

LOIS DE CONSERVATION ET RÉGULARITÉ PAR
COMPENSATION POUR LES SYSTÈMES ANTISYMMÉTRIQUES
ET LES SURFACES DE WILLMORE
[d'après Tristan Rivière]

par Sylvia SERFATY

1. PROBLÈMES VARIATIONNELS INVARIANTS CONFORMES EN
DIMENSION 2

Considérons un lagrangien (c'est-à-dire une fonctionnelle d'énergie) de la forme

$$(1.1) \quad L(u) = \int_D l(u, \nabla u) \, dx \, dy,$$

où D est un domaine simplement connexe et régulier de $\mathbb{R}^2$ (on peut se restreindre par exemple au disque unité car les questions abordées sont locales) et u est une application de D à valeurs dans une variété $\mathcal{N}$. Le lagrangien est coercif et à croissance quadratique si

$$c|p|^2 \leq l(z, p) \leq C|p|^2$$

pour $C > c > 0$. Il est *invariant conforme* si $L(u \circ f) = L(u)$ pour toute application f conforme de degré 1 qui préserve l'orientation.

La classe des problèmes variationnels invariants conformes contient l'exemple fondamental de l'énergie de Dirichlet

$$E(u) = \int_D |\nabla u|_g^2$$

pour les applications à valeurs dans une variété $\mathcal{N}$ de métrique g , dont les points critiques sont les *applications harmoniques* à valeurs dans $\mathcal{N}$. En fait un résultat de Grüter [Gr] dit que toute énergie invariante conforme coercive en dimension 2 peut se mettre sous la forme

$$(1.2) \quad L(u) = \frac{1}{2} \int_D |\nabla u|_g^2 + u^* \omega$$

où $u^* \omega$ est le « pull-back » de la 2-forme ω , et g est une métrique (ω et g sont C^1 si l est C^1 en z et C^2 en p).

Pour définir les points critiques de L , on peut soit écrire que u est point critique par rapport aux variations de ses coordonnées dans une carte locale, soit considérer la variété $\mathcal{N}$ comme immergée dans un espace euclidien $\mathbb{R}^n$, et écrire que u est point

critique par rapport aux variations de la forme $\pi_{\mathcal{N}}(u + t\varphi)$ où $\varphi \in C^\infty$ et $\pi_{\mathcal{N}}$ est la projection sur la variété $\mathcal{N}$ (bien définie et régulière dans un voisinage tubulaire de $\mathcal{N}$). Dans le premier cas, si u est à valeurs dans une seule carte locale, l'équation des points critiques de (1.2) est

$$(1.3) \quad \Delta u^i + \sum_{k,l} \Gamma_{kl}^i(u) \nabla u^k \cdot \nabla u^l - 2 \sum_{kl} H_{kl}^i(u) \nabla^\perp u^k \cdot \nabla u^l = 0,$$

où u^i sont les coordonnées de u dans la carte locale, $\nabla^\perp$ désigne l'opérateur $(-\partial_y, \partial_x)$, Γ_{kl}^i sont les symboles de Christoffel correspondant à la métrique g , et H_{kl}^i est antisymétrique en k et l et relié à ω . Cette formulation intrinsèque est mal adaptée à l'étude de la régularité des points critiques de (1.2) : en effet, tant qu'on ne sait pas que l'application est justement continue, on ne peut pas garantir qu'elle prend ses valeurs dans une carte unique, même localement. De plus, on n'y voit pas les effets d'antisymétrie que l'on décrira ci-dessous.

Dans le deuxième cas, où l'on voit $\mathcal{N}$ comme immergée dans $\mathbb{R}^n$, l'équation des points critiques prend la forme

$$(1.4) \quad \Delta u + A(u)(\nabla u, \nabla u) = 2H(u)\partial_x u \times \partial_y u,$$

où A est la seconde forme fondamentale de la variété $\mathcal{N}$ ⁽¹⁾, et cette fois les coordonnées de u sont prises dans l'espace ambiant. Cette forme est celle que l'on va examiner et qui permet l'étude de la régularité via l'apparition de l'antisymétrie.

Deux cas particuliers de ce type d'équations sont l'équation des applications harmoniques

$$(1.5) \quad \Delta u + A(u)(\nabla u, \nabla u) = 0$$

et l'équation de la courbure moyenne prescrite

$$(1.6) \quad \Delta u = 2H(u)\partial_x u \times \partial_y u,$$

où $\times$ désigne le produit vectoriel.

Deux questions naturelles se posent sur ces classes d'équations :

- l'existence de limites faibles aux suites de Palais-Smale (ce qui permet de déduire l'existence de solutions au sens faible de l'équation)
- la régularité de ces solutions faibles.

Une difficulté majeure est que ces équations sont toutes « critiques » au sens que la puissance de la non-linéarité ne permet pas de gagner en régularité : a priori une application u d'énergie finie est dans l'espace de Sobolev $W^{1,2}$ (qui ne s'injecte pas dans C^0), et donc le second membre dans (1.4) est a priori seulement dans L^1 , ce qui ne permet de gagner aucune régularité par ellipticité. Un contre-exemple typique est $u(x) = \log \log \frac{1}{|x|}$, non régulier en 0 et solution d'une équation avec ce même type de non-linéarité quadratique en le gradient :

$$\Delta u = -|\nabla u|^2.$$

1. $A(u)(\nabla u, \nabla u)$ désigne $A(u)(\partial_x u, \partial_x u) + A(u)(\partial_y u, \partial_y u)$.

De manière frappante, Frehse [Fr] a montré que cette équation, qui est invariante conforme, est variationnelle, c'est-à-dire provient d'un lagrangien, qui n'est lui cependant pas invariant conforme (et donc les résultats décrits ci-dessous ne s'appliquent pas).

En réalité les solutions de (1.4) ont bien davantage de régularité que $W^{1,2}$, mais pour l'obtenir, il faut utiliser (et remarquer !) une *structure* supplémentaire particulière du second membre : via des transformations sur l'équation, que l'on décrira, on fait apparaître une structure en déterminant jacobien.

Avant de détailler, énonçons tout de suite le résultat général obtenu par Tristan Rivière, qui répond positivement à une conjecture de Hildebrandt :

THÉORÈME 1.1 (Rivière [Ri1]). — *Les points critiques d'énergie finie des lagrangiens invariants conformes en dimension 2 coercifs à croissance quadratique ont une régularité höldérienne $C^{0,\alpha}$ pour tout $0 < \alpha < 1$.*

Le même résultat est vrai en dimension plus grande pour les points critiques *stationnaires* d'énergie finie, pour les mêmes lagrangiens quadratiques. Ceci généralise le résultat de Bethuel [Be2].

Il répond également positivement à la question de la compacité des suites de Palais-Smale, on le verra ci-dessous.

2. LES INGRÉDIENTS UTILISÉS

Le théorème 1.1 étend des résultats précédents d'Hélein, Evans [He, Ev] pour les applications harmoniques (1.5), et Bethuel [Be] pour l'équation à courbure moyenne prescrite (1.6). Il présente en réalité un cadre unifié pour l'équation la plus générale (1.4) (et en fait même une classe plus large d'équations, on le verra ci-dessous), et permet de relaxer nettement les hypothèses précédemment faites : la variété cible $\mathcal{N}$ n'a plus besoin d'être aussi régulière, la courbure prescrite $H(u)$ n'a plus besoin d'être supposée Lipschitz mais peut être seulement L^∞ (répondant positivement à la conjecture de Heinz).

La preuve utilise deux ingrédients cruciaux (qui n'étaient qu'en partie présents dans les résultats précédents) :

- une loi de conservation
- l'intégrabilité par compensation, c'est-à-dire la mise en évidence, via la loi de conservation, d'une structure en déterminant jacobien.

2.1. Intégrabilité par compensation

Le phénomène d'intégrabilité par compensation consiste en un gain de régularité meilleur que prévu dans les équations elliptiques dont le second membre a la forme d'un déterminant jacobien, typiquement

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = \partial_x a \partial_y b - \partial_x b \partial_y a & \text{dans } D \\ \varphi = 0 & \text{sur } \partial D. \end{cases}$$

Le théorème de Wente [We] dit que, si $a, b \in W^{1,2}(D)$, alors $\varphi \in C^0 \cap W^{1,2}(D)$ avec

$$\|\varphi\|_{L^\infty(D)} + \|\varphi\|_{W^{1,2}(D)} \leq C \|\nabla a\|_{L^2(D)} \|\nabla b\|_{L^2(D)}.$$

Un résultat découlant de Coifman-Rochberg-Weiss [CRW] (et dont on trouve une preuve plus simple dans Coifman-Lions-Meyer-Semmes [CMLS]) améliore ce résultat en $\varphi \in W^{2,1}(D)$ avec l'estimée

$$\|\varphi\|_{W^{2,1}(D)} \leq C \|\nabla a\|_{L^2(D)} \|\nabla b\|_{L^2(D)}.$$

Ces deux résultats donnent une régularité meilleure qu'attendue puisque le second membre est seulement L^1 , ce qui ne garantit pas la continuité (c'est le cas limite). Pour les démontrer, négligeant la donnée au bord, on écrit

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r} * (\partial_x a \partial_y b - \partial_x b \partial_y a)$$

et on fait une intégration par parties astucieuse en coordonnées polaires (et pour le résultat de [CMLS] on utilise en plus la dualité Hardy-BMO).

On voit que le théorème de Wente permet par exemple de traiter le cas de l'équation à courbure moyenne constante $\Delta u = 2H \partial_x u \times \partial_y u$ dont le second membre a essentiellement cette structure jacobienne. Le cas plus général $H(u)$ avec H Lipschitz est traité dans [Be] en exploitant la même idée. La régularité $u \in C^{0,\alpha}$ se déduit de l'estimée de Wente par des arguments assez classiques utilisant des estimées à la Morrey : on montre que $\sup_\rho \rho^{-2\alpha} \int_{B(x_0,\rho)} |\nabla u|^2 < \infty$, ce qui entraîne $\sup_\rho \rho^{-\alpha} \int_{B(x_0,\rho)} |\Delta u| < \infty$. Des estimées d'Adams sur les potentiels de Riesz [Ad], on déduit $u \in W^{1,p}$ pour un $p > 2$ puis $u \in C^{0,\alpha}$.

2.2. Lois de conservation

Le phénomène est facile à observer dans le cas des applications harmoniques à valeurs dans la sphère, et c'est le seul cas où il était déjà connu. L'équation est dans ce cas

$$(2.1) \quad -\Delta u = u |\nabla u|^2.$$

Un calcul direct (observation de J. Shatah) donne que les solutions de (2.1) vérifient aussi

$$(2.2) \quad \forall i, j, \quad \operatorname{div}(u^i \nabla u_j - u_j \nabla u^i) = 0.$$

Ceci est une loi de conservation (la divergence d'une certaine quantité est nulle). Le lemme de Poincaré permet d'en déduire l'existence d'applications B_j^i telles que

$u^i \nabla u_j - u_j \nabla u^i = \nabla^\perp B_j^i$. On peut alors réinjecter ceci dans (2.1) pour voir que, pour tout i

$$-\Delta u^i = \sum_j \partial_x B_j^i \partial_y u^j - \partial_y B_j^i \partial_x u^j.$$

On retrouve dans le second membre une structure de déterminant jacobien qui permet via le théorème de Wente et selon la méthode décrite ci-dessus de déduire la régularité des applications faiblement harmoniques à valeurs dans la sphère (résultat de F. Hélein).

La loi de conservation (2.2) peut être vue comme un cas particulier d'un principe général : le théorème de Noether, qui dit qu'à chaque fois qu'un lagrangien possède une symétrie infinitésimale, ses points critiques vérifient une loi de conservation $\operatorname{div} J = 0$ (où J est le courant de Noether associé à la symétrie), voir [He]. (2.2) reflète alors simplement l'invariance du lagrangien correspondant par les rotations de la sphère. Dans le cas où la cible n'est plus la sphère, cette loi de conservation disparaît. F. Hélein a réussi à y remédier par l'introduction de la « méthode du repère mobile », une méthode assez élaborée, qui permet de traiter le cas d'une variété cible quelconque de classe C^5 et de montrer à nouveau la régularité des applications faiblement harmoniques. Pour plus de détails, on renvoie à [He].

L'une des grandes réussites de la méthode de Tristan Rivière est de s'affranchir de l'utilisation de la méthode du repère mobile, et de trouver pour la première fois une classe de lois de conservation valables pour toutes les variétés et non plus seulement la sphère, et demandant moins de régularité sur celles-ci.

3. LES SYSTÈMES ANTISYMMÉTRIQUES

3.1. Le résultat principal

Le travail de Tristan Rivière place l'étude de l'équation des points critiques des lagrangiens invariants conformes quadratiques (1.4) dans un cadre encore plus large, où l'on peut continuer d'utiliser les deux principes vus précédemment : lois de conservation et intégrabilité par compensation. Ce cadre plus large est celui des systèmes d'équations elliptiques de la forme

$$(3.1) \quad \Delta u = \Omega(x, u, \nabla u) \cdot \nabla u,$$

où Ω est une matrice $n \times n$ *antisymétrique* à valeurs dans les champs de vecteurs, appartenant à L^2 , et u est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (on travaille toujours sur le domaine D en dimension 2). Il les appelle des « systèmes de Schrödinger antisymétriques ». Dans (3.1) il faut comprendre ∇u comme un vecteur de composantes ∇u^j où u^j sont encore les coordonnées de u ; chaque Ω_j^i est en fait un vecteur à deux composantes (mais Ω peut évidemment être « dépliée » en une matrice $2n \times 2n$, toujours antisymétrique) et le second membre est le vecteur de composantes $\sum_j \Omega_j^i \nabla u^j$.

La première observation cruciale est que tous les cas précédents (c'est-à-dire (1.4)) rentrent dans ce cadre plus large (noter que les équations (3.1) ne sont pas toutes

forcément variationnelles). Par exemple l'équation de courbure moyenne prescrite dans $\mathbb{R}^3$, $\Delta u = 2H(u)\partial_x u \times \partial_y u$ se retrouve en choisissant

$$\Omega = H(u) \begin{pmatrix} 0 & -\nabla^\perp u^3 & \nabla^\perp u^2 \\ \nabla^\perp u^3 & 0 & -\nabla^\perp u^1 \\ -\nabla^\perp u^2 & \nabla^\perp u^1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est bien antisymétrique et à composantes dans L^2 , si H est supposée simplement L^∞ et $u \in W^{1,2}$. La seconde observation cruciale est que la forme (3.1) entraîne toujours une loi de conservation, pour une raison géométrique cette fois inconnue.

THÉORÈME 3.1 (Rivière [Ri1]). — *Soit $\Omega \in L^2(D)$ antisymétrique.*

1. *Il existe $A \in W^{1,2}(D)$ matrice carrée telle que*

$$(3.2) \quad \operatorname{div}(\nabla A - A\Omega) = 0 \quad \|A\|_{L^\infty} + \|A^{-1}\|_{L^\infty} < +\infty.$$

On peut alors écrire

$$(3.3) \quad \nabla A - A\Omega = -\nabla^\perp B.$$

2. *L'existence de tels A, B implique que (3.1) est équivalente à la loi de conservation*

$$(3.4) \quad \operatorname{div}(A\nabla u - B\nabla^\perp u) = 0.$$

3. *Si $u \in W_{loc}^{1,2}$ est solution de (3.1), ou de manière équivalente (3.4), alors u est $C^{0,\alpha}$ pour tout $0 < \alpha < 1$.*

Ainsi, toutes les équations de la forme (3.1) impliquent (et sont même équivalentes à) une loi de conservation (3.4). De plus cette nouvelle loi coïncide avec celle connue dans le cas des applications harmoniques à valeurs dans la sphère et la généralise donc bien au-delà.

Une question reste mystérieuse : on ne sait pas à quelle symétrie ou à quel fait géométrique correspond la loi de conservation (3.4).

Tristan Rivière voit le résultat ci-dessus comme un analogue de la « méthode de variation de la constante » pour les équations différentielles ordinaires : en effet, il commence par résoudre une équation auxiliaire, en l'occurrence (3.2) (qui peut s'écrire $\operatorname{div}\nabla_\Omega A = 0$ avec $\nabla_\Omega = \nabla - \Omega$), puis il exprime toute solution u de (3.1) à l'aide de A , et cela permet d'« intégrer » l'équation (3.1) sous la forme (3.4).

3.2. Les trois étapes de la preuve

Une première tentative serait de faire une décomposition de Hodge de $\Omega : \Omega = \nabla P + \nabla^\perp \xi$. On n'a alors qu'un contrôle dans $W^{1,2}$ de P et ξ . L'équation se réécrit

$$\Delta u = \nabla P \cdot \nabla u + \nabla^\perp \xi \cdot \nabla u.$$

Le terme $\nabla P \cdot \nabla u$ empêche en fait d'obtenir de la régularité ou compacité sur u . L'idée est de remplacer cette décomposition de Hodge par une sorte de décomposition de

Hodge non linéaire, ou de changement de jauge, inspiré d’Uhlenbeck [Uh], en écrivant Ω sous la forme

$$(3.5) \quad \Omega = P^{-1} \nabla^\perp \xi P + P^{-1} \nabla P$$

où ξ est à valeurs dans les matrices antisymétriques et P dans les rotations, avec l’estimation

$$(3.6) \quad \|\nabla \xi\|_{L^2}^2 + \|\nabla P\|_{L^2}^2 \leq C \|\Omega\|_{L^2}^2.$$

Ici, contrairement à ci-dessus, on a un contrôle L^∞ sur P puisqu’il est à valeurs dans les rotations. On peut observer par un calcul direct que $-\operatorname{div}(P \nabla u) = \nabla^\perp \xi \cdot P \nabla u$, donc on n’est pas loin d’avoir une équation dont le second membre est un jacobien. Il faut perturber encore un peu P pour y arriver.

Une fois la forme (3.5) obtenue, la résolution de (3.3) est équivalente à celle de

$$\operatorname{div}(\nabla A - A P^{-1} \nabla^\perp \xi P - A P^{-1} \nabla P) = 0.$$

À cause de l’observation précédente, on cherche A comme une perturbation de P , i.e. sous la forme $(I + \varepsilon)P$, et cela revient donc à résoudre

$$\operatorname{div}(\nabla \varepsilon P + (I + \varepsilon) \nabla P - (I + \varepsilon) \nabla^\perp \xi P - (I + \varepsilon) \nabla P) = 0,$$

soit

$$(3.7) \quad \operatorname{div}(\nabla \varepsilon P) = \operatorname{div}((I + \varepsilon) \nabla^\perp \xi P).$$

Lorsque Ω est suffisamment petit en norme L^2 (on peut toujours localiser pour avoir cela), $\nabla \xi$ et ∇P le sont aussi par (3.6). En écrivant le second membre en coordonnées, on voit qu’il ne contient que des sommes de jacobiens, donc par le théorème de Wente on obtient que $\varepsilon \in L^\infty \cap W^{1,2}$. On peut alors résoudre (3.7) par point fixe dans cet espace (en rajoutant les conditions de bord appropriées). Ceci donne que A est bien proche dans L^∞ des rotations (mais non pas d’une seule rotation⁽²⁾) et on a donc bien toutes les conditions de (3.2).

La loi de conservation (3.4) se déduit par un calcul direct de (3.3) et (3.1) : on vérifie que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(A \nabla u - B \nabla^\perp u) &= A \Delta u + \nabla A \cdot \nabla u - \nabla B \cdot \nabla^\perp u \\ &= A \Delta u + (\nabla A + \nabla^\perp B) \cdot \nabla u = A(\Delta u + \Omega \cdot \nabla u). \end{aligned}$$

Pour en déduire la régularité höldérienne de u , on remarque que, grâce à (3.3), $A \nabla u$ vérifie le système

$$(3.8) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(A \nabla u) = \nabla B \cdot \nabla^\perp u \\ \operatorname{rot}(A \nabla u) = -\nabla A \cdot \nabla^\perp u, \end{cases}$$

c’est-à-dire un système elliptique dont les seconds membres sont des déterminants jacobiens, dont on déduit par le théorème de Wente une estimée quantitative

2. Une des difficultés ici est que l’application qui à Ω fait correspondre P n’est pas continue.

sur $\|A\nabla u\|_{L^2(B_r)}$, puis sur $\|\nabla u\|_{L^2(B_r)}$ par borne sur $\|A^{-1}\|_{L^\infty}$ (il est ici crucial que A^{-1} soit L^∞ , ce qui provient du fait que P l'est). La preuve de régularité se termine ensuite comme dans les cas classiques.

Les résultats de compacité des solutions de (3.1) ou des suites de Palais-Smale pour (1.4) sont assez directs une fois connue l'équivalence avec la loi de conservation (3.4).

THÉORÈME 3.2 (Rivière [Ri1]). — *Soit u_k convergent faiblement vers u dans $W^{1,2}(D)$, Ω_k antisymétriques convergent faiblement vers Ω dans $L^2(D)$ et f_k convergent fortement vers 0 dans $H^{-1}(D)$, tels que $-\Delta u_k = \Omega_k \cdot \nabla u_k + f_k$. Alors $-\Delta u = \Omega \cdot \nabla u$ et $u \in C^{0,\alpha}(D)$.*

Pour résumer, l'apport de l'approche de T. Rivière peut se synthétiser par les points suivants :

- Elle place le problème dans le cadre plus large des systèmes antisymétriques.
- L'antisymétrie est, elle, une condition stable (par rapport par exemple aux perturbations de la variété cible).
- Elle introduit des lois de conservation pour tous ces systèmes (et non plus seulement pour les applications harmoniques à valeurs dans la sphère). Celles-ci sont trouvées via une transformation de jauge non linéaire qui exploite l'antisymétrie.
- Ce faisant, elle s'affranchit de la méthode du repère mobile, et généralise les courants de Noether.
- Elle permet de relaxer les hypothèses de régularité sur la variété cible et la courbure moyenne H (il suffit que H soit L^∞ et que $\mathcal{N}$ soit C^2).

3.3. Généralisations

Comme on l'a mentionné, ces résultats ont des généralisations en dimension (du domaine) supérieure, mais il faut alors travailler (au lieu de $W^{1,2}$) dans des espaces de Morrey qui rendent l'équation critique au lieu de sur-critique (une condition suffisante est de supposer les points critiques stationnaires).

Rivière a aussi étendu ces idées avec F. Da Lio [DR1, DR2] à l'étude de la régularité des « systèmes de Schrödinger antisymétriques » de la forme

$$\Delta u = \Omega(x, u, \nabla u) \cdot u,$$

où Ω est antisymétrique, à l'étude d'équations non locales comme $\Delta^{1/4}u = \Omega \cdot u$ dont un cas particulier est celui des applications demi-harmoniques. De nouveau, l'idée est de « factoriser » par une solution A d'un problème auxiliaire, puis la structure particulière d'antisymétrie permet de gagner de la régularité par compensation.

4. LES SURFACES DE WILLMORE

La fonctionnelle de Willmore est l'énergie

$$(4.1) \quad W(\Phi(\Sigma)) = \int_{\Sigma} |\vec{H}|^2 dv_g$$

où Σ est une surface, Φ une immersion de Σ dans $\mathbb{R}^n$ et $\vec{H}$ est le vecteur à courbure moyenne de la surface, et g la métrique induite sur $\Phi(\Sigma)$ par celle de $\mathbb{R}^n$. Elle a été introduite pour la première fois par Blashke [Bl], puis étudiée par son élève Thomsen [T] et par Willmore [Wi]. Cette énergie est invariante par difféomorphisme conforme appliqué à Φ et également par changement conforme de métrique sur l'espace d'arrivée. De plus, Willmore a montré que, pour toute surface fermée sans bord, on a $W(\Phi(\Sigma)) \geq 4\pi$. Il est aussi utile de noter que, par le théorème de Gauss-Bonnet, l'énergie de Willmore contrôle $\int |\nabla \vec{n}|_g^2$ où $\vec{n}$ est l'application de Gauss de la surface (c'est-à-dire le vecteur normal en chaque point) et qu'elle est équivalente à étudier $\int_{\Sigma} |\kappa_1 - \kappa_2|^2$ où κ_1 et κ_2 sont les courbures principales.

Pour simplifier la présentation on se limitera au cas où la dimension de l'espace ambiant n vaut 3. Les points critiques de W (par perturbations de la forme $\Phi + t\xi$) s'appellent les surfaces de Willmore, et quand ce sont des immersions régulières avec $n = 3$, ils sont solutions de l'équation

$$(4.2) \quad \Delta_g H + 2H(|H|^2 - K) = 0$$

où K est la courbure de Gauss. Noter qu'il s'agit d'un problème d'ordre 4.

Les surfaces et l'énergie de Willmore sont importantes en géométrie conforme et interviennent dans une variété d'applications : masse de Hawking en relativité générale, élasticité, modélisation des membranes cellulaires en biologie, optique...

Les surfaces minimales, qui sont à courbure moyenne nulle, sont des cas particuliers de surfaces de Willmore ; mais la structure de toutes les solutions de (4.2) est délicate à comprendre. Celles-ci ne forment pas un ensemble compact à cause de l'invariance par le groupe de Möbius, par lequel il faut donc quotienter.

Voici un certain nombre de questions qui se posent naturellement sur la fonctionnelle de Willmore :

- La description complète de l'ensemble des immersions de Willmore d'une surface Σ donnée. Sont-elles toujours régulières ? Y a-t-il compacité des suites de Palais-Smale ?
- Existe-t-il toujours un minimiseur de l'énergie de Willmore parmi les immersions d'une surface donnée ? Peut-on l'identifier ? La conjecture de Willmore dit par exemple qu'un tore particulier, le « tore de Willmore », est l'unique minimiseur parmi les immersions du tore.
- L'ensemble des surfaces de Willmore en dessous d'une certaine énergie est-il compact modulo transformations conformes ?

- Y a-t-il une notion d'immersions de Willmore au sens faible ? Si oui, quelles sont leurs singularités possibles ?

L'étude de Tristan Rivière a permis d'avancer grandement dans la résolution de ces questions et on y retrouve les deux mêmes ingrédients que dans celle des lagrangiens quadratiques invariants conformes : les lois de conservation et l'intégrabilité par compensation.

Les difficultés apparaissent immédiatement puisque l'équation (4.2) a une structure qui pose des problèmes encore plus grands que ceux de l'équation (1.4) : elle est très non linéaire puisque l'opérateur dans (4.2) dépend de la métrique, et, contrairement aux équations (1.4), elle n'a même pas de sens dans l'espace d'énergie (i.e. pour $H \in L^2$). À cause de cela, jusqu'ici l'équation n'était jamais utilisée.

Il était connu qu'une surface est de Willmore si et seulement si son « application de Gauss conforme » est harmonique à valeurs dans une certaine variété pseudo-riemannienne. Inspiré par ses découvertes sur les applications harmoniques, Tristan Rivière a donc cherché une « loi de conservation » ou une forme divergente de l'équation des surfaces de Willmore, et il l'a trouvée (ici on cite le résultat pour $n = 3$, mais il y a un analogue pour n plus grand) :

THÉORÈME 4.1 (Rivière [Ri2]). — $\Phi(\Sigma)$ est une immersion de Willmore régulière (c'est-à-dire une solution régulière de (4.2)) si et seulement si

$$(4.3) \quad \operatorname{div}(2\nabla \vec{H} - 3H\nabla \vec{n} + \vec{H} \times \nabla^\perp \vec{n}) = 0,$$

où les opérateurs sont pris par rapport à la métrique plate en coordonnées conformes.

Noter qu'il existe une version intrinsèque de ce résultat, mais que le choix de la paramétrisation conforme est celui qui rend l'équation elliptique.

De ce résultat découlent toute une série de résultats fondamentaux d'existence, de compacité et de régularité pour les surfaces de Willmore.

Le premier point crucial est que la quantité qui est à divergence nulle dans (4.3) a un sens dès que H est dans L^2 (ce qui implique que $\vec{n}$ l'est aussi) c'est-à-dire dans l'espace naturel d'énergie. Ceci permet donc de donner un sens/une forme faible à l'équation (4.2). On peut alors parler de surfaces faiblement Willmore comme on parle d'application faiblement harmoniques.

Cette forme faible ne permet cependant pas directement de passer à la limite dans des suites d'immersions de Willmore faibles à cause des produits du type $H\nabla \vec{n}$. Mais la relation (4.3) peut s'« intégrer » une seconde fois : par le lemme de Poincaré, il existe (localement) $\vec{L}$ tel que

$$\nabla^\perp \vec{L} = 2\nabla \vec{H} - 3H\nabla \vec{n} + \vec{H} \times \nabla^\perp \vec{n}.$$

Un calcul permet ensuite d'arriver à la deuxième relation cruciale que

$$\begin{cases} \nabla S := \vec{L} \cdot \nabla \Phi \\ \nabla \vec{R} := \nabla \Phi \times \vec{L} + 2H\nabla \Phi \end{cases}$$

vérifient

$$(4.4) \quad \begin{cases} \Delta S = \nabla \vec{n} \cdot \nabla^\perp \vec{R} \\ \Delta \vec{R} = \nabla \vec{R} \times \nabla^\perp \vec{n} - \nabla S \nabla^\perp n. \end{cases}$$

Dans ce système, on retrouve de nouveau un second membre sous forme jacobienne. On peut alors, à l'aide d'une amélioration du théorème de Wente due à Bethuel [Be] et des techniques classiques mentionnées auparavant, en déduire que les surfaces de Willmore (faibles) sont $C^{0,\alpha}$ puis analytiques, et donc que la notion faible et la notion forte coïncident.

THÉORÈME 4.2 (Rivière [Ri2]). — *Une immersion faiblement Willmore d'énergie de Willmore finie est analytique.*

Il en découle aussi l'existence de minimiseurs de l'énergie de Willmore (par semi-continuité de l'énergie dans la classe des surfaces régulières).

Le système (4.4) est un corollaire de (4.3) mais n'est cependant pas équivalent à (4.3). Il est équivalent (collaboration avec Y. Bernard [BR]) à une équation qu'on peut appeler « Willmore conforme » car elle correspond aux points critiques de l'énergie de Willmore à l'intérieur d'une classe conforme prescrite. Ces points critiques ne sont pas des surfaces de Willmore mais seulement des surfaces de Willmore modulo une fonction holomorphe, dont on peut parfois se débarrasser. À cause de cela, on ne peut en tous cas pas affirmer qu'une limite de surfaces de Willmore (faibles ou fortes) est une surface de Willmore, mais seulement que c'est une « surface de Willmore conforme ». Ceci est cependant suffisant, comme on l'a vu, pour régler la question de la régularité, l'existence de minimiseurs pour les immersions de toute surface abstraite, et la compacité des suites de Palais-Smale.

La découverte de T. Rivière de ces nouvelles lois de conservation permet donc de donner un sens à l'équation (4.3) et de l'analyser et, ce faisant, d'établir un « calcul des variations » complet pour l'énergie de Willmore, qui était complètement absent, et qui simplifie beaucoup les choses par rapport aux approches antérieures comme celle de Simon [Si]. Pour l'instant tous les résultats sont locaux, mais des résultats globaux vont apparaître dans [Ri3].

Lorsque la condition $\int |H|^2 < 8\pi$ est vérifiée, l'analyse se simplifie, car il est connu qu'on reste dans la classe des plongements (c'est la condition de Li-Yau). T. Rivière prouve alors des résultats d'éliminabilité des singularités, et la compacité des suites d'immersions de Willmore dans ce cas.

RÉFÉRENCES

- [Ad] D. Adams – A note on Riesz potentials, *Duke Math. J.* **42** (1975), 765–778.
- [BR] Y. Bernard, T. Rivière – Local Palais-Smale sequences for the Willmore functional, prépublication.
- [Be] F. Bethuel – Un résultat de régularité pour les solutions de l'équation des surfaces à courbure moyenne prescrite *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér I Math.* **314** (1992), 1003–1007.
- [Be2] F. Bethuel – On the singular set of stationary harmonic maps, *Manuscripta Math* **78** (1993), 417–443.
- [Bl] W. Blaschke – *Vorlesungen über differential Geometrie III*, Springer, 1929.
- [CMLS] R. Coifman, P.-L. Lions, Y. Meyer, S. Semmes – Compensated compactness and Hardy spaces, *J. Math. Pures Appl.* **72** (1993), 247–286.
- [CRW] R. Coifman, R. Rochberg, G. Weiss – Factorization theorems for Hardy spaces in several variables, *Ann. of Math.* **103** (1976), 611–635.
- [DR1] F. Da Lio, T. Rivière – 3-commutator estimates and the regularity of $1/2$ -harmonic maps into spheres, prépublication.
- [DR2] F. Da Lio, T. Rivière – The regularity of solutions to critical non-local Schrödinger systems on the line with antisymmetric potential and applications, prépublication.
- [Ev] L. C. Evans – Partial Regularity for stationary harmonic maps into spheres, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **116** (1991), 101–113.
- [Fr] J. Frehse – A discontinuous solution of a mildly nonlinear elliptic system, *Math. Z.* **134** 229–230.
- [Gr] M. Grüter – Conformally invariant variational integrals and the removability of isolated singularities, *Manuscripta Math.* **47** (1984), 85–104.
- [He] F. Hélein – *Harmonic maps, conservation laws and moving frames*, Cambridge Univ. Press, 2002.
- [Ri1] T. Rivière – Conservation laws for conformally invariant variational problems, *Invent. Math.* **168** (2007), 1–22.
- [Ri2] T. Rivière, Analysis aspects of Willmore surfaces, *Invent. Math.* **174** (2008), 451–463.
- [Ri3] T. Rivière – En préparation.

- [Si] L. Simon, Existence of surfaces minimizing the Willmore functional, *Comm. Anal. Geom.* **1** (1993), 281–326.
- [T] G. Thomsen – Über konforme Geometrie, I. Grundlagen der konformen Flächentheorie. *Abh. Math. Sem. Hamburg* (1923), 31–56.
- [Uh] K. Uhlenbeck – Connections with L^p bounds on the curvature, *Comm. Math. Phys.* **83** (1982), 31–42.
- [We] H. Wente – An existence theorem for surfaces of constant mean curvature, *J. Math. Anal. Appl.* **26** (1969), 318–344.
- [Wi] T. Willmore – *Riemannian geometry*, Oxford Univ. Press, 1997.

Sylvia SERFATY

Laboratoire J.-L. Lions

Université Pierre et Marie Curie – Paris VI

Boîte 247

2 place Jussieu

F-75252 Paris Cedex 05

et

Courant Institute of Mathematical Sciences

251 Mercer Street

New York, NY 10012 – U.S.A.

E-mail : `serfaty@ann.jussieu.fr`