme de Kazhdan et Margulis ([58] Chapitre 8).

5. DYNAMIQUE DES FLOTS DIAGONAUX DANS Ω : CLASSIFICATION DES MESURES INVARIANTES, CONDITION D'ENTROPIE POSITIVE ET PRINCIPE DE LINNIK

Comme dans le théorème de Ratner, qui classifiait d'abord les mesures invariantes par un flot unipotent et ensuite les fermés invariants, on s'attend à ce que les mesures A-invariantes soient plus faciles à décrire que les fermés A-invariants. Par exemple, considérons dans $\Omega = \Gamma\backslash G$ pour $d = 3$ l'orbite $\Delta \cdot A$ d'un réseau Δ qui intersecte $\mathbb{Z}^2$ en un réseau $\Delta_{\mathbb{Z}^2}$ dont l'orbite par le flot diagonal (la partie de A qui préserve $\mathbb{R}^2$) est irrégulière dans $SL_2(\mathbb{Z})\backslash SL_2(\mathbb{R})$. Alors $\Delta \cdot A$ est irrégulière, mais en raison de la récurrence de Poincaré (il y a un sous-groupe $\{a_t\}_t$ de A tel que $\Delta \cdot A \to \infty$), celle-ci ne supporte aucune mesure A-invariante finie.

La conjecture suivante est formulée par Margulis dans ([46]) et précisée par Lindenstrauss dans ([41]). Disons que l'orbite $\Delta \cdot A$ a « un facteur de rang 1 » s'il existe un sous-groupe fermé F de G contenant A et un morphisme surjectif de groupes de Lie $F \xrightarrow{\phi} L$ vers un groupe de Lie L tel que $\Delta \cdot F$ soit fermé, $\phi(F_\Delta)$ soit fermé – où $F_\Delta = \{f \in F, \Delta \cdot f = \Delta\}$ – et $\phi(A)$ soit un groupe à un paramètre non Ad-unipotent de L.

Conjecture 5.1. — *Soit μ une mesure de probabilité A-invariante et A-ergodique sur $\Omega = \Gamma\backslash G$. Supposons que pour μ-presque tout $\Delta \in \Omega$ l'orbite $\Delta \cdot A$ n'a pas de facteur de rang 1. Alors μ est algébrique – i.e. est la mesure de Haar normalisée d'un sous-espace homogène de Ω.*

Notons que lorsque $d = 3$ et $\Gamma = SL_3(\mathbb{Z})$ la condition d'absence d'orbite avec facteur de rang 1 est toujours satisfaite. Les exemples de Rees mentionnés ci-dessus démontrent que ce proviso est néanmoins nécessaire en dimension plus grande ou pour d'autres réseaux.

D'un certain point de vue, cette conjecture est l'analogue pour l'espace des réseaux de la célèbre conjecture de Furstenberg : toute mesure de probabilité non atomique sur le cercle invariante par la multiplication par 2 et par la multiplication par 3 est-elle égale à la mesure de Lebesgue ? Rudolph [65] a démontré la conjecture de Furstenberg sous l'hypothèse supplémentaire que la mesure a de l'entropie positive par rapport à la multiplication par 2, disons. De façon analogue, le théorème de Einsiedler-Katok-Lindenstrauss, théorème 1.1 ci-dessus, répond à la conjecture 5.1 sous l'hypothèse supplémentaire d'entropie positive par rapport à une direction du groupe diagonal A.

La preuve de Einsiedler-Katok-Lindenstrauss est basée sur deux méthodes de natures assez distinctes. La première, dite de haute entropie, tire ses origines dans les articles de Katok-Spatzier [37] et Einsiedler-Katok [18]. L'idée maîtresse consiste à tirer parti du fait que le système dynamique (Ω, A, μ) est partiellement hyperbolique et possède un feuilletage stable et instable correspondant aux orbites des groupes racinaires unipotents normalisés par A : on peut alors découper μ en tranches le long de ces feuilletages, c'est-à-dire étudier les mesures conditionnelles (d'une certaine façon c'est là que réside le principal avantage des mesures par rapport aux fermés : on peut mieux les découper). A chaque sous-groupe racinaire unipotent est associée une famille de mesures conditionnelles aussi appelées « mesures de feuille » – *leafwise measures* – et l'entropie totale de la mesure se scinde en contributions distinctes propres aux différentes feuilles (formule de Ledrappier-Young [40]). En particulier une condition plus ou moins forte d'entropie positive sur μ pour un élément $a \in A$ entraîne que les mesures de feuille associées à un nombre plus ou moins grand de racines sont non atomiques. La méthode de [18] permet de montrer que, si les mesures de feuille associées à toutes les racines de G sont non atomiques, alors μ est invariante par rapport à tous les sous-groupes racinaires et donc est G-invariante. Dans son travail sur la conjecture d'unique ergodicité quantique Elon Lindenstrauss [42] a mis en œuvre une autre méthode, dite de basse entropie, dont l'analogue dans notre contexte permet d'obtenir la même conclusion en supposant seulement que les mesures de feuille sont non atomiques pour un certain nombre de racines (quand $d = 3$ une suffit). Sa méthode est inspirée de la preuve de Host [36] du théorème de Rudolph qui utilise la récurrence comme substitut à l'entropie positive, ainsi que de plusieurs arguments introduits par Ratner dans son étude des flots unipotents [59], [60], [61], [62]. Nous n'en dirons pas davantage sur ces travaux remarquables et renvoyons le lecteur aux articles originaux et aux nombreux survols écrits sur le sujet, notamment [21], [3], [73].

5.1. Rappels sur l'entropie[3]

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré muni d'une mesure de probabilité μ. Soit T une transformation mesurable de X qui préserve la mesure μ. Soit $\mathcal{P}$ une partition finie de X en parties mesurables appelées atomes de $\mathcal{P}$. L'entropie de la partition $\mathcal{P}$ est par définition

$$H_\mu(\mathcal{P}) = \sum_{C \in \mathcal{P}} -\mu(C) \log \mu(C).$$

On note $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ le joint de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, i.e. la partition obtenue en prenant les intersections des parties de $\mathcal{P}$ avec celles de $\mathcal{Q}$. On note $[x]_\mathcal{P}$ l'atome de $x \in X$ pour $\mathcal{P}$, i.e. l'élément C de la partition $\mathcal{P}$ qui contient x. Aussi $T^{-1}\mathcal{P}$ est la partition $\{T^{-1}C\}_{C \in \mathcal{P}}$. On définit l'entropie de T par rapport à $\mathcal{P}$ comme la limite

$$h_\mu(T, \mathcal{P}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\vee_0^{n-1} T^{-k}\mathcal{P}),$$

et l'entropie de T comme le supremum $h_\mu(T)$ des $h_\mu(T, \mathcal{P})$ où $\mathcal{P}$ varie parmi toutes les partitions mesurables finies de X. Les propriétés de base de l'entropie dont nous aurons besoin sont les suivantes :

1) La sous-additivité : $H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \leq H_\mu(\mathcal{P}) + H_\mu(\mathcal{Q})$.

2) L'invariance : $H_\mu(T^{-1}\mathcal{P}) = H_\mu(\mathcal{P})$.

3) La génération : si $\left\{T^{-k}\mathcal{P}\right\}_{k \geq 0}$ engendre la tribu $\mathcal{B}$ alors $h_\mu(T) = h_\mu(T, \mathcal{P})$.

4) La décomposition ergodique : si $\mu = \int_\Xi \mu_\xi d\nu(\xi)$ est une décomposition de μ en composantes ergodiques pour T, alors $h_\mu(T) = \int_\Xi h_{\mu_\xi}(T) d\nu(\xi)$.

5.2. Principe de Linnik

Donnons maintenant l'idée de la démonstration de la proposition 1.4 de l'introduction. Il s'agit d'établir une borne inférieure sur l'entropie de toute mesure limite μ_∞. Modulo quelques difficultés purement techniques dues au fait que l'on travaille dans un espace non compact $\Gamma\backslash G$, il se trouve que moyennant la définition et les propriétés de base de l'entropie rappelées ci-dessus cette borne inférieure résulte presque directement de la séparation des A-orbites compactes de discriminant au plus D (proposition 2.4 ci-dessus).

En effet donnons l'argument en substance. Soit $a \in A$ un élément régulier. Si $\mathcal{P}$ est une partition finie de $X = \Omega = \Gamma\backslash G$, on va s'intéresser à $\mathcal{P}^m := \vee_{-m}^m T_a^k \mathcal{P}$ où T_a est la translation à droite par a. Le point clé est que notre système dynamique est partiellement hyperbolique : T_a contracte exponentiellement une partie de l'espace tangent $\mathfrak{g}^+$ (correspondant à la somme des espaces propres des racines positives $\sum_{\alpha>0} \mathfrak{g}_\alpha$), dilate $\mathfrak{g}^- = \sum_{\alpha<0} \mathfrak{g}_\alpha$ et laisse inchangée la direction du tore $Lie(A) = \mathfrak{g}_0$. Ainsi (et c'est là que quelques difficultés techniques apparaissent liées à la non-compacité de $\Gamma\backslash G$) lorsque m est grand les atomes de $\mathcal{P}^m$ sont inclus dans des $e^{-\kappa m}$-voisinages de morceaux de taille

(3) Voir le livre de Einsiedler et Ward [25].

fixe (i.e. de A-volume borné) de A-orbites, où $\kappa > 0$ mesure le coefficient de contraction/dilatation de T_a, coefficient qui dépend de la distance de a aux murs de la chambre de Weyl, i.e. à la plus petite valeur de $|\alpha(a)|$ pour α une racine (ici, différence entre deux valeurs propres de a).

Rappelons maintenant le lemme 2.4 de séparation des orbites : les orbites dans le support de μ_n sont D_n^{-c}-séparées. Choisissons m de sorte que $e^{-\kappa m} \approx D_n^{-c}$. Il résulte que chaque atome $[x]_{\mathcal{P}^m}$ de $\mathcal{P}^m$ intersecte au plus une orbite compacte présente dans la réunion d'orbites Y_n et donc vérifie $\mu_n([x]_{\mathcal{P}^m}) = O(vol(Y_n)^{-1}) = O(D_n^{-\rho})$. Par suite $H_{\mu_n}(\mathcal{P}^m) \geq \rho \log D_n \approx \rho\frac{\kappa}{c}m$. Maintenant, par sous-additivité et invariance de l'entropie, $H_{\mu_n}(\mathcal{P}^m) \leq (2m+1) \cdot H_{\mu_n}(\mathcal{P})$ et $H_{\mu_n}(\mathcal{P}) \geq 2\rho\frac{\kappa}{c}$. Faisant tendre n vers l'infini on obtient $H_{\mu_\infty}(\mathcal{P}) \geq 2\rho\frac{\kappa}{c}$. Mais ce raisonnement peut être répété verbatim avec $\mathcal{P}^p$ pour un entier $p \in \mathbb{N}$ à la place de $\mathcal{P}$. On obtient alors $H_{\mu_\infty}(\mathcal{P}^p) \geq 2\rho\frac{\kappa}{c}p$, et en faisant tendre p vers l'infini, $h_{\mu_\infty}(T_a) \geq 2\rho\frac{k}{c}$. *CQFD.*

6. PAQUETS ET FORMULATION ADÉLIQUE

Lorsque $d = 2$, l'étude des paquets de A-orbites compactes remonte implicitement à Gauss dans les Disquitiones lorsque celui-ci étudie les formes quadratiques à deux variables et à coefficients entiers à changement de variables à coefficients entiers près. À chaque telle classe de formes quadratiques $ax^2 + bxy + cy^2$ avec $pgcd(a, b, c) = 1$ on peut associer le discriminant $D = b^2 - 4ac$ et si $D > 0$ la géodésique du demi-plan supérieur $\mathbb{H}^2$ reliant les deux racines réelles du trinôme. Ces géodésiques sont fermées dans la surface modulaire $SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}^2$. Gauss montre que le nombre de classes d'équivalence de formes ayant même discriminant D est fini et que cet ensemble de classes s'identifie au groupe des classes d'idéaux du corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$. Ce sont là les paquets d'orbites. On renvoie le lecteur à [34] pour un excellent résumé du cas $d = 2$ et du théorème d'équidistribution correspondant, i.e. le théorème de Duke (voir aussi les travaux antérieurs de Zelditch [77]).

Décrivons maintenant ces paquets en dimension supérieure. Soit K un corps de nombres totalement réel et de degré d sur $\mathbb{Q}$. La construction des orbites compactes décrite au §2 permet notamment d'associer une orbite compacte à chaque idéal I de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ de K, ou plus précisément à chaque classe d'idéal, car deux réseaux de K égaux à homothétie près par un scalaire non nul de K donnent lieu aux mêmes A-orbites compactes. Plus généralement si L est un réseau de K (i.e. un sous-$\mathbb{Z}$-module de rang d) alors on peut considérer les réseaux de la forme $I \cdot L$ où I varie parmi les idéaux inversibles de l'ordre $\mathcal{O}_L = \{x \in K, xL \subseteq L\}$. Ceci nous donne une action bien définie du groupe de Picard de l'ordre $\mathcal{O}_L$ sur l'ensemble des A-orbites compactes dont l'ordre associé est $\mathcal{O}_L$. Cette action est sans point fixe. Une classe d'équivalence pour cette relation est appelée un *paquet d'orbites*. On a (cf. [53] I.12.6) :

Proposition 6.1. — *Les A-orbites compactes $(K,[L],\sigma)$ et $(K,[L'],\sigma)$ associées à deux réseaux L et L' de K sont dans le même paquet si et seulement si ils sont localement égaux à un scalaire près, i.e. si pour tout nombre premier p, il existe un élément inversible λ_p de $K\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p$ tel que $L\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p=\lambda_p(L'\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p)$.*

On peut aussi décrire un paquet en termes du $\mathbb{Q}$-tore associé au réseau L. Le bon cadre pour cela est le cadre adélique. Soit donc $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles sur $\mathbb{Q}$ et K_f un sous-groupe compact ouvert des adèles finies $\mathbb{G}(\mathbb{A}_f)$ où $\mathbb{G}=PGL_d$ tel que $\Gamma=\mathbb{G}(\mathbb{Q})\cap K_f=PGL_d(\mathbb{Z})$. On pose $X_{\mathbb{G}}=\mathbb{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{G}(\mathbb{A})/K_f$. D'après la finitude du nombre de classes de $\mathbb{G}$ (voir [57] ch. 5), l'espace $X_{\mathbb{G}}$ est une réunion finie de copies de $\Gamma\backslash\mathbb{G}(\mathbb{R})$. On note $X^0_{\mathbb{G}}$ la composante $\Gamma\backslash\mathbb{G}(\mathbb{R})$ correspondant à la double classe de l'identité dans $\mathbb{G}(\mathbb{A}_f)$ i.e. $\mathbb{G}(\mathbb{Q})K_f$.

Soit A le tore diagonal de $PGL_d(\mathbb{R})$ et $\mathbb{T}$ un $\mathbb{Q}$-tore $\mathbb{Q}$-anisotrope et $\mathbb{R}$-déployé de $\mathbb{G}$ et soit $g=(g_\infty,1)\in\mathbb{G}(\mathbb{A})$, tel que $\mathbb{T}(\mathbb{R})=g_\infty A g_\infty^{-1}$. On considère *l'orbite torique homogène* $\mathbb{T}(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{T}(\mathbb{A})g$ vue comme partie de $\mathbb{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{G}(\mathbb{A})$ et on pose

$$S(\mathbb{T},g):=\mathbb{T}(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{T}(\mathbb{A})gK_f/K_f.$$

Cette partie est située dans la composante $X^0_{\mathbb{G}}=\Gamma\backslash\mathbb{G}(\mathbb{R})=\Omega$. La finitude du nombre de classes de $\mathbb{T}$ et de $\mathbb{G}$ permet d'écrire $\mathbb{T}(\mathbb{A}_f)K_f=\cup_i\mathbb{T}(\mathbb{Q})\alpha_i^{-1}u_iK_f$ où $\alpha_i\in\mathbb{G}(\mathbb{Q})\cap\mathbb{G}(\mathbb{A}_f)$ et $u_i\in\mathbb{G}(\mathbb{A}_f)$ est un représentant de $\mathbb{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{G}(\mathbb{A}_f)/K_f$. Et puisque g commute à $\mathbb{G}(\mathbb{A}_f)$ on obtient

$$(1)\quad S(\mathbb{T},g)=\cup_i\mathbb{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{G}(\mathbb{Q})(\alpha_i\mathbb{T}(\mathbb{R})g,u_iK_f)/K_f=\cup_i\Gamma\cap\mathbb{T}_i(\mathbb{R})\backslash\mathbb{T}_i(\mathbb{R})h_i=\cup_i\Gamma\backslash\Gamma h_iA$$

où $h_i=\alpha_i g_\infty$ et $\mathbb{T}_i=\alpha_i\mathbb{T}\alpha_i^{-1}$ avec $\alpha_i\in\mathbb{G}(\mathbb{Q})\cap K_f\mathbb{T}(\mathbb{A}_f)$. On vérifie sans difficulté la proposition suivante (cf. [24]).

Proposition 6.2. — *Les $S(\mathbb{T},g)$ où $\mathbb{T}$ et $g=(g_\infty,1)$ varient parmi les $\mathbb{Q}$-tores $\mathbb{Q}$-anisotropes de $\mathbb{G}$ tels que $\mathbb{T}(\mathbb{R})=g_\infty Ag_\infty^{-1}$ forment une partition de l'ensemble des A-orbites compactes. Ce sont exactement les paquets : deux A-orbites sont dans le même paquet si et seulement si elles appartiennent à un même $S(\mathbb{T},g)$. Le groupe des classes $\mathbb{T}(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{T}(\mathbb{A}_f)/(\mathbb{T}(\mathbb{A}_f)\cap K_f)$ agit simplement transitivement sur $S(\mathbb{T},g)$. De plus deux A-orbites situées dans le même paquet ont même volume et même discriminant.*

Si $(\mathbb{T}_1,g_1)$ et $(\mathbb{T}_2,g_2)$ sont les données associées à deux orbites compactes $\Gamma\backslash\Gamma g_1A$ et $\Gamma\backslash\Gamma g_2A$ alors celles-ci appartiennent au même paquet si et seulement si $\mathbb{T}_2=\delta\mathbb{T}_1\delta^{-1}$ et $g_2=\delta tg_1$ où $\delta\in\mathbb{G}(\mathbb{Q})\cap K_f\mathbb{T}_1(\mathbb{A}_f)$ et $t\in\mathbb{T}_1(\mathbb{R})$. Ainsi les orbites compactes d'un même paquet sont paramétrées par l'ensemble des doubles classes $(\mathbb{G}(\mathbb{Q})\cap K_f)\backslash\mathbb{G}(\mathbb{Q})\cap K_f\mathbb{T}_1(\mathbb{A}_f)/\mathbb{T}_1(\mathbb{Q})$, qui lui-même s'identifie au groupe des classes $(\mathbb{T}_1(\mathbb{A}_f)\cap K_f)\backslash\mathbb{T}_1(\mathbb{A}_f)/\mathbb{T}_1(\mathbb{Q})$, i.e. le groupe de Picard de l'ordre correspondant.

L'estimation de volume suivante résulte de la borne inférieure de Brauer-Siegel sur le résidu au pôle de la fonction zeta de Dedekind d'un corps de nombres K (cf. [39]) :

Proposition 6.3 ([24] Theorem 4.8.). — *Le volume total A-invariant $vol(Y)$ d'un paquet Y de discriminant D vérifie* $\log vol(Y)=\frac{1}{2}\log D+o(\log D)$.

Dans une série d'articles antérieurs (en particulier [10]) Clozel et Ullmo ont systématisé l'étude des paquets $S(\mathbb{H}, g)$ et de leur répartition à d'autres sous-groupes $\mathbb{H}$. Soit $\mathbb{G}$ un $\mathbb{Q}$-groupe semi-simple, K_f un sous-groupe compact ouvert des adèles finies de $\mathbb{G}$ sur $\mathbb{Q}$. On pose $G = \mathbb{G}(\mathbb{R})^+$ la composante connexe (topologique) de l'identité, $\mathbb{G}(\mathbb{Q})^+ = \mathbb{G}(\mathbb{Q}) \cap \mathbb{G}(\mathbb{R})^+$, $\mathbb{G}(\mathbb{A})^+ = \mathbb{G}(\mathbb{R})^+\mathbb{G}(\mathbb{A}_f)$ et $\Gamma = \mathbb{G}(\mathbb{Q})^+ \cap \mathbb{K}_f$. L'ensemble $X_{\mathbb{G}} = \mathbb{G}(\mathbb{Q})^+\backslash\mathbb{G}(\mathbb{A})^+/K_f$ est une réunion finie de G orbites : on note $\Omega = \Gamma\backslash G$ la double classe de l'identité. Pour $g = (g_\infty, 1) \in \mathbb{G}(\mathbb{A})$, comme précédemment on pose $S(\mathbb{H}, g) := \mathbb{H}(\mathbb{Q})^+\backslash\mathbb{H}(\mathbb{A})^+g/\mathbb{H}(\mathbb{A}) \cap K_f$ vu comme partie de $X_{\mathbb{G}}$ et $S^0(\mathbb{H}, g)$ l'intersection avec Ω. On note α la donnée $\alpha = (\mathbb{H}, g)$. Soit μ_α la mesure $g_\infty^{-1}\mathbb{H}(\mathbb{R})^+g_\infty$-invariante sur $S^0(\mathbb{H}, g)$. Clozel et Ullmo conjecturent (voir [10] p. 1258 pour une forme plus faible sans les g_α) :

Conjecture 6.4. — *Soit $(\mathbb{H}_\alpha, g_\alpha)_\alpha$ une suite stricte de $\mathbb{Q}$-groupes sans $\mathbb{Q}$-caractères non triviaux avec $g_\alpha = (g_\infty, 1) \in \mathbb{G}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. Alors la suite de mesures de probabilité μ_α converge vers la mesure de Haar sur $\Gamma\backslash G$.*

La suite $(\mathbb{H}_\alpha, g_\alpha)_\alpha$ est dite *stricte* si pour tout $\mathbb{Q}$-sous-groupe $\mathbb{L}$ de $\mathbb{G}$ et tout $g \in \mathbb{G}(\mathbb{A})$ tel que $S^0(\mathbb{L}, g) \neq \Omega$ il n'y a qu'un nombre fini de α tels que $S^0(\mathbb{H}_\alpha, g_\alpha) \subseteq S^0(\mathbb{L}, g)$. C'est clairement une condition nécessaire.

Le théorème 1.6 de Einsiedler, Lindenstrauss, Michel et Venkatesh, résultat principal qui nous occupe dans ce Bourbaki, correspond à l'énoncé précédent dans le cas particulier où $\mathbb{G} = PGL_3$ et $\mathbb{H}_\alpha$ est une suite de tores maximaux anisotropes sur $\mathbb{Q}$ et déployés sur $\mathbb{R}$. Antérieurement, Clozel et Ullmo dans [10] ainsi que Cohen [12] et Zhang [78], ont traité le cas de PGL_2 conditionnellement à la sous-convexité, condition levée par Venkatesh dans [74]. On renvoie au troisième article [23] pour plus d'information sur le cas $G = PGL_2$.

Le cas où les H_α sont semi-simples a été étudié par différents auteurs. Dans [10] Clozel et Ullmo observent que, dans le cas particulier où les g_α sont tous égaux à l'identité et les $H_\alpha(\mathbb{R})$ sont sans facteurs compacts, la conjecture 6.4 est un corollaire des fameux théorèmes de Ratner et Mozes-Shah sur la classification des mesures invariantes par les flots unipotents. Dans un impressionnant travail récent [33] de Gorodnik et Oh, ce résultat est grandement étendu au cas où on permet aux g_α de varier et où les H_α sont semi-simples et possèdent une place où ils sont simultanément isotropes ; leur résultat décrit même les mesures limites possibles sans la condition de suite « stricte ». En fait, Gorodnik et Oh formulent et démontrent un résultat plus fort, à savoir l'équidistribution adélique, i.e. dans $\mathbb{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{G}(\mathbb{A})$. C'est aussi sous cette forme qu'est démontré le théorème 1.6 dans [24]. Cette généralisation est cruciale pour les applications arithmétiques tel le comptage des points S-entiers ou des points rationnels de hauteur bornée dans une variété homogène (i.e. $X = G/H$). On renvoie au survol de Oh [55] pour une introduction claire à ce travail ainsi que pour les applications arithmétiques au comptage de points (conjecture de Manin).

7. SÉRIES D'EISENSTEIN ET SOUS-CONVEXITÉ

Pour montrer l'équidistribution d'une suite de mesures (par exemple comme dans le théorème 1.6) deux méthodes s'offrent à nous a priori : ou bien utiliser l'analyse harmonique en vérifiant le critère de Weyl pour l'équidistribution (ici montrer que chaque composante de la décomposition spectrale de $L^2(\Gamma\backslash G)$ a une intégrale par rapport à μ_n qui tend vers zéro quand n tend vers l'infini, sauf pour les fonctions constantes) ou bien utiliser la théorie ergodique en montrant la rigidité des mesures valeurs d'adhérence de la suite μ_n. La première méthode est celle utilisée par Duke dans le cas $d = 2$. Quand $d \geq 3$ cette méthode n'est plus si aisée à mettre en œuvre parce qu'on n'a de lien direct avec les fonctions L que pour une petite partie du spectre, i.e. les séries de Siegel-Eisenstein, et on ne s'attend pas à ce qu'un lien semblable existe pour le reste de la décomposition spectrale de $L^2(\Gamma\backslash G)$ en particulier pour sa partie cuspidale. La seconde méthode, ergodique, n'est pas non plus suffisante car elle ne permet pas par exemple de contrôler la fuite de masse ni d'exclure la possibilité de plusieurs composantes ergodiques à la limite. Le succès de l'approche de Einsiedler, Lindenstrauss, Michel et Venkatesh dans [24] *réside dans la combinaison des deux approches.* Le critère de Weyl est vérifié sur les séries de Siegel-Eisenstein. C'est le corollaire 7.4 ci-dessous. Comme nous l'expliquons plus bas il résulte, via la formule de Hecke, de la sous-convexité des fonctions zeta de Dedekind associées ainsi que d'un calcul local. Mais le point clé est que l'équidistribution des séries de Siegel-Eisenstein est suffisante à la fois pour exclure l'éventualité d'une fuite de masse et pour montrer que toute composante ergodique de toute mesure limite a de l'entropie positive. Il suffit alors d'utiliser le théorème 1.1 pour conclure. Voici maintenant plus de détails.

7.1. Séries de Siegel-Eisenstein

Soit f une fonction continue à support compact inclus dans $\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$. La transformée de Siegel de f est la fonction définie sur l'espace des réseaux $\Omega = SL_d(\mathbb{Z})\backslash SL_d(\mathbb{R})$ par

$$\widetilde{f}(\Delta) = \sum_{v\in\Delta\backslash\{0\}} f(v).$$

Cette fonction est dans $L^{d-\varepsilon}(\Omega)$. L'identité suivante, dite formule de Siegel, relie l'intégrale de $\widetilde{f}$ sur Ω avec l'intégrale de f sur $\mathbb{R}^d$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \int_\Omega \widetilde{f} d\Delta \tag{2}$$

où $d\Delta$ est la mesure de Haar normalisée sur Ω et dx la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Cette formule est facile à vérifier, en effet, $f \to \int_\Omega \widetilde{f} d\Delta$ définit une fonctionnelle continue sur $C_c(\mathbb{R}^d\backslash\{0\})$ invariante par $SL_d(\mathbb{R})$. Une telle mesure est nécessairement de la forme $\alpha dx + \beta\delta_0$. Le critère de Mahler implique que $\beta = 0$ et en prenant $f_t(x) := t^d f(tx)$ la transformée $\widetilde{f_t}$ devient une somme de Riemann pour $t \to 0$ qui tend point par point vers le membre de gauche de (2), donc $\alpha = 1$ par convergence dominée.

Afin de faire le lien avec les fonctions L on construit la *série de Siegel-Eisenstein de* f en appliquant la transformée de Mellin à f (i.e. la transformée de Fourier sur $\mathbb{R}_+^*$ multiplicatif c'est-à-dire $f_s(v) = \int_{\mathbb{R}^*} f(tv)t^s d^\times t$ où $d^\times t = \frac{dt}{|t|}$) puis en posant

$$E_f(s,\Delta) = \widetilde{f_s}(\Delta) = \sum_{v\in\Delta\setminus\{0\}} f_s(v).$$

Cette série converge si $\mathrm{Re}(s) > d$. C'est une forme automorphe qui admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe avec pour seuls pôles 0 et d. Elle vérifie de plus une équation fonctionnelle reliant ses valeurs de part et d'autre de la droite critique $\mathrm{Re}(s) = \frac{d}{2}$.

Le résidu en $s = d$ se calcule aisément, il vaut $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx$. Pour retrouver $\widetilde{f}$, la transformée de Siegel de f, on applique la transformée de Mellin inverse, i.e.

$$\widetilde{f}(\Delta) = \int_{Re(s)=\sigma>d} E_f(s,\Delta)\frac{ds}{2\pi i}.$$

On peut alors déplacer le contour d'intégration vers la droite critique, i.e.

$$\widetilde{f}(\Delta) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \int_{Re(s)=\frac{d}{2}} E_f(s,\Delta)\frac{ds}{2\pi i}. \tag{3}$$

Il va être utile et même nécessaire pour la suite de raisonner adéliquement et de réécrire $E_f(s,\Delta)$ après un calcul immédiat sous la forme plus générale

$$E_f(s,\Delta) = |\det g_\infty|^{s/d}\cdot \widetilde{E}_\psi(s,g) = |\det g_\infty|^{s/d}\cdot \int_{\mathbb{Q}^\times\setminus\mathbb{A}^\times} \sum_{v\in\mathbb{Q}^d\setminus\{0\}} \psi(vtg)|t|_{\mathbb{A}}^s d^\times t \tag{4}$$

où $d^\times t$ est la mesure de Haar normalisée sur $\mathbb{Q}^\times\setminus\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times$, $\psi(v) := f(v_\infty)1_{U_f}(v_f)$ si $v = (v_\infty, v_f) \in \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^d$ et $U_f = \prod_p' \mathbb{Z}_p^d$, $g = (g_\infty, 1) \in \mathbb{G}(\mathbb{A})$, $\mathbb{G} = PGL_d$, et $\mathbb{Z}^d \cdot g_\infty = \Delta$. Noter que $\widetilde{E}_\psi(s,g)$ est bien défini pour tout $g \in \mathbb{G}(\mathbb{A})$, $\mathbb{G} = PGL_d$, et $\mathrm{Re}(s) > d$. Noter aussi, vu la forme de ψ, que $\widetilde{E}_\psi(s,gk) = \widetilde{E}_\psi(s,g)$ pour tout $k \in K_f$.

7.2. Formule de Hecke pour les intégrales toroïdales

Dans l'optique du théorème 1.6 la quantité qui nous intéresse est $\int_\Omega \widetilde{f} d\mu_n$; c'est l'intégrale de $\widetilde{f}$ par rapport à un paquet d'orbites. À la lumière de (3), il nous suffit de calculer $\int_\Omega E_f(s,\Delta)d\mu_n$ sur la droite critique $\mathrm{Re}(s) = \frac{d}{2}$. La *formule de Hecke* (voir à ce titre l'exposé de Wielonsky [75]) relie cette intégrale à un produit eulérien qui fait intervenir à la fois la fonction zeta de Dedekind $\zeta_K(s) = \prod_{v\in V_K} \zeta_{K_v}(s)$ du corps de nombres K associé au paquet et un nombre fini de facteurs locaux I_p pour p divisant le discriminant du paquet. Explicitons-la.

Soit $\Delta\cdot A$ une A-orbite compacte et $(K, [L], \sigma)$ la donnée associée (cf. §2). Le corps K est identifié à une sous-$\mathbb{Q}$-algèbre $\phi(K)$ de $M_d(\mathbb{Q})$ égale à $\mathfrak{t}_{\mathbb{Q}}$ où $\mathfrak{t}$ est l'algèbre de Lie du $\mathbb{Q}$-tore $\mathbb{Q}$-anisotrope $\mathbb{T}$ associé à l'orbite. On fixe une identification de K avec $\mathbb{Q}^d$ en posant $\iota : K \to \mathbb{Q}^d$, $\iota(y) = e_1\cdot\phi(y)$ où e_1 est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{Q}^d$ et $y \in K \overset{\phi}{\hookrightarrow} M_d(\mathbb{Q})$.

Proposition 7.1 (formule de Hecke). — *Soit Y_n un paquet de A-orbites compactes de discriminant D et μ_n la probabilité A-invariante associée. Alors*

$$\int_\Omega E_f(s,\Delta)d\mu_n(\Delta) = \frac{1}{\mathcal{V}}\int_{\mathbb{A}_K^\times}\psi_{K,g}(y)|y|_{\mathbb{A}_K}^{s/d}d^\times y = \frac{1}{\mathcal{V}}\cdot\zeta_K(\frac{s}{d})\cdot I_\infty(f)\cdot\prod_{p|D}\frac{I_p}{\zeta_{K_p}(\frac{s}{d})} \tag{5}$$

où on a noté $\Delta = \mathbb{Z}^d g_\infty$, $g = (g_\infty, 1)$, $\psi_{K,g}(y) = \psi(\iota(y)g)$ avec $\iota(y) = e_1\cdot y$ et $\psi(v) := f(v_\infty)1_{U_f}(v_f)$, $d^\times y = \prod_{v\in V_K} d^\times y_v$ est la mesure de Haar sur $\mathbb{A}_K^\times$ définie par la normalisation $d^\times y_v(\mathcal{O}_{K_v}^\times) = disc(K_v)^{-\frac{1}{2}}$, $\mathcal{V} = vol_{d^\times y}((\mathbb{A}_K^\times)^1/K^\times))$, $\zeta_{K_p}(s) = \prod_{v|p}\zeta_{K_v}(s)$ et $\zeta_{K_v}(s) = (1-q_v^{-s})^{-1}$ où q_v est le cardinal du corps résiduel de K_v, et $I_p = \int_{K_p^\times} 1_{\mathbb{Z}_p^d}(\iota(y))|y|_p^{s/d}d^\times y$ où $K_p = K\otimes_\mathbb{Q}\mathbb{Q}_p = \prod_{v|p}K_v$ et $|y|_p = \prod_{v|p}|y|_v$ pour p premier ou ∞.

Preuve : Notons que $g = (g_\infty, 1)$ et K_f commutent et $\widetilde{E}_\psi(s,kg) = \widetilde{E}_\psi(s,g)$ si $k\in K_f$. Mais par (1)

$$\begin{aligned}\int_\Omega E_f(s,\Delta)d\mu_n(\Delta) &= \frac{1}{vol(Y_n)}\sum_i\int_{A\cap h_i^{-1}\Gamma h_i\backslash A}|\det h_i a|^{s/d}\cdot\widetilde{E}_\psi(s,h_i a)da\\ &= \frac{1}{vol(Y_n)}\int_{S(\mathbb{T},g)}|\det tg|^{s/d}\cdot\widetilde{E}_\psi(s,tg)dt\\ &= \frac{1}{\mathcal{V}}\int_{\mathbb{T}(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{T}(\mathbb{A})}\widetilde{E}_\psi(s,tg)|t|_{\mathbb{A}_K}^{s/d}dt\end{aligned}$$

où dt est la mesure de Haar sur $\mathbb{T}(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{T}(\mathbb{A})$ image de la mesure $d^\times y$ par l'isomorphisme entre $(K^\times\backslash\mathbb{A}_K^\times)/(\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times)$ et $\mathbb{T}(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{T}(\mathbb{A})$ induit par ϕ et $\mathcal{V}$ le volume total de $\mathbb{T}(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{T}(\mathbb{A})$. Via cet isomorphisme on calcule facilement la dernière expression en injectant (4) et en dévissant :

$$\frac{1}{\mathcal{V}}\int_{\mathbb{T}(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{T}(\mathbb{A})}\widetilde{E}_\psi(s,tg)|t|_{\mathbb{A}_K}^{s/d}dt = \frac{1}{\mathcal{V}}\int_{\mathbb{A}_K^\times}\psi_{K,g}(y)|y|_{\mathbb{A}_K}^{s/d}d^\times y. \tag{6}$$

Enfin la quantité $I = \int_{\mathbb{A}_K^\times}\psi_{K,g}(y)|y|_{\mathbb{A}_K}^{s/d}d^\times y$ se factorise en un produit de facteurs locaux $I = \prod_p I_p$ où p parcourt les nombres premiers et ∞. Si $p\nmid D$ alors $I_p = \prod_{v|p}I_v$ et comme $\psi_{K_v,g_v}(y) = 1_{\mathcal{O}_{K_v}}$, par un calcul facile $I_v = \zeta_{K_v}(\frac{s}{d})$, ce qui permet de mettre (6) sous la forme voulue.

7.3. Sous-convexité

Il s'agit maintenant de majorer chacun des facteurs de la formule de Hecke sur la droite critique $\mathrm{Re}(s) = \frac{d}{2}$. Le facteur de volume $\frac{1}{\mathcal{V}}$ est un $O_\varepsilon(D^\varepsilon)$ par Brauer-Siegel. Comme conséquence triviale du théorème des nombres premiers, le nombre $n(D)$ de p qui divisent D est un $o(\log D)$, ainsi $\prod_{p|D}|\zeta_{K_p}(\frac{s}{d})|^{-1}\leq 2^{n(D)}$ est aussi un $O_\varepsilon(D^\varepsilon)$ si $\mathrm{Re}(s) = \frac{d}{2}$. Reste donc $\zeta_K(\frac{s}{d})$ et les I_p. Lorsque $d = 3$, on dispose de l'estimation de sous-convexité pour la fonction zeta de Dedekind (qui suit des résultats de Duke-Friedlander-Iwaniec [16] et Blomer-Harcos-Michel [4]) :

THÉORÈME 7.2 (sous-convexité pour les corps cubiques [16], [4])
Il existe des constantes $N, \theta > 0$ telles que, pour tout corps de nombres K de degré 3 *sur $\mathbb{Q}$, on ait sur la droite critique $Re(s) = \frac{1}{2}$*

$$|\zeta_K(s)| \ll (1 + |Im(s)|)^N \cdot disc(K)^{\frac{1}{4}-\theta} \tag{7}$$

où la constante implicite dans $\ll$ est indépendante de K.

À la place infinie nous avions $I_\infty(f) = \int_{(K\otimes\mathbb{R})^\times} f(e_1 \cdot g_\infty diag(y))|y|^{s/d} d^\times y = \int_{(\mathbb{R}^d)^\times} f(y)|y|^{\frac{s}{d}} \frac{dy}{|y|}$ où $|y| = \prod_{i=1}^d |y_i|$. Supposons f lisse : on remarque que sur toute droite verticale $\mathrm{Re}(s) = \sigma$, la quantité $I_\infty(f) = \int_{(\mathbb{R}^d)^\times} f(y)|y|^{\frac{s}{d}} d^\times y$ est la transformée de Fourier d'une fonction de $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et donc, pour tout $M > 0$,

$$I_\infty(f) \ll_{M,f} (1 + |Im(s)|)^{-M} \tag{8}$$

sur la droite critique.

Aux places finies nous avions $I_p = \int_{K_p^\times} 1_{\mathbb{Z}_p^d}(\iota(y))|y|_p^{s/d} d^\times y$, avec $d^\times y = \zeta_{K_p}(1)\frac{dy}{|y|_p}$ et $vol_{dy}(\mathcal{O}_{K_p}) = (discK_p)^{-1/2}$ où $\mathcal{O}_{K_p} = \prod_{v|p} \mathcal{O}_{K_v}$. L'estimée clé de [24] est la borne suivante établie par Einsiedler, Lindenstrauss, Michel et Venkatesh en toute dimension :

PROPOSITION 7.3. — *Il existe $\alpha = \alpha(d) > 0$ tel que sur la droite $Re(s) = \frac{d}{2}$ et pour tout $\varepsilon > 0$ on ait*

$$\left|\prod_{p|D} I_p\right| \ll_\varepsilon D^\varepsilon \cdot disc(K)^{-\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{D}{disc(K)}\right)^{-\alpha}. \tag{9}$$

Finalement la combinaison de (5), (7), (8) avec $M \gg N$ et (9) donne immédiatement le résultat d'équidistribution escompté :

COROLLAIRE 7.4. — *Fixons $d = 3$. Soit f une fonction C^∞ à support compact dans $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$. Alors $\int_\Omega \widetilde{f} d\mu_n \to \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx$.*

Notons que quand n tend vers $+\infty$ le discriminant D_n du paquet Y_n lui aussi tend vers $+\infty$ mais que $disc(K)$ peut ou non rester borné. S'il reste borné – par exemple si K est fixe – alors on peut se passer de (7) et (9) suffit à établir l'équidistribution, valable alors en toute dimension.

Disons maintenant quelques mots sur la proposition 7.3, qui occupe la majeure partie de [24]. L'isomorphisme $\iota : K_p = K \otimes \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\iota} \mathbb{Q}_p^d$, qui code la façon dont le tore $\mathbb{T}$ associé au paquet est plongé dans PGL_d, identifie la norme naturelle de K_p, i.e. $N_{K_p}(y) = \max_{v|p} N_{K_v|\mathbb{Q}_p}(y)$, à une norme, disons $N_p(z) := N_{K_p}(\iota^{-1}z)$, sur $\mathbb{Q}_p^d$. D'autre part nous disposons de la norme standard sur $\mathbb{Q}_p^d$ associée à $\mathbb{Z}_p^d$, i.e. $N_0(z) = \max |z_i|$. À chacune de ces normes correspond un réseau de $\mathbb{Q}_p^d$ – i.e. un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang d – qui est l'ensemble des points de norme ≤ 1, soit $\iota(\mathcal{O}_{K_p})$ pour N_p et $\mathbb{Z}_p^d$ pour N_0. Mais $GL_d(\mathbb{Q}_p)$ agit transitivement sur les réseaux et il existe donc $h_p \in GL_d(\mathbb{Q}_p)$ tel que $N_p(z) = N_0(zh_p)$.

Pour avoir (9) il nous suffit d'établir

$$J_p := (vol_{dy}\{N_0(\iota y) \leq 1\})^{-\frac{1}{2}} \int_{K_p^\times} 1_{N_0(\iota y)\leq 1} |y|_p^{-1/2} dy \ll \left(\frac{D_p}{disc(K_p)}\right)^{-\alpha} \qquad (10)$$

pour chaque p divisant $D = \prod D_p$ (D_p est de discriminant local de l'ordre $\mathcal{O}$ associé au paquet). En effet $vol_{dy}\{N_0(\iota y) \leq 1\} = |\det h_p|(discK_p)^{-1/2}$ car dans notre normalisation $vol_{dy}(\mathcal{O}_{K_p}) = (discK_p)^{-1/2}$. Mais l'isomorphisme $\mathbb{A}_K \xrightarrow{\iota} \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^d$ préserve la mesure car il envoie K sur $\mathbb{Q}^d$ et nous avions $vol_{dy}(\mathbb{A}_K/K) = 1$. Ainsi $\prod_p |\det h_p|(discK_p)^{-1/2} = 1$. Comme $\zeta_{K_p}(1) \ll 1$, on peut écrire sur la droite critique $|I_p| \ll \frac{|\det h_p|^{1/2}}{(discK_p)^{1/2}} J_p$, d'où (9).

Le point est donc de borner J_p, i.e. montrer (10). C'est une très jolie méthode géométrique, inspirée de [10], qui est mise en œuvre dans [24] à cette fin. Cette quantité dépend de la norme $N_0(\iota y)$ sur K_p, et même seulement de la classe d'homothétie de la norme (à un scalaire de $\mathbb{Q}_p$ près) : on peut donc la voir comme une fonction sur l'immeuble de Bruhat-Tits de $PGL_d(\mathbb{Q}_p)$ qui par définition est l'espace des normes – ou des $\mathbb{Z}_p$-réseaux – de $\mathbb{Q}_p^d$ à homothétie près. Le point clé est de montrer que J_p décroît exponentiellement en fonction de la distance combinatoire dans l'immeuble entre $N_0(\iota y)$ – i.e. $\mathbb{Z}_p^d$ dans $\mathbb{Q}_p^d$ – et le sous-immeuble formé de l'orbite de N_{K_p} sous l'action de $K_p^\times$ – i.e. les réseaux $\iota(t\mathcal{O}_{K_p})$, $t \in K_p^\times$, dans $\mathbb{Q}_p^d$. Cette orbite correspond à un appartement de l'immeuble dans le cas où p est totalement décomposé dans K. De plus cette distance combinatoire (notée n) est minorée par $\log_p\left(\frac{D_p}{disc(K_p)}\right)$: en effet si $p^n\mathbb{Z}_p^d \leq \iota(t\mathcal{O}_{K_p}) \leq \mathbb{Z}_p^d$ pour un certain $t \in K_p^\times$ alors $p^n\mathcal{O}_{K_p} \leq \mathcal{O}_p \leq \mathcal{O}_{K_p}$ car l'ordre local associé au paquet est par définition $\mathcal{O}_p = \{x \in K_p, \mathbb{Z}_p^d\phi(x) \subseteq \mathbb{Z}_p^d\}$. Mais le discriminant local est $D_p = [\mathcal{O}_p^* : \mathcal{O}_p]$ et $discK_p = [\mathcal{O}_{K_p}^* : \mathcal{O}_{K_p}]$ où $\mathcal{O}_p^*$ (resp. $\mathcal{O}_{K_p}^*$) est le dual de $\mathcal{O}_p$ via la forme trace ; par dualité $\mathcal{O}_{K_p}^* \leq \mathcal{O}_p^* \leq p^{-n}\mathcal{O}_{K_p}^*$ et donc $D_p \leq p^{2dn} discK_p$. Ceci donne donc (10) moyennant cette affirmation concernant la décroissance exponentielle de J_p en fonction de la distance de $N_0(\iota y)$ à la $K_p^\times$-orbite de N_{K_p}. Cette dernière assertion est obtenue en identifiant J_p à l'intégrale sur $K_p^\times/\mathbb{Q}_p$ d'un coefficient de matrice $\langle y \cdot F_1, F_2\rangle$ pour la représentation unitaire $L^2(\mathbb{P}^{d-1}(\mathbb{Q}_p))$ de $PGL_d(\mathbb{Q}_p)$ et en faisant usage des bornes exponentielles classiques sur ces coefficients via la fontion Ξ d'Harish-Chandra (cf. [24] §9.16).

7.4. Preuve du théorème 1.6

Soit μ_∞ une limite faible des mesures μ_n. Il nous suffit de montrer tout d'abord que μ_∞ est bien une probabilité, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de fuite de masse, puis que μ_∞ a de l'entropie positive par rapport à au moins un sous-groupe à un paramètre de A. Le théorème sera alors une conséquence immédiate du théorème 1.1.

Ces deux propriétés vont résulter du corollaire 7.4 c'est-à-dire de l'équidistribution des transformées de Siegel. Soit f une approximation lisse à la fonction indicatrice $1_{B(0,\varepsilon)}$ de la boule de rayon ε centrée en 0 dans $\mathbb{R}^d$. Alors $\widetilde{f}(\Delta)$ domine la fonction indicatrice du voisinage Ω_{ε^d} de l'infini dans Ω défini au §3 et donné par le critère de

Mahler, i.e. $\widetilde{f}(\Delta) \geq 1_{\Omega_{\varepsilon^d}}(\Delta)$. Le corollaire 7.4 implique donc que $\mu_\infty(\Omega_{\varepsilon^d}) = O(\varepsilon^d)$. En particulier μ_∞ est une probabilité, i.e. il n'y a pas de fuite de masse (ou en d'autres termes encore la famille $\{\mu_n\}_n$ est tendue). De façon similaire, si cette fois f est une approximation lisse à la fonction indicatrice $1_{B(v,\varepsilon)}$ de la boule euclidienne de rayon ε centrée en $v \neq 0$ dans $\mathbb{R}^d$ alors $\widetilde{f}(\Delta)$ domine la fonction indicatrice de la boule $B(\Delta, \varepsilon)$ (pour une métrique riemannienne quelconque fixée à l'avance) de rayon $O(\varepsilon)$ au voisinage de tout réseau Δ de Ω qui contient v. Ainsi $\mu_\infty(B(\Delta, \varepsilon)) = O(\varepsilon^d)$. La preuve du théorème est donc terminée à la lumière du fait classique suivant :

Lemme 7.5. — *Soit $\alpha > d-1$. Soit a un élément régulier de A. Soit μ une mesure A-invariante sur Ω telle que $\mu(B(\Delta, \varepsilon)) = O(\varepsilon^\alpha)$ uniformément pour Δ variant dans un compact de Ω. Alors $h_{\mu_\xi}(a) > 0$ pour presque toute composante ergodique μ_ξ de μ.*

Preuve : vérifions d'abord que $h_\mu(a) > 0$. Ceci résulte de la définition de l'entropie (cf. §5.1 pour un rappel) et du fait que le système dynamique (Ω, T_a, μ) est partiellement hyperbolique (T_a est la translation par a) avec un sous-fibré tangent stable de dimension égale au rang de G soit $d-1$. En effet, si $\mathcal{P}$ est une partition fixe assez fine de Ω alors les atomes de $\mathcal{P}^m = \vee_{-m}^m T_a^k \mathcal{P}$ sont contenus dans des $e^{-\kappa m}$-voisinages de morceaux de taille fixe (i.e. de A-volume borné) de A-orbites, où $\kappa > 0$ mesure le coefficient de contraction/dilatation de T_a, coefficient qui dépend de la distance de a aux murs de la chambre de Weyl. Ces atomes $[x]_{\mathcal{P}^m}$ peuvent donc être recouverts par au plus $(e^{\kappa m})^{\dim A}$ boules de rayon $e^{-\kappa m}$. La condition $\mu(B(\Delta, \varepsilon)) = O(\varepsilon^\alpha)$ avec $\alpha > d-1$ entraîne alors $\mu([x]_{\mathcal{P}^m}) = O(e^{-(\alpha-(d-1))\kappa m})$ et donc $H_\mu(\mathcal{P}^m) \geq (\alpha-(d-1))\kappa m$, i.e. $h_\mu(T_a) \geq h_\mu(T_a, \mathcal{P}) \geq (\alpha - (d-1))\frac{\kappa}{2} > 0$.

Soit maintenant $\mu = \int_\Xi \mu_\xi d\nu(\xi)$ une décomposition ergodique de μ. Si $h_{\mu_\xi}(a) = 0$ pour tout $\xi \in \Xi_0$, un sous-ensemble de ν-mesure strictement positive, alors $\mu_0 := \frac{1}{\nu(\Xi_0)} \int_{\Xi_0} \mu_\xi d\nu(\xi)$ vérifie $h_{\mu_0}(a) = 0$ d'après le point 4) du §5.1. Mais μ domine $\nu(\Xi_0) \cdot \mu_0$, en particulier $\mu_0(B(\Delta, \varepsilon)) \leq \frac{1}{\nu(\Xi_0)} \mu(B(\Delta, \varepsilon)) = O_\Delta(\varepsilon^\alpha)$ avec $\alpha > d-1$. Comme précédemment ceci entraîne $h_{\mu_0}(a) > 0$, une contradiction. *CQFD.*

Remarque. Notons que l'équidistribution dans le théorème 1.6 ou dans la conjecture 1.3 pourrait être le reflet de deux phénomènes a priori distincts : ou bien Y_n est constitué de nombreuses orbites de volume assez petit qui sont individuellement mal équidistribuées mais qui néanmoins sont placées dans $\Omega = \Gamma \backslash G$ de façon homogène et bien répartie, ou bien il se pourrait qu'au contraire le nombres d'orbites dans Y_n est moindre et la plupart des orbites de Y_n sont déjà individuellement bien équidistribuées. Ce dernier phénomène est apparemment difficile à mettre en évidence : peut-on trouver par exemple une suite de A-orbites compactes dont la mesure A-invariante tend vers la mesure de Haar de Ω ? Pour $d = 2$ il faudrait trouver une infinité de discriminants $d > 0$ tels que le nombre de classes $h(d)$ soit borné. C'est un problème ouvert bien connu. Les résultats de Harcos et Michel [35] vont cependant dans cette direction : ils obtiennent l'équidistribution – *sparse equidistribution* – pour des paquets maigres de géodésiques (i.e. correspondant à l'orbite d'un sous-groupe strict assez gros du groupe de classes) comme conséquence de leur borne de sous-convexité pour les fonctions L associées à des formes de Maass paraboliques tordues par des caractères du groupe de classes (fonctions L de Rankin-Selberg).

8. DEUX APPLICATIONS

8.1. Équidistribution des matrices entières dans une classe de similitude

Soit $P \in \mathbb{Z}[T]$ unitaire de degré d, irréductible sur $\mathbb{Q}$ et avec d racines réelles. Soit $\mathcal{V}_P$ la variété des matrices carrées de taille d dont le polynôme caractéristique est égal à P. Clairement $\mathcal{V}_P(\mathbb{R})$ est une classe de similitude, i.e. $G = PGL_d(\mathbb{R})$ agit transitivement. Le stabilisateur d'un point est $N(A_P)$ où A_P est le centralisateur d'une matrice M_P de $\mathcal{V}_P$. Comme P a d racines réelles, A_P est un tore maximal et $\mathbb{R}$-déployé, il est donc conjugué à A, i.e. $A = h_P A_P h_P^{-1}$. On a donc une application naturelle G-équivariante et surjective de $X = G/A$ sur $\mathcal{V}_P(\mathbb{R})$ définie par $\iota_P : g \mapsto g h_P M_P h_P^{-1} g^{-1}$. Cette application est indépendante du choix de M_P.

On peut alors tirer en arrière les points entiers de $\mathcal{V}_P$ par ι_P et obtenir un ensemble de points entiers $X(P) = \iota_P^{-1}(M_d(\mathbb{Z}) \cap \mathcal{V}_P)$ sur X. Notons que X possède une mesure naturelle à normalisation près : la mesure $PGL_d(\mathbb{R})$-invariante, notée ν. On obtient :

Théorème 8.1 ([24] Corollary 3.3). — *Fixons $d = 3$. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite infinie de polynômes comme ci-dessus. Alors la famille $\{X(P_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ devient équidistribuée dans X quand n tend vers l'infini, i.e. on a le théorème limite quotient suivant :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|\mathcal{U}_1 \cap X(P_n)|}{|\mathcal{U}_2 \cap X(P_n)|} = \frac{\nu(\mathcal{U}_1)}{\nu(\mathcal{U}_2)}$$

pour tous ouverts bornés $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ de frontière de ν-mesure négligeable.

Cet énoncé est à l'origine un cas particulier d'une question de Linnik (voir [66]). Le lien entre un tel énoncé et un énoncé d'équidistribution de périodes (tel le théorème 1.6) a été dégagé dans [29] où Eskin et Oh répondent à la question de Linnik sur l'asymptotique du nombre de points entiers sur une suite de variétés homogènes de la forme $V_m = \{f = m\}$, où f est un polynôme homogène G-invariant et où on compte les points dans un cône fixe de l'espace. Les variétés considérées sont isomorphes à G/H avec H engendré par des unipotents pour que la théorie de Ratner puisse s'appliquer. Voir aussi l'article antérieur [30].

C'est un principe désormais classique en théorie ergodique des actions de groupes qu'à tout énoncé d'ergodicité ou d'équidistribution de H_1 sur G/H_2 correspond un énoncé analogue pour H_2 sur $H_1\backslash G$. Ici $\Gamma = PGL_d(\mathbb{Z})$ agit sur $X(P)$ par conjugaison, ce qui revient à la translation à gauche sur G/A via l'application ι_P. À chaque Γ-orbite d'une matrice M_0 dans $X(P)$ correspond ainsi une A-orbite de $\Gamma\backslash G$ qui est compacte car l'irréductibilité de P garantit la $\mathbb{Q}$-anisotropie du centralisateur A_0 de M_0. On vérifie enfin que l'ensemble $X(P)$ est une réunion finie de Γ-orbites à laquelle correspond par cette correspondance la réunion (finie) des paquets de A-orbites compactes Y_L associées aux réseaux L du corps de nombres totalement réel $K = K_P = \mathbb{Q}[T]/(P)$ dont l'ordre associé $\mathcal{O}_L$ contient l'anneau quotient $\mathcal{O}_P = \mathbb{Z}[T]/(P)$.

8.2. Amélioration du théorème de Minkowski

Pour démontrer la finitude du groupe des classes d'un corps de nombres K de degré d, on commence en général d'abord par établir la borne de Minkowski selon laquelle toute classe d'idéaux fractionnaires possède un représentant I dont la norme est un $O_d(disc(K))$. Les auteurs de [22] conjecturent que ce $O_d(\cdot)$ peut être remplacé par un $o_d(\cdot)$. La proposition 3.1 (appliquée à l'idéal inverse I^{-1}) combinée au théorème 1.2 donne immédiatement l'approximation suivante à cette conjecture :

Théorème 8.2 ([22] Theorem 6.3). — *Pour tous $\varepsilon, \delta > 0$, le nombre de corps de nombres K totalement réels de degré d et de disciminant $disc(K) \leq X$ tels qu'au moins une classe d'idéaux ne puisse pas être représentée par un idéal fractionnaire I de norme au plus $\delta \cdot disc(K)$ est un $O_{\delta,d,\varepsilon}(X^{\varepsilon})$.*

En revanche, comme le montre déjà l'exemple de Cassels au paragraphe 3.1, le nombre de corps de nombres totalement réels de degré d et de discriminant $disc(K) \leq X$ est au moins polynomial en X.

Remerciements : Je remercie vivement Philippe Michel pour son soutien stratégique durant la préparation de cet exposé et pour avoir si patiemment répondu à mes questions. Uri Shapira et Elon Lindenstrauss m'ont aussi apporté une aide cruciale en me faisant part de leurs dernières réflexions sur le sujet, je leur suis particulièrement reconnaissant. Je remercie Hee Oh et Georges Tomanov pour leurs commentaires pertinents qui m'ont permis d'améliorer le texte. Je remercie aussi Emmanuel Ullmo et Laurent Clozel et les autres participants du groupe de travail organisé à Orsay en 2008 sur ce sujet pour les discussions que nous avons eues à propos des articles [22] et [24]. Merci aussi à Françoise Dal'bo pour ses remarques constructives.

RÉFÉRENCES

[1] Y. Benoist, H. Oh, Equidistribution of rational matrices in their conjugacy classes, Geom. Funct. Anal. 17 (2007), 1–32.

[2] Y. Benoist, H. Oh, Effective equidistribution of S-integral points on symmetric varieties, preprint arXiv :0706.1621.

[3] N. Bergeron, Spectre des surfaces hyperboliques (livre en préparation).

[4] V. Blomer, G. Harcos, Ph. Michel, Bounds for modular L-functions in the level aspect, Ann. Sci. École Norm. Sup. 40 (2007), 697–740.

[5] A. Borel, Introduction aux groupes arithmétiques, éditions Hermann, 1969.

[6] R. Bowen, Periodic orbits for hyperbolic flows, Amer. J. Math. 94 (1972), 1–30.

[7] D. A. Burgess, On character sums and L-series. II, Proc. London Math. Soc. 13 (1963), 524–536.

[8] J. W. S. Cassels, The product of n inhomogeneous linear forms, J. London Math. Soc., 1952.

[9] J. W. S. Cassels, H. P. F. Swinnerton-Dyer, On the product of three homogeneous linear forms and the indefinite ternary quadratic forms, Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 248 (1955), 73–96.

[10] L. Clozel, E. Ullmo, Équidistribution de mesures algébriques, Compos. Math. 141 (2005), 1255–1309.

[11] L. Clozel, E. Ullmo. Équidistribution de sous-variétés spéciales, Annals of Maths. 161 (2005), 1571-1588.

[12] P. Cohen, Hyperbolic distribution problems on Siegel 3-folds and Hilbert modular varieties, Duke Math. J. 129 (2005), 87–127.

[13] S. Dani, G. Margulis, Limit distributions of orbits of unipotent flows and values of quadratic forms. In I. M. Gel'fand Seminar, AMS, Adv. Soviet Math. 16 (1993), 91–137.

[14] W. Duke, Hyperbolic distribution problems and half-integral weight Maass forms, Invent. Math. 92 (1988), 73–90.

[15] W. Duke, J. B. Friedlander, H. Iwaniec, Bounds for automorphic L-functions, Invent. Math. 112 (1993), 1–8.

[16] W. Duke, J. B. Friedlander, and H. Iwaniec, The subconvexity problem for Artin L-functions, Invent. Math. 149 (2002), 489–577.

[17] M. Einsiedler, A simplified proof of Ratner's measure classification for the action of subgroups isomorphic to $SL(2, \mathbb{R})$, preprint 2008.

[18] M. Einsiedler, A. Katok. Invariant measures on G/Γ for split simple Lie groups G, Comm. Pure Appl. Math. 56 (2003), 1184–1221.

[19] M. Einsiedler, A. Katok. Rigidity of measures – the high entropy case, and non-commuting foliations. Israel J. Math. 148 (2005), 169–238.

[20] M. Einsiedler, A. Katok, E. Lindenstrauss, Invariant measures and the set of exceptions to Littlewood's conjecture, Ann. of Math. 164 (2006), 513–560.

[21] M. Einsiedler, E. Lindenstrauss, Diagonal flows on locally homogeneous spaces and number theory, with Manfred Einsiedler, Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2006.

[22] M. Einsiedler, E. Lindenstrauss, Ph. Michel, A. Venkatesh, The distribution of periodic torus orbits on homogeneous spaces I, Duke Math. Journal 148 (2009), 119-174.

[23] M. Einsiedler, E. Lindenstrauss, Ph. Michel, A. Venkatesh, The distribution of periodic torus orbits on homogeneous spaces II : Duke's theorem for quadratic fields. (en préparation).

[24] M. Einsiedler, E. Lindenstrauss, Ph. Michel, A. Venkatesh, The distribution of periodic torus orbits on homogeneous spaces III : Duke's theorem for cubic fields. ArXiv : math.0708.1113.

[25] M. Einsiedler, T. Ward, Ergodic Theory, livre en préparation, chapitres disponibles sur la page ouèbe de T. Ward.

[26] A. Eskin, Counting problems and semisimple groups, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998), pp. 539–552, 1998 .

[27] A. Eskin, C. McMullen, Mixing, counting and equidistribution in Lie groups, Duke Math J. 71 (1993), 181–209.

[28] A. Eskin, S. Mozes, N. Shah, Unipotent flows and counting lattice points on homogeneous varieties, Ann. of Math. 143 (1996), 253–299.

[29] A. Eskin, H. Oh, Representations of integers by an invariant polynomial and unipotent flows, Duke Math. J. 135 (2006), 481–506.

[30] W. T. Gan and H. Oh, Equidistribution of integer points on a family of homogeneous varieties : a problem of Linnik, Compositio Math. 136 (2003), 323–352.

[31] É. Ghys, Dynamique des flots unipotents dans les espaces homogènes, Sém. Bourbaki (1991/92), Exp. n° 747, Astérisque 206 (1992), 93–136.

[32] A. Gorodnik, F. Maucourant, H. Oh, Manin's and Peyre's conjectures on rational points and Adelic mixing, Ann. Sci. École Norm. Sup. 41 (2008), 47–97.

[33] A. Gorodnik, H. Oh, Rational points on homogeneous varieties and equidistribution of adelic periods, preprint (2008), arXiv :0803.1996.

[34] G. Harcos, Equiditribution and L-functions, Lecture Notes Clay Math School, Pisa 2007.

[35] G. Harcos, Ph. Michel, The subconvexity problem for Rankin-Selberg L-functions and equidistribution of Heegner points II, Invent. Math. 163 (2006), 581–655.

[36] B. Host, Nombres normaux, entropie, translations, Israel J. Math. 91 (1995), 419–428.

[37] A. Katok, R. Spatzier, Invariant measures for higher-rank hyperbolic abelian actions, Ergodic Theory Dynam. Systems 16 (1996), 751–778.

[38] B. Klingler, A. Yafaev, On the André-Oort conjecture, preprint 2006.

[39] S. Lang, Algebraic number theory, Graduate Texts in Math. 110, Springer Verlag, 1994.

[40] F. Ledrappier et L.-S. Young, The metric entropy of diffeomorphisms I and II, Ann. of Math. 122 (1985), 509–574.

[41] E. Lindenstrauss, Rigidity of multiparameter actions. Probability in mathematics, Israel J. Math. 149 (2005), 199–226.

[42] E. Lindenstrauss, Invariant measures and arithmetic quantum unique ergodicity, Ann. of Math. 163 (2006), 165–219.

[43] E. Lindenstrauss, B. Weiss, On sets invariant under the action of the diagonal group, Ergodic Theory Dynam. Systems 21 (2001), 1481–1500.

[44] Y. Linnik, Ergodic properties of number fields, Springer-Verlag, 1970.

[45] G. Margulis. Oppenheim conjecture, In Fields medalists' lectures, v. 5 , World Sci. Ser. 20th Century Math., 272–327. World Sci.Pub., 1997.

[46] G. Margulis, Problems and conjectures in rigidity theory, Mathematics : frontiers and perspectives, 161–174, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[47] G. Margulis, On some aspects of the theory of Anosov systems, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[48] G. Margulis, G. Tomanov, Invariant measures for actions of unipotent groups over local fields on homogeneous spaces, Invent. Math. 116 (1994), 347–392.

[49] F. Maucourant, A non-homogeneous orbit closure of a diagonal subgroup, arXiv :0707.2920 (à paraître à Annals).

[50] Ph. Michel, A. Venkatesh, Equidistribution, L-functions and ergodic theory : on some problems of Yu. V. Linnik., International Congress of Mathematicians 2006, Madrid, Volume II, 421–45.

[51] Ph. Michel, A. Venkatesh, Subconvexity for GL_2, preprint 2009.

[52] S. Mozes, Actions of Cartan subgroups, Israel J. Math. 90 (1995), 253–294.

[53] J. Neukirch, Algebraic number theory, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 322, Springer-Verlag, 1999.

[54] H. Oh, Finiteness of compact maximal flats of bounded volume, Ergodic Theory and Dynamical Systems 24 (2004), 217–225.

[55] H. Oh, Orbital counting via mixing and unipotent flows, in Scuola Normale Superiore Summer school, Pisa 2007. Clay Math. Proceedings vol 8 (2008).

[56] A. Popa, Central values of Rankin L-series over real quadratic fields, Compos. Math. 142 (2006), 811–866.

[57] V. Platonov et A. Rapinchuk, Algebraic groups and number theory, Pure and Applied Math. 139, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1994.

[58] M.S. Raghunathan, Discrete subgroups of Lie groups, Springer-Verlag, 1972.

[59] M. Ratner, Factors of horocycle flows, Ergodic Theory Dynam. Systems 2 (1982), 465–489.

[60] M. Ratner, Rigidity of horocycle flows. Ann. of Math. 115 (1982), 597–614.

[61] M. Ratner, Horocycle flows, joinings and rigidity of products, Ann. of Math. 118 (1983), 277–313.

[62] M. Ratner, On Raghunathan's measure conjecture, Ann. of Math. 134 (1991), 545–607.

[63] M. Ratner, Raghunathan's topological conjecture and distributions of unipotent flows, Duke Math. J. 63 (1991), 235–280.

[64] M. Ratner, Distribution rigidity for unipotent actions on homogeneous spaces, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 24 (1991), 321–325.

[65] D. Rudolph, $\times 2$ and $\times 3$ invariant measures and entropy, Ergodic Theory Dynam. Systems 10 (1990), 395–406.

[66] P. Sarnak, Diophantine problems and linear groups, Proc. of the ICM, Vol. I, II (Kyoto, 1990), 459471, Tokyo, 1991. Math. Soc. Japan.

[67] C. Series, On coding geodesics with continued fractions, Monograph. Enseign. Math. 29 (1981), 67–76.

[68] N. Shah. Uniformly distributed orbits of certain flows on homogeneous spaces. Math. Ann. 289 (1991), 315–334.

[69] U. Shapira, A solution to a problem of Cassels and Diophantine properties of cubic fields, preprint 2008.

[70] G. Tomanov, Values of decomposable forms at S-integral points and orbits of tori on homogeneous spaces, Duke Math. J. 138 (2007), 533–562.

[71] G. Tomanov, B. Weiss. Closed orbits for actions of maximal tori on homogeneous spaces, Duke Math. J. 119 (2003), 367–392.

[72] E. Ullmo, A. Yafaev, Galois orbits and equidistribution of special subvarieties : towards the André-Oort conjecture, preprint 2006.

[73] A. Venkatesh, On the work of Einsiedler Katok and Lindenstrauss, Bull. AMS. 2007.

[74] A. Venkatesh, Sparse equidistribution problems, period bounds, and subconvexity, preprint arXiv math.NT/0506224.

[75] J.-L. Waldspurger, Sur les valeurs de certaines fonctions L automorphes en leur centre de symétrie, Compositio Math. 54 (1985), 173–242.

[76] F. Wielonsky, Séries d'Eisenstein, intégrales toroïdales et une formule de Hecke, Enseign. Math. 31 (1985), 93–135.

[77] S. Zelditch, Selberg trace formulae and equidistribution theorems for closed geodesics and Laplace eigenfunctions : finite area surfaces, Mem. Amer. Math. Soc. 96 (1992), no. 465.

[78] S. Zhang, Equiditribution of CM-points on quaternion Shimura varieties, Int. Math. Res. Not. (2005), no 59, 3657–3689.

Emmanuel BREUILLARD

Laboratoire de Mathématiques
Université Paris XI
Bâtiment 425
F–91405 Orsay cedex
E-mail : `breuillard@math.u-psud.fr`