Séminaire BOURBAKI Novembre 2013
66ème année, 2013-2014, n^{o} 1076

PROGRÈS RÉCENTS CONCERNANT LE PROGRAMME DE KAC EN THÉORIE CINÉTIQUE
[d'après Stéphane Mischler et Clément Mouhot]

par **Laurent DESVILLETTES**

1. INTRODUCTION

1.1. Le sixième problème de Hilbert

Les principales équations de la mécanique des fluides (systèmes d'Euler et de Navier-Stokes des fluides compressibles et incompressibles, équation de Boltzmann des gaz raréfiés) ont été introduites dès le dix-huitième et le dix-neuvième siècle, et sont utilisées à grande échelle (souvent dans le cadre de couplages avec d'autres équations) pour la simulation numérique de processus naturels (météorologie, océanographie, etc.) ou industriels (aéronautique, génie des procédés, acoustique, etc.).

Ces équations peuvent être vues comme des substituts aux systèmes d'équations différentielles ordinaires vérifiés par les trajectoires (dans l'espace des phases) de particules soumises aux équations de la mécanique classique, lorsque le nombre de ces particules est très grand.

Les fonctions intervenant comme paramètres dans les équations de la mécanique des fluides (viscosités dans les équations de Navier-Stokes des fluides compressibles, section efficace de collision dans l'équation de Boltzmann) peuvent, par des raisonnements heuristiques, se déduire des potentiels d'interaction grâce à des formules connues depuis les travaux de Boltzmann ([Bol]) et ceux de Chapman et Enskog ([Ch]).

La question de la formalisation mathématique du passage de systèmes de N particules vers ces équations a été explicitement posée dès 1900 au Congrès de Mathématiques à Paris par Hilbert. Dans son sixième problème présenté à cette époque, Hilbert proposait de *« développer mathématiquement les limites qui mènent de la vision atomiste aux lois de la mécanique des milieux continus »*.

La question spécifique de la dérivation de l'équation de Boltzmann à partir des systèmes de N particules est progressivement apparue comme l'un des points décisifs dans le sixième problème de Hilbert, en particulier parce qu'elle est reliée à la question fascinante de l'apparition de l'irréversibilité dans les passages à la limite réalisés à partir de systèmes réversibles. Notons qu'un autre aspect important du sixième problème, celui du lien entre l'équation de Boltzmann et les équations d'Euler et de Navier-Stokes, a connu des développements récents qui ont été présentés dans un précédent séminaire Bourbaki (cf. [V] et les travaux qui y sont cités).

Un résultat décisif dans l'étude mathématique de la dérivation de l'équation de Boltzmann à partir des systèmes de N particules a été obtenu dans les années 70 par Lanford (cf. [L]). Il permet, en rendant rigoureux l'asymptotique dite de Boltzmann-Grad, de montrer la validité de cette équation (avec un choix spécifique de sections efficaces) dans le cadre de solutions locales en temps, ou, grâce à une extension due à Illner et Pulvirenti, dans le cadre de solutions proches de zéro (cf. [IP1] et [IP2]). La possibilité d'étendre ce résultat de validité à un cadre de solutions (qui ne soient pas proches du vide) définies pour des temps plus significatifs au niveau macroscopique est une question restée pour l'instant sans réponse, malgré des recherches actives (cf. [GST]).

1.2. Le programme de Kac

Un programme d'étude introduit au milieu du 20ème siècle par Kac (cf. [K1] et [K2]) propose un point de vue différent sur la justification de l'équation de Boltzmann. L'idée est de se concentrer sur l'évolution des vitesses des particules, sans chercher à suivre l'évolution de leurs positions comme on le fait dans l'asymptotique de Boltzmann-Grad.

On remplace alors comme point de départ de l'étude les équations de Newton (typiquement, $6N$ équations différentielles ordinaires qui permettent de suivre les particules dans l'espace des phases) par un processus markovien de saut dans l'espace $\mathbb{R}^{3N}$ des vitesses des N particules. Ce processus s'écrit de manière générale à l'aide d'un générateur (il s'agit ici du générateur du problème « backward ») de la forme (pour $v_1, \dots, v_N \in \mathbb{R}^3$, et $\phi \in C_b(\mathbb{R}^{3N})$)

$$(G^N \phi)(v_1, \dots, v_N) = \frac{1}{N} \sum_{1 \le i < j \le N} \Gamma(|v_i - v_j|) \tag{1}$$

$$\times \int_{S^2} \Big(\phi(v_1, \dots, v_i', \dots, v_j', \dots, v_N) - \phi(v_1, \dots, v_N) \Big)\, b(\cos\theta_{ij})\, d\sigma,$$

où Γ est une fonction de la norme de la vitesse relative $|v_i - v_j|$ (ce qui est cohérent si l'on veut s'assurer de l'invariance galiléenne du processus), et les vitesses v_i', v_j' obtenues après un saut du processus sont données par

$$v_i' = \frac{v_i + v_j}{2} + \frac{|v_i - v_j|}{2}\,\sigma, \qquad v_j' = \frac{v_i + v_j}{2} - \frac{|v_i - v_j|}{2}\,\sigma$$

(il s'agit là d'une paramétrisation des collisions préservant la quantité de mouvement et l'énergie cinétique). Enfin, b est une fonction positive du paramètre angulaire

$$\cos\theta_{ij} = \frac{v_i - v_j}{|v_i - v_j|} \cdot \sigma.$$

Intuitivement, ce processus peut être compris de la manière suivante : parmi un jeu de N particules de vitesses $v_1, \ldots, v_N \in \mathbb{R}^3$, on en sélectionne deux (celles de vitesses v_i et v_j) après avoir attendu un temps exponentiel, et on change alors la vitesse de ces deux particules en v'_i, v'_j après tirage aléatoire d'un vecteur (sur la sphère) σ. Le temps exponentiel et la loi du tirage aléatoire sont choisis pour être cohérents avec Γ et b. On itère ensuite cette procédure pour avancer dans le temps. Notons enfin que, comme $\frac{1}{N} \sum_{1 \le i < j \le N}$ est d'ordre N, on s'attend à ce qu'il y ait de l'ordre de N sauts par unité de temps, soit de l'ordre d'un saut par particule et par unité de temps (si on avait pris $\frac{1}{N^2}$ au lieu de $\frac{1}{N}$, comme cela peut *a priori* sembler plus naturel, on obtiendrait un processus associé à des temps exponentiels d'ordre 1, mais pour lequel la probabilité *pour une particule donnée* de sauter dans un temps d'ordre 1 tend vers 0 avec N).

On comprend l'intérêt qu'a pu susciter l'introduction de ce processus dans les décennies qui ont suivi quand on sait que la grande majorité des codes de simulation numérique utilisés en pratique pour l'équation de Boltzmann sont du type « DSMC » (Direct Simulation Monte Carlo), c'est-à-dire qu'ils utilisent une discrétisation particulaire (une fonction y est approximée par une combinaison linéaire de masses de Dirac), et qu'à chaque pas de temps un processus identique ou très proche de celui précédemment décrit est mis en place dans chaque maille d'espace pour traiter l'évolution de la partie « vitesses » de l'équation de Boltzmann (cf. [Bi]).

Le programme de Kac consiste à étudier les relations entre le processus de générateur (1) et l'équation de Boltzmann homogène en espace définie ainsi :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,v) = Q(f)(t,v), \tag{2}$$

avec

$$Q(f)(t,v) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} \Big(f(t,v'^*)\, f(t,v') - f(t,v^*) f(t,v) \Big)\, \Gamma(|v-v^*|)\, b(\cos\theta)\, d\sigma dv^*, \tag{3}$$

où

$$v' = \frac{v+v^*}{2} + \frac{|v-v^*|}{2}\,\sigma, \qquad v'^* = \frac{v+v^*}{2} - \frac{|v-v^*|}{2}\,\sigma,$$

et

$$\cos\theta = \frac{v-v^*}{|v-v^*|} \cdot \sigma.$$

Plus précisément, on souhaite savoir en quel sens les solutions de l'équation maîtresse (« forward ») associée au processus de générateur (1) convergent vers les solutions de l'équation de Boltzmann homogène en espace (2).

L'une des difficultés associées à ce type de formulation apparaît immédiatement : ces deux équations ne portent pas sur des inconnues agissant sur les mêmes espaces. On verra dans la suite comment l'utilisation de produits tensoriels et de marginales permet de régler ce problème.

Pour terminer cette présentation générale, on indique que le choix des fonctions Γ et b influe grandement sur les propriétés de l'équation de Boltzmann aussi bien que sur celles du processus de Markov. L'opérateur Q devient singulier si l'on considère des b qui ne sont pas intégrables, ou bien des Γ qui ne sont pas bornés. Par contre le semi-groupe qui lui est associé devient régularisant ou permet la création de moments dans ces mêmes situations (cf. par exemple [ADVW] et [De]).

Le travail de Mischler et Mouhot ([MM]) constitue une avancée tout à fait remarquable dans le programme de Kac. Leurs résultats complètent une série de travaux dus en particulier a McKean ([MK]), Sznitman ([S]) et Graham, Méléard ([GM]), mais les méthodes qu'ils introduisent diffèrent grandement de celles mises en place par ces auteurs (en particulier celles basées sur des représentations des solutions utilisant des arbres). Elles sont plutôt dans l'esprit d'un travail plus ancien effectué par Grünbaum ([Gru]). On renvoie également à l'ouvrage de Kolokoltsov (cf. [Ko]).

Avant de présenter de manière technique et en détail deux des théorèmes principaux du travail de Mischler et Mouhot, on indique en quoi leurs résultats améliorent indiscutablement les connaissances sur le programme de Kac.

– Tout d'abord, ils présentent des estimations qui sont explicites en terme des paramètres du problème, en particulier le nombre N de particules considérées, et le temps T d'évolution des équations (cet aspect explicite se trouvait déjà présent dans les travaux de Graham et Méléard, cf. [GM]). Les résultats qu'ils proposent vont donc bien au-delà d'une simple limite, et s'apparentent au type d'estimations que l'on souhaite obtenir en analyse numérique théorique. À cet aspect explicite s'ajoute une grande lisibilité des estimations, en ce sens que les différents termes d'erreur qui y apparaissent proviennent chacun d'un calcul bien identifiable.
– D'autre part, les estimations peuvent être écrites dans un cadre qui les rend uniformes en temps. Il s'agit là d'un point décisif qui différencie le programme de Kac de l'asymptotique de Botzmann-Grad (pour laquelle on a des résultats qui explosent en temps fini dès que les données initiales ne sont pas proches du vide). On peut vérifier sur ces estimations que la convergence vers l'équilibre lorsque $t \to \infty$ peut être vue comme un processus uniforme par rapport au nombre N de particules considérées (voir en particulier la notion de chaos entropique, cf. [MM]). Dans ce contexte, l'irréversibilité de l'équation de Boltzmann (théorème H, cf. [Ce] par exemple) peut être vue comme une conséquence de l'irréversibilité du processus de Markov à N particules : cet aspect permet de répondre positivement à une question de Kac concernant la convergence de l'entropie du problème à N particules vers l'entropie du problème limite.
– De plus, les sections efficaces qui sont considérées (avec les notations utilisées dans cet exposé, il s'agit des fonctions Γ et b) sont parmi les plus intéressantes tant du point de vue des applications (la plupart des sections issues de la physique peuvent être vues comme des interpolées des sections utilisées dans le travail de Mischler et Mouhot, cf. [Ce]), que du point de vue de la structure mathématique des objets introduits : comme indiqué précédemment, les b non intégrables et les Γ non

bornés conduisent à des propriétés dissipatives spécifiques de l'équation de Boltzmann. Beaucoup de travaux précédents (mais pas celui de Sznitman, qui concerne les sections de type « sphères dures », cf. [S]) concernaient des sections efficaces bornées qui n'illustrent pas toute la richesse des effets dissipatifs de l'équation de Boltzmann.

– Enfin, la méthode de preuve est centrée sur l'étude de l'équation de Boltzmann et non sur celle du système de N particules. La seule estimation importante qui ne concerne pas l'équation limite est celle qui permet de lier les générateurs des processus (« backward ») du système à N particules et de l'équation de Boltzmann. Toutes les autres estimations importantes concernent l'équation finale, elles peuvent être vues comme des estimations de stabilité par rapport à la donnée initiale.

  Ces estimations de stabilité ne peuvent être limitées à des résultats de continuité de la solution (de l'équation de Boltzmann) au temps t par rapport à la donnée au temps 0. Il convient d'obtenir une véritable différentiabilité de l'application qui à la donnée initiale associe la solution au temps t, et ceci dans des espaces de mesures. Cette différentiabilité, que l'on doit établir en dimension infinie dans un cadre qui n'est pas tout à fait celui des espaces vectoriels (et qui fait intervenir des poids), nécessite une définition spécifique.

2. DESCRIPTION DES RÉSULTATS

2.1. Molécules maxwelliennes

On commence par présenter un résultat relatif au cas où la fonction Γ est constante, et où

$$\int_{S^2} (1-\cos\theta)^{1/4+\alpha}\, b(\cos\theta)\, d\sigma < \infty \tag{4}$$

pour tout $\alpha > 0$.

Dans la terminologie de l'équation de Boltzmann, ce cas porte le nom de « molécules maxwelliennes ». Il correspond (pour b bien choisi) à des potentiels entre molécules proportionnels à r^{-4}, où r est la distance intramoléculaire. Bien que de tels potentiels ne correspondent pas à des systèmes physiques, le cas où Γ est une constante a été identifié depuis les débuts de la théorie cinétique au dix-neuvième siècle comme particulièrement intéressant, car il permet certains calculs explicites (solutions explicites non stationnaires de l'équation de Boltzmann homogène, évolution explicite de certains moments, etc. ; on réfère à [Bob] pour plus de détails).

On notera que la fonction b n'est pas supposée intégrable : ceci est nécessaire si l'on veut traiter des potentiels intermoléculaires à longue portée tels que r^{-4}, (cf. [Ce] pour le calcul établissant les propriétés asymptotiques de b). Une des nouveautés du travail présenté ici est la possibilité d'obtenir des estimations pour de tels b.

On commence par définir un espace de fonctions tests régulières par

$$\mathcal{F} := \left\{ \phi \in L^1(\mathbb{R}^3), \qquad ||\phi||_{\mathcal{F}} := \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi|^4)\, |\hat{\phi}(\xi)|\, d\xi < \infty \right\},$$

où $\hat{\phi}$ désigne la transformée de Fourier de ϕ.

Ensuite, on considère S_t^N le semi-groupe (« forward ») associé au processus de Markov (1), et S_t^{bol} le semi-groupe (« forward ») associé à l'équation de Boltzmann (2), (3). Ces semi-groupes agissent en particulier sur les mesures de probabilités (ayant deux moments finis), plus précisément celles qui sont symétriques sur $(\mathbb{R}^3)^N$ dans le cas de S_t^N, et celles qui sont définies sur $\mathbb{R}^3$ dans le cas de S_t^{bol}.

Le premier résultat de Mischler et Mouhot que l'on présente s'écrit alors :

THÉORÈME 2.1 ([MM]). — *On suppose que la section efficace de l'équation de Boltzmann (et du processus markovien) est telle que Γ est constante et b vérifie (4). Soit f_0 une mesure de probabilité à support compact sur $\mathbb{R}^3$ telle que $\int_{\mathbb{R}^3} v\, df_0(v) = 0$. Alors pour tout $\delta > 0$, il existe une constante $C_\delta > 0$ telle que pour tout N, tout $\ell \in \mathbb{N}$, tels que $N \geq 2\,\ell$, et tous $\phi_1, \ldots, \phi_\ell \in \mathcal{F}$,*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \left| \left\langle \left(S_t^N(f_0^{\otimes N}) - (S_t^{\mathrm{bol}}(f_0))^{\otimes N} \right) \bigg|_\ell , \phi_1 \otimes .. \otimes \phi_\ell \right\rangle \right| \leq \frac{C_\delta\, \ell^2}{N^{1/6-\delta}} \prod_{k=1}^{\ell} ||\phi_k||_{\mathcal{F}}.$$

On a noté ici $|_\ell$ la prise des ℓ premières marginales. Comme annoncé précédemment, le jeu de la tensorisation et de la prise de marginales permet de comparer dans un cadre commun le processus de Markov et l'équation de Boltzmann.

Le caractère totalement explicite de l'estimation apparaît clairement, ainsi que l'uniformité en temps. Par contre, l'estimation ainsi présentée se dégrade avec le nombre de marginales selectionnées.

Plusieurs variantes de ce théorème sont valides. Elles permettent de relaxer l'hypothèse de support compact de f_0, d'améliorer l'estimation par rapport à N (on peut ainsi obtenir $N^{-1/2}$ au lieu de $N^{-1/6+\delta}$, quitte à perdre l'uniformité en temps), ou encore de présenter un cadre dans lequel apparaît une uniformité en ℓ.

2.2. Sphères dures

On introduit maintenant la section efficace

$$\Gamma(|v - v_*|) = |v - v_*|, \qquad b(\cos\theta) = 1. \tag{5}$$

Il s'agit du modèle dit de « sphères dures », correspondant à des molécules ayant des collisions élastiques de type « boules de billard ». Ce modèle, peu réaliste pour les molécules mais qui a des applications importantes lorsque l'on s'intéresse à des collisions entre objets petits à l'échelle humaine mais déjà constitués d'un grand nombre de molécules (poussières, gouttelettes), est l'un des plus emblématiques de la théorie cinétique.

On voit que cette fois-ci, la partie angulaire de la section efficace est intégrable, mais la partie relative aux vitesses n'est, elle, pas bornée. En conséquence, les difficultés mathématiques rencontrées dans l'étude de ce modèle se révèlent assez différentes (et même, d'un certain point de vue, complémentaires) de celles relatives au modèle de molécules maxwelliennes précédemment présenté.

On garde les notations S_t^N pour le semi-groupe (« forward ») associé au processus de Markov (1), et S_t^{bol} pour le semi-groupe (« forward ») associé à l'équation de Boltzmann (2), (3).

Le second résultat de Mischler et Mouhot que l'on présente s'écrit alors :

Théorème 2.2 ([MM]). — *On suppose que la section efficace de l'équation de Boltzmann (et du processus markovien) vérifie (5). Soit f_0 une mesure de probabilité à support compact (ce support sera noté Supp f_0) sur $\mathbb{R}^3$ telle que $\int_{\mathbb{R}^3} v\, df_0(v) = 0$. Alors pour tout $\delta > 0$ et tout $T > 0$, il existe une constante $C_{\delta,T,Supp f_0} > 0$ et une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout N, tout $\ell \in \mathbb{N}$, tels que $N \geq 2\,\ell$, et tous $\phi_1, \ldots, \phi_l \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)$,*

$$\sup_{t\in[0,T]} \left| \left\langle \left(S_t^N(f_0^{\otimes N}) - (S_t^{\mathrm{bol}}(f_0))^{\otimes N} \right) \bigg|_\ell , \phi_1 \otimes .. \otimes \phi_\ell \right\rangle \right|$$

$$\leq \left[\frac{2\,\ell^2}{N} + \frac{C_{\delta,T,\mathrm{Supp}\, f_0}\ \ell^2}{N^{1-\delta}} + \frac{C_{\delta,T,\mathrm{Supp}\, f_0}\ \ell}{(1+\ln N)^\alpha} \right] \prod_{k=1}^{\ell} ||\phi_k||_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)}.$$

On a de nouveau noté ici $|_\ell$ la prise des ℓ premières marginales.

On voit que, dans ce cadre, l'estimation n'est pas uniforme en temps. Il est néanmoins possible de produire une variante de ce résultat avec une estimation uniforme, en s'intéressant à des données initiales d'énergie donnée. Ceci conduit à des difficultés techniques de présentation, mais ne change pas le caractère profond du résultat.

Comme dans le cas des molécules maxwelliennes, on peut également effectuer une variante du théorème faisant ressortir un caractère uniforme en terme de prise de marginales.

2.3. Autres modèles

La preuve des estimations présentées dans les paragraphes précédents repose sur un principe général qui sera évoqué plus longuement dans le chapitre suivant. Ce principe général peut s'appliquer à de nombreuses situations, et donner lieu à des variantes innombrables.

On peut citer d'ores et déjà les processus qui concernent les équations de McKean-Vlasov de dérive-diffusion, les équations de Boltzmann inélastiques avec diffusion (cf. [MMW]), ainsi que les équations de Landau avec section efficace de molécules maxwelliennes (cf. [Ca]).

3. QUELQUES ÉLÉMENTS DE PREUVE

3.1. La stratégie générale

Les preuves des deux théorèmes précédemment énoncés se présentent, vues dans leur globalité, comme des estimations de propagation d'erreurs. Les étapes principales de ces preuves sont les suivantes :

– On commence par montrer que l'équation de Boltzmann permet de définir un processus (« backward », et noté T_t^∞) sur l'espace $C_b(P(\mathbb{R}^3))$ des fonctions continues bornées sur les mesures de probabilité (ayant certains moments bornés), qui admet un générateur (noté G^∞).

  La définition précise de ce générateur nécessite un travail spécifique sur la stabilité de l'équation de Boltzmann.

– On établit ensuite un résultat (quantitatif) de « consistance » entre les générateurs (G^N et G^∞) du processus de Markov (« backward ») et du processus (« backward » également) associé à l'équation de Boltzmann.

– L'étape suivante consiste à démontrer des propriétés élaborées de stabilité de l'équation de Boltzmann. En particulier, il convient d'établir la différentiabilité par rapport à la donnée initiale de l'équation de Boltzmann (dans un cadre qui nécessite une définition spécifique de cette différentiabilité).

– Il reste à combiner la consistance et la stabilité obtenues précédemment pour propager la petitesse des erreurs commises et obtenir les estimations présentées dans les théorèmes.

Il est remarquable dans le programme ainsi décrit que les propriétés de stabilité qui sont à démontrer concernent l'équation de Boltzmann et non le processus de Markov. On peut du coup utiliser les nombreuses techniques mises au point ces trente dernières années pour l'étude de l'équation de Boltzmann homogène.

La présentation de la preuve adoptée par Mischler et Mouhot permet de distinguer clairement entre les aspects de consistance et de stabilité qui sont spécifiques à chaque équation, et le résultat de propagation d'erreurs à partir de ces aspects (dernier point énoncé plus haut), que l'on peut écrire de manière abstraite, et qui sera commun à l'ensemble des applications.

Ce dernier résultat est présenté au paragraphe suivant.

3.2. Le théorème abstrait

Il s'agit d'un résultat qui permet de démontrer une estimation explicite sous un certain nombre d'hypothèses qu'il s'agit ensuite de vérifier dans chaque cas particulier. On présente ici les hypothèses principales sans donner néanmoins tous les détails.

On considère un espace E polonais. Il s'agira dans les cas concrets de l'espace des vitesses du processus markovien, donc en pratique $\mathbb{R}^d$, avec $d \in \mathbb{N}$. On se donne sur $P_{\text{sym}}(E^N)$, ensemble des probabilités symétriques (invariantes par permutation des indices de variables) sur l'espace produit E^N, un semi-groupe S_t^N (« forward ») associé à un générateur de processus markovien A^N. On introduit également le semi-groupe du processus adjoint T_t^N sur l'ensemble des fonctions continues bornées $C_b(E^N)$, associé au générateur G^N (générateur de l'équation de Kolmogorov backward). Celui-ci est défini par l'identité de dualité :

$$\forall f \in P(E^N),\ \phi \in C_b(E^N), \qquad \langle f, T_t^N(\phi)\rangle = \langle S_t^N(f), \phi\rangle.$$

Un premier groupe d'hypothèses, que l'on ne détaillera pas ici, et nommé (A1) dans [MM], se réfère aux propriétés du semi-groupe S_t^N généré par le processus de Markov. Indiquons seulement que ces dernières sont relatives à un système de poids défini sur E et que, dans les cas concrets (où E est un espace de vitesses), elles peuvent s'exprimer de la manière suivante :

- d'une part, le semi-groupe S_t^N préserve certaines quantités définies sur E^N, en pratique la quantité de mouvement et l'énergie quand on s'intéresse à l'équation de Boltzmann ;
- d'autre part, ce semi-groupe propage la finitude de certaines quantités, localement uniformément en temps et uniformément en N. Ces quantités sont typiquement des moments d'ordre supérieur à 2 (kurtosis par exemple) dans les cas concrets. Il convient aussi de sélectionner des données initiales pour le processus qui ont certains moments finis.

On introduit ensuite l'ensemble $P_{G_1}(E)$ des mesures de probabilités sur E qui ont un certain moment fini, et (pour $a \in \mathbb{R}$), $P_{G_1,a}(E)$ le sous-ensemble de $P_{G_1}(E)$ formé des mesures de probabilité dont le moment en question est inférieur à a, et qui vérifient certaines contraintes (on impose que la quantité de mouvement et l'énergie soient fixées dans les cas concrets). On note G_1 l'espace de Banach naturel dans lequel se plonge l'ensemble des différences de probabilités de $P_{G_1}(E)$. Cet espace est muni d'une norme $||\ ||_{G_1}$.

On suppose que l'on dispose d'une équation (non linéaire) $\partial_t f = Q(f)$ pour laquelle on a existence et unicité d'une solution (pour $t \in \mathbb{R}_+$) dans $P_{G_1}(E)$ lorsque la donnée initiale appartient à cet espace. On note S_t^{bol} le semi-groupe associé (malgré sa dénomination, dans ce problème abstrait, ce semi-groupe n'est pas nécessairement lié à l'équation de Boltzmann).

Un second groupe d'hypothèses, noté (A2) dans [MM], est relatif à la régularité de l'opérateur Q et du semi-groupe S_t^{bol} : On suppose qu'il existe $\zeta \in]0,1]$, tel que pour a suffisamment grand,

- d'une part, pour tout $T > 0$, il existe $C > 0$ tel que

$$\forall f, g \in P_{G_1,a}(E), \qquad \sup_{t\in[0,T]} ||S_t^{\mathrm{bol}} f - S_t^{\mathrm{bol}} g||_{G_1} \le C\, ||f-g||_{G_1}^{\zeta},$$

- d'autre part,

$$\forall f, g \in P_{G_1,a}(E), \qquad ||Q(f) - Q(g)||_{G_1} \le C\, ||f-g||_{G_1}^{\zeta}.$$

On définit ensuite un second espace de Banach G_2 contenant G_1 et associé à un ensemble $P_{G_2}(E)$ de probabilités sur E qui ont un autre moment fini. Il est possible de définir une notion de régularité Hölder d'ordre $q < 2$ (et donc en particulier de différentiabilité) pour les fonctions de $P_{G_1}(E)$ dans $P_{G_2}(E)$. On note $[\ ]_{C^q_\Lambda(P_{G_1}(E),P_{G_2}(E))}$ une norme associée à cette notion (avec un certain poids Λ). On fait une hypothèse supplémentaire (notée (A4) dans [MM]), qui s'écrit (uniformément par rapport aux valeurs des quantités conservées)

$$\int_0^T \left([S_t^{\mathrm{bol}}]_{C^{1+\eta}_\Lambda(P_{G_1}(E),P_{G_2}(E))} + [S_t^{\mathrm{bol}}]^2_{C^{(1+\eta)/2}_{\Lambda^{1/2}}(P_{G_1}(E),P_{G_2}(E))} \right) dt \le C_T^\infty,$$

avec $\eta \in]0,1[$, et Λ choisi de manière cohérente avec une hypothèse (A3) écrite ci-dessous.

On définit enfin un troisième espace de Banach G_3 correspondant à un dernier moment (et auquel on associe la notation $P_{G_{3,a}}(E)$), et on suppose que l'hypothèse suivante (notée (A5) dans [MM]) est valide :

$$\forall f, g \in P_{G_{3,a}}(E), \qquad \sup_{t\in[0,T]} ||S_t^{\mathrm{bol}} f - S_t^{\mathrm{bol}} g||_{G_3} \le \Theta_{a,T}(||S_t^{\mathrm{bol}} f - S_t^{\mathrm{bol}} g||_{G_3}),$$

où $\Theta_{a,T}$ est un module de continuité concave (pour cette dernière hypothèse, on n'utilise pas de structure différentielle sur $P_{G_{3,a}}(E)$, si bien qu'on peut se contenter d'une distance, et qu'on n'a pas réellement besoin de l'espace de Banach G_3).

L'ensemble des hypothèses (A2), (A4), (A5), que l'on a regroupées ici, est lié aux propriétés de l'équation limite, tandis que l'hypothèse (A1) concerne le processus markovien indépendamment de cette équation limite. Une dernière hypothèse fait le lien entre les deux.

Cette hypothèse, notée (A3) dans [MM], illustre la consistance entre le processus markovien et l'équation limite à travers la comparaison entre le générateur G_N du processus markovien (« backward ») et le générateur G^∞ d'un semi-groupe T_t^∞ linéaire défini sur $C_b(P(E))$ et lié à l'équation non linéaire $\partial_t f = Q(f)$ par la formule $T_t^\infty[\Phi](f) := \Phi(S_t^{\mathrm{bol}}(f))$, pour $\Phi \in C_b(P(E))$. La définition de ce générateur G^∞ demande du soin. Un calcul formel basé sur la formule définissant T_t^∞ montre qu'alors $(G^\infty[\Phi])(f) = \langle D\Phi[f], Q(f)\rangle$, où $D\Phi[f]$ désigne la différentielle de Φ appliquée au « point » f. C'est le jeu d'hypothèses (A2) qui permet de donner un sens précis à cette dernière formule.

Comme G^N agit sur $C_b(E^N)$ et G^∞ agit sur $C_b(P(E))$, il convient d'introduire une projection π^N définie par

$$\forall \Phi \in C_b(P(E)), \qquad (\pi^N \Phi)(v_1, \dots, v_N) = \Phi\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{v_i}\right),$$

qui permer d'effectuer cette comparaison dans un cadre commun. L'hypothèse s'écrit alors (uniformément par rapport aux valeurs des quantités conservées), pour $\eta \in]0,1]$ bien choisi,

$$\forall \Phi \in C^{1+\eta}_\Lambda(P_{G_1}(E)), \qquad ||(G^N \pi_N - \pi_N G^\infty)\,\Phi||_{L^\infty_q} \le \varepsilon(N)\,[\Phi]_{C^{1+\eta}_\Lambda(P_{G_1}(E))},$$

où $\varepsilon(N) \to 0$ lorsque $N \to \infty$, et $\|\ \|_{L^\infty_q}$ est un espace à poids relié à l'hypothèse (A1). Comme dans l'hypothèse (A4), il apparaît une norme $[\ ]_{C^{1+\eta}_\Lambda(P_{G_1}(E))}$ avec un poids Λ relié à celui apparaissant dans cette hypothèse (mais cette fois-ci il ne s'agit pas de fonctions à valeurs dans $P_{G_2}(E)$).

Le théorème abstrait proposé par Mischler et Mouhot se présente alors sous la forme suivante :

Théorème 3.1 ([MM]). — *On considère une « donnée initiale » (associée au processus de Markov) f_0^N dans $P_{sym}(E^N)$ et une « donnée initiale » (associée à l'équation non linéaire) f_0 dans $P(E)$. On suppose que l'ensemble des hypothèses précédentes (notées (A1) à (A5) dans* [MM]*) sont valides. Alors il existe une constante C_ϕ que l'on peut calculer explicitement en terme de certaines normes de ϕ (cf.* [MM] *pour des précisions : ces normes doivent vérifier une inégalité de dualité avec celles de G_1, G_2, G_3) telle que pour tout N, tout $\ell \in \mathbb{N}$, tels que $N \geq 2\,\ell$, et tous $\phi_1, \dots, \phi_\ell \in \mathcal{F}$,*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} \left| \left\langle \left(S_t^N(f_0^N) - (S_t^{\mathrm{bol}}(f_0))^{\otimes N} \right) \Big|_\ell , \phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_\ell \right\rangle \right|$$
$$\leq C_\phi \left[\frac{\ell^2}{N} + C_T\, C_T^\infty\, \varepsilon(N)\, \ell^2 + \ell \int_{E^N} \left\| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{v_i} - f_0 \right\|_{G_3} df_0^N(v) \right].$$

On a noté ici comme précédemment $|_\ell$ la prise des ℓ premières marginales, et C_T une constante liée à l'hypothèse (A1) [on rappelle que C_T^∞ apparaît dans l'hypothèse (A4)].

Dans ce théorème, chacun des trois morceaux du membre de droite de l'estimation correspond à une partie du processus d'approximation que l'on peut reconstituer ainsi :

$$\left| \left\langle \left(S_t^N(f_0^N) - (S_t^{\mathrm{bol}}(f_0))^{\otimes N} \right) \Big|_\ell , \phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_\ell \right\rangle \right| \tag{6}$$
$$\leq \left| \left\langle S_t^N(f_0^N) \Big|_\ell , \phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_\ell \right\rangle - \left\langle S_t^N(f_0^N), (v_1, \dots, v_N) \mapsto \frac{1}{N^\ell} \sum_{i_1,\dots,i_\ell=1}^N \phi(v_{i1}, .., v_{i\ell}) \right\rangle \right|$$
$$+ \left| \left\langle S_t^N(f_0^N), (v_1, \dots, v_N) \mapsto \frac{1}{N^\ell} \sum_{i_1,\dots,i_\ell=1}^N \phi(v_{i1}, \dots, v_{i\ell}) \right\rangle \right.$$
$$\left. - \left\langle f_0^N, \left(T_t^\infty \left\{ \rho \mapsto \int \dots \int \phi(z_1, \dots, z_\ell)\, d\rho(z_1)\, \dots\, d\rho(z_\ell) \right\} \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{v_i} \right) \right\rangle \right|$$
$$+ \left| \left\langle f_0^N, \left(T_t^\infty \left\{ \rho \mapsto \int \dots \int \phi(z_1, \dots, z_\ell)\, d\rho(z_1)\, \dots\, d\rho(z_\ell) \right\} \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{v_i} \right) \right\rangle \right.$$
$$\left. - \left\langle (S_t^{\mathrm{bol}}(f_0))^{\otimes N}, \phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_\ell \right\rangle \right|.$$

Le premier morceau est lié à une estimation combinatoire classique qui ne pose pas de problème particulier.

Le second morceau fait intervenir le cœur du processus d'approximation, et il convient de le détailler un peu. On voit en particulier que la vitesse de convergence $\varepsilon(N)$ obtenue est celle de l'hypothèse (A3) de convergence des générateurs.

Enfin le dernier morceau, qui dans les exemples pratiques fixe le taux de convergence de l'ensemble, ne concerne que les données initiales. On se convainc aisément que, si les données initiales du processus de Markov sont factorisées, alors le troisième morceau tend vers 0 avec N sous réserve qu'on puisse appliquer une loi des grands nombres relative à la norme apparaissant dans l'expression. Ce terme est donc une mesure de deux effets distincts dans le processus d'approximation des données initiales : la non factorisation (le fait de travailler à énergie fixée pose des problèmes spécifiques liés à cette non factorisation, cf. [MM]), et l'approximation d'une mesure de probabilité par des mesures empiriques.

On donne maintenant un court élément de preuve de ce théorème abstrait. On s'intéresse en particulier au terme (second morceau dans le membre de droite de l'estimation) illustrant l'utilisation de la convergence des générateurs.

Pour cela on remarque que, par définition des générateurs,

$$\frac{d}{ds}T_s^N = T_s^N\, G_N\,; \qquad \frac{d}{ds}T_s^\infty = G^\infty\, T_s^\infty.$$

On en déduit que

$$T_t^N \pi_N - \pi_N\, T_t^\infty = -\int_0^t \frac{d}{ds}(T_{t-s}^N\, \pi_N\, T_s^\infty)\, ds = \int_0^t T_{t-s}^N\, [G^N\, \pi_N - \pi_N\, G^\infty]\, T_s^\infty\, ds.$$

Notant

$$R_\phi^\ell : \rho \mapsto \int \ldots \int \phi(z_1, \ldots, z_l)\, d\rho(z_1)\, \ldots\, d\rho(z_\ell),$$

on voit que

$$(\pi_N\, R_\phi^\ell)(v_1, \ldots, v_N) = \frac{1}{N^\ell} \sum_{i_1, \ldots, i_\ell = 1}^{N} \phi(v_{i1}, \ldots, v_{i\ell}).$$

Le second terme du membre de droite de (6) peut alors s'écrire

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &= \Bigg| \left\langle S_t^N(f_0^N), (v_1, \ldots, v_N) \mapsto \frac{1}{N^\ell} \sum_{i_1, \ldots, i_\ell = 1}^{N} \phi(v_{i1}, \ldots, v_{i\ell}) \right\rangle \\
&\qquad - \left\langle f_0^N, \left(T_t^\infty R_\phi^\ell\right) \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{v_i}\right) \right\rangle \Bigg| \\
&= \left| \int_0^t \left\langle f_0^N, T_{t-s}^N\, [G^N\, \pi_N - \pi_N\, G^\infty]\, (T_s^\infty R_\phi^\ell)\, ds \right\rangle \right| \\
&= \left| \int_0^t \left\langle S_{t-s}^N(f_0^N), [G^N\, \pi_N - \pi_N\, G^\infty]\, (T_s^\infty R_\phi^\ell)\, ds \right\rangle \right| \\
&\le C \int_0^T \left\| [G^N\, \pi_N - \pi_N\, G^\infty]\, (T_s^\infty R_\phi^\ell) \right\|_{L_q^\infty} ds,
\end{aligned}$$

sous réserve que $S_t^N(f_0^N)$ a un moment uniformément borné. Cette dernière hypothèse est en fait une conséquence de (A1), et C est une constante liée à cette hypothèse.

Utilisant maintenant (A3), on voit que

$$\mathcal{T} \leq C\,\varepsilon(N) \int_0^T [T_s^\infty R_\phi^\ell]_{C_\Lambda^{1+\eta}(P_{G_1})}\, ds.$$

En observant que $T^\infty R_\phi^\ell = R_\phi^\ell \,\mathrm{o}\, S_t^{\mathrm{bol}}$, on voit que $[T_s^\infty R_\phi^\ell]_{C_\Lambda^{1+\eta}(P_{G_1})}$ peut être borné par la norme dans $C_\Lambda^{1+\eta}$ de R_ϕ^ℓ d'une part, et de S_t^{bol} d'autre part, à condition que ces deux quantités soient finies, et que la composition ait de bonnes propriétés relatives aux normes de ce type.

L'hypothèse (A4) fournit la norme finie de S_t^{bol} ; celle de R_ϕ^ℓ s'obtient grâce à un calcul direct, de même que les bonnes propriétés de la composition.

3.3. Un exemple d'application du théorème abstrait : le modèle original de Kac

Pour donner une idée du type d'estimations qu'il faut effectuer afin de vérifier les hypothèses du théorème abstrait, nous proposons de nous intéresser à un des modèles les plus simples (et l'un des premiers dont le processus markovien sous-jacent ait été étudié) de la théorie cinétique : le modèle monodimensionnel de Kac (cf. [K1]). Pour ce modèle, il n'est pas nécessaire de recourir à toute la puissance de la théorie présentée par Mischler et Mouhot dans [MM], mais il est intéressant de voir comment les estimations nécessaires pour cette théorie peuvent être prouvées dans ce cadre simplifié.

L'opérateur associé à l'équation non linéaire (2) s'écrit alors

(7)
$$Q(f)(t,v) = \int_{\mathbb{R}} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(f(t, v\,\cos\theta - v^*\,\sin\theta)\, f(t, v\,\sin\theta + v^*\,\cos\theta) - f(t,v)\, f(t,v^*) \Big)\, \frac{d\theta}{2\pi} dv^*,$$

où $v \in \mathbb{R}$ et $f := f(t,v) \geq 0$.

On pourra noter que la masse $\int f\, dv = 1$ et l'énergie $\int f\, |v|^2/2\, dv$ sont conservées par le flot de cette équation, ainsi que la positivité de f (en particulier les mesures de probabilités sont transformées en mesures de probabilité par son flot) et que, si le premier moment $\int f\, v\, dv$ est nul initialement, il le reste au cours de l'évolution.

On peut également se convaincre que cet opérateur a un lien direct avec celui décrit par (3) dans le cas des molécules maxwelliennes lorsque l'on considère des fonctions radiales.

Le processus markovien associé a pour générateur (avec $v_1, \dots, v_N \in \mathbb{R}$, et $\phi \in C_b(\mathbb{R}^{3N})$)

(8)
$$(G^N\,\phi)(v_1, .., v_N) = \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i < j \leq N}$$

$$\times \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\phi(v_1, \dots, v_i\,\cos\theta - v_j^*\,\sin\theta, \dots, v_i\,\sin\theta + v_j^*\,\cos\theta, \dots, v_N) - \phi(v_1, \dots, v_N) \Big) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Ce cadre très simple est bien adapté à l'écriture de l'équation non linéaire dans la variable de Fourier. En effet, un calcul facile montre que

$$\widehat{Q(f)}(t,\xi) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\hat{f}(t,\xi\,\cos\theta)\,\hat{f}(t,\xi\,\sin\theta) - \hat{f}(t,\xi) \right) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Notons qu'un tel calcul se généralise bien au cas de l'équation de Boltzmann avec molécules maxwelliennes, mais plutôt mal au cas de l'équation de Boltzmann avec une section efficace de sphères dures (cf. [Bob]).

Disposant d'une représentation en variable de Fourier simple, il est naturel d'utiliser comme norme pour vérifier les propriétés de stabilité (A2), (A4), (A5), la norme

$$||f||_F = \sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\xi|^{-2}|\hat{f}(\xi)|,$$

qui est bien définie pour les mesures (typiquement, des différences de deux mesures de probabilité) ayant leurs deux premiers moments nuls (propriété qui est conservée par le flot de (7)). Cette norme a été introduite en théorie cinétique par Gabetta, Toscani et Wennberg dans [GTW].

Pour ce modèle, on donne une idée de la démonstration des hypothèses de consistance (A3), et de stabilité (A2), (A4), (A5).

En ce qui concerne la stabilité, on détaille comment la première partie de (A2) peut être obtenue quand on considère la norme $||\ ||_F$. Les calculs présentés ici sont directement inspirés de [GTW].

On calcule

$$[\widehat{Q(f)} - \widehat{Q(g)}](t,\xi) = \int_{-\pi}^{\pi} \Bigg(\frac{1}{2}\,[\hat{f}(t,\xi\,\cos\theta) + \hat{g}(t,\xi\,\cos\theta)]\,[\hat{f}(t,\xi\,\sin\theta) - \hat{g}(t,\xi\,\sin\theta)]$$

$$+\frac{1}{2}\,[\hat{f}(t,\xi\,\cos\theta) - \hat{g}(t,\xi\,\cos\theta)]\,[\hat{f}(t,\xi\,\sin\theta) + \hat{g}(t,\xi\,\sin\theta)] - [\hat{f}(t,\xi) - \hat{g}(t,\xi)] \Bigg) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Comme $\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\hat{f}(t,\xi\,\cos\theta)+\hat{g}(t,\xi\,\cos\theta)| \leq 2$ et $\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\hat{f}(t,\xi\,\sin\theta)+\hat{g}(t,\xi\,\sin\theta)| \leq 2$, on voit que si $\partial_t f = Q(f)$, $\partial_t g = Q(g)$, alors

$$\frac{d}{dt}\left(|\xi|^{-2}\,|\hat{f}(t,\xi) - \hat{g}(t,\xi)| \right) + |\xi|^{-2}\,|\hat{f}(t,\xi) - \hat{g}(t,\xi)|$$

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi} |\xi|^{-2} \left[|\hat{f}(t,\xi\,\sin\theta) - \hat{g}(t,\xi\,\sin\theta)| + |\hat{f}(t,\xi\,\cos\theta) - \hat{g}(t,\xi\,\cos\theta)| \right] \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$\leq \sup_{\eta\in\mathbb{R}} |\eta|^{-2}\,|\hat{f}(t,\eta) - \hat{g}(t,\eta)|.$$

On en déduit que

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\xi|^{-2}\,|\hat{f}(t,\xi) - \hat{g}(t,\xi)| \leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\xi|^{-2}\,|\hat{f}(0,\xi) - \hat{g}(0,\xi)|.$$

Cette inégalité fournit la première partie de (A2) avec la norme $||\ ||_F$.

Les autres propriétés de stabilité (reste de (A2), (A4), (A5)) sont plus difficiles à démontrer. Leur preuve est également basée sur la représentation en Fourier de Q. On se contente ici de détailler un calcul de stabilité proche de ceux nécessaires pour obtenir l'hypothèse (A4), et qui prolonge le calcul précédent en faisant ressortir l'aspect différentiable (et même hölderien d'ordre $q < 2$) de l'application $f(0,\cdot) \mapsto f(t,\cdot)$, avec f solution de l'équation (2), (7).

Pour cela, on garde la norme $|| \; ||_F$ définie précédemment (on ne s'intéresse qu'à des solutions dont le premier moment est nul), et on écrit l'opérateur Q en variable de Fourier sous la forme

$$\widehat{Q(f)}(t,\xi) = K(\hat{f},\hat{f})(t,\xi) - \hat{f}(t,\xi),$$

où K est l'opérateur quadratique symétrique défini par

$$K(\hat{f},\hat{g})(t,\xi) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(\hat{f}(t,\xi\,\cos\theta)\,\hat{g}(t,\xi\,\sin\theta) + \hat{g}(t,\xi\,\cos\theta)\,\hat{f}(t,\xi\,\sin\theta)\Big)\,\frac{d\theta}{2\pi}.$$

On voit qu'au niveau formel, si $\partial_t f = Q(f)$, et $\partial_t g = Q(g)$, avec $g(0,\cdot) = f(0,\cdot) + h(0,\cdot)$, alors $g = f + h + O(||h||^2)$, où

$$\partial_t \hat{h} = 2\,K(\hat{f},\hat{h}) - \hat{h}. \tag{9}$$

On retrouve donc le lien classique entre linéarisée d'une équation et différentielle de sa solution par rapport à la donnée initiale.

Le caractère C^1 de l'application $f(0,\cdot) \mapsto f(t,\cdot)$ se lit alors sur la stabilité de l'application $h(0,\cdot) \mapsto h(t,\cdot)$, avec h solution de l'équation de Kac (écrite dans la variable de Fourier) linéarisée autour de f (9).

Or

$$\frac{d}{dt}|\xi|^{-2}\,\hat{h}(t,\xi) + |\xi|^{-2}\,\hat{h}(t,\xi) = |\xi|^{-2}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\hat{h}(t,\xi\,\cos\theta)\,\hat{f}(t,\xi\,\sin\theta) + \hat{f}(t,\xi\,\cos\theta)\,\hat{h}(t,\xi\,\sin\theta)\Big)\,\frac{d\theta}{2\pi},$$

donc comme $|\hat{f}(t,\xi\,\cos\theta)| \le 1$ et $|\hat{f}(t,\xi\,\sin\theta)| \le 1$ (en se souvenant que $|\xi\,\cos\theta|^2 + |\xi\,\sin\theta|^2 = |\xi|^2$),

$$\frac{d}{dt}|\xi|^{-2}\,|\hat{h}(t,\xi)| + |\xi|^{-2}\,|\hat{h}(t,\xi)| \le \sup_{\eta\in\mathbb{R}} |\eta|^{-2}|\hat{h}(t,\eta)|,$$

si bien que

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\xi|^{-2}\,|\hat{h}(t,\xi)| \le \sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\xi|^{-2}\,|\hat{h}(0,\xi)|. \tag{10}$$

L'étape suivante consiste à montrer que l'application $f(0,\cdot) \mapsto f(t,\cdot)$ est hölderienne d'ordre $q < 2$. Pour cela, on considère $\omega = g - f - h$, et on étudie la stabilité de l'application $\omega(0,\cdot) \mapsto \omega(t,\cdot)$. Cette fonction vérifie l'équation (dans la variable de Fourier)

$$\partial_t\hat{\omega} = K(\hat{\omega}, \hat{f} + \hat{g}) - K(\hat{h}, \hat{f} - \hat{g}) - \hat{\omega},$$

si bien que

$$\frac{d}{dt}|\xi|^{-2}\,\hat\omega(t,\xi)+|\xi|^{-2}\,\hat\omega(t,\xi)=|\xi|^{-2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}\,\hat\omega(t,\xi\,\cos\theta)\,[\hat f(t,\xi\,\sin\theta)+\hat g(t,\xi\,\sin\theta)]\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\,[\hat f(t,\xi\,\cos\theta)+\hat g(t,\xi\,\cos\theta)]\,\hat\omega(t,\xi\,\sin\theta)\right)\frac{d\theta}{2\pi}$$

$$-|\xi|^{-2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}\,\hat h(t,\xi\,\cos\theta)\,[\hat f(t,\xi\,\sin\theta)-\hat g(t,\xi\,\sin\theta)]\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\,[\hat f(t,\xi\,\cos\theta)-\hat g(t,\xi\,\cos\theta)]\,\hat h(t,\xi\,\sin\theta)\right)\frac{d\theta}{2\pi}.$$

En utilisant les estimations $|\hat f(t,\xi\,\cos\theta)|\le 1$, $|\hat g(t,\xi\,\cos\theta)|\le 1$, $|\hat f(t,\xi\,\sin\theta)|\le 1$, $|\hat g(t,\xi\,\sin\theta)|\le 1$, on voit que

$$\frac{d}{dt}|\xi|^{-2}\,|\hat\omega(t,\xi)|+|\xi|^{-2}\,|\hat\omega(t,\xi)|\le\sup_{\eta\in\mathbb{R}}|\eta|^{-2}|\hat\omega(t,\eta)|+\sup_{\eta\in\mathbb{R}}|\eta|^{-2}|\hat h(t,\eta)|.$$

En combinant cette estimation avec (10), on voit que

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}}|\xi|^{-2}|\hat\omega(t,\xi)|\le\sup_{\xi\in\mathbb{R}}|\xi|^{-2}|\hat\omega(0,\xi)|+t\sup_{\xi\in\mathbb{R}}|\xi|^{-2}|\hat h(0,\xi)|\,.$$

On obtient de cette manière des estimations de stabilité de type « Hölder d'ordre $q<2$ » pour le modèle de Kac, qui sont proches de ce qu'il faut démontrer dans l'hypothèse (A4) (sans néanmoins s'intéresser ici aux aspects de temps long). Dans [MM], les estimations qui sont prouvées utilisent un exposant différent dans la norme $\|\ \|_F$, et sont faites pour traiter des sections efficaces b singulières (de plus elles concernent bien sûr le vrai modèle de Boltzmann et non le modèle de Kac, et elles prennent en compte les aspects de temps long). Le cœur des démonstrations est néanmoins comparable au calcul développé ici.

Une dernière remarque relative aux estimations de stabilité utilisées ici est la suivante : ces estimations diffèrent de celles considérées le plus souvent en théorie cinétique (cf. [DM] par exemple). En effet d'une part on cherche ici une stabilité relative à des topologies associées à des espaces de mesures (plus faibles donc que les topologies utilisées en général, qui concernent des espaces de type L^p ou des espaces de Sobolev), et d'autre part on cherche à aller au-delà d'une simple continuité par rapport aux données initiales. Comme on veut de la différentiabilité (et même un peu plus), on doit écrire des problèmes linéarisés autour de mesures arbitraires et non autour d'une maxwellienne : là encore, on s'éloigne de la théorie classique.

On ébauche ensuite la preuve de l'hypothèse de consistance (A3). On rappelle qu'il s'agit de comparer (en donnant une estimation explicite lorsque $N\to\infty$) les générateurs G^N du processus markovien et G^∞ du processus limite (associé à l'équation non linéaire) une fois qu'on les a composés avec la projection π_N pour qu'ils agissent sur le même espace. On considère donc

$$[G^N\,\pi_N-\pi_N\,G^\infty]\,\Phi,$$

où Φ est une fonction hölderienne d'ordre $1+\eta$ avec $\eta \in]0,1[$ (le sens précis à donner à cette notion est indiqué dans [MM]), sur l'ensemble $P(\mathbb{R})$ des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$ (ici, la norme utilisée, notée $||\,||_{\tilde F}$, est une variante de la norme $||\,||_F$ prenant en compte le fait que les probabilités considérées peuvent avoir un moment d'ordre 1 non nul).

Pour sortir du cadre abstrait, on explicite ce que signifie $(\pi_N\,[G^\infty\Phi])(v_1,..,v_N)$, en fonction de $D[\Phi]\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{v_i}\right]$, différentielle de Φ au « point » $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{v_i}$:

$$(\pi_N\,[G^\infty\Phi])(v_1,..,v_N) = (G^\infty\Phi)\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{v_i}\right)$$

$$= \left\langle Q\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{v_i}\right), D[\Phi]\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{v_i}\right)\right\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\Bigg(D[\Phi]\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{v_i}\right](v\,\cos\theta - v^*\,\sin\theta) + D[\Phi]\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{v_i}\right](v\,\sin\theta + v^*\,\cos\theta)$$

$$-D[\Phi]\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{v_i}\right](v) - D[\Phi]\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{v_i}\right](v^*)\Bigg)\, d\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{v_i}\right)(v)\, d\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \delta_{v_j}\right)(v^*)\,\frac{d\theta}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\,N^2}\sum_{i,j=1}^N\int_{-\pi}^{\pi}\Bigg(D[\Phi]\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{v_i}\right](v_i\,\cos\theta - v_j\,\sin\theta) + D[\Phi]\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{v_i}\right](v_i\,\sin\theta + v_j\,\cos\theta)$$

$$-D[\Phi]\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{v_i}\right](v_i) - D[\Phi]\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{v_i}\right](v_j)\Bigg)\,\frac{d\theta}{2\pi}\,.$$

De même,

$$(G^N\,[\pi_N\,\Phi])(v_1,..,v_N) = G^N\left(\Phi\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{v_i}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2N}\sum_{i,j=1}^N\int_{-\pi}^{\pi}\left[\Phi\left(\frac{1}{N}\left[\delta_{v_i\,\cos\theta - v_j\,\sin\theta} + \delta_{v_i\,\sin\theta + v_j\,\cos\theta} + \sum_{k\neq i,j}\delta_{v_k}\right]\right) - \Phi\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{v_i}\right)\right]\frac{d\theta}{2\pi}.$$

Or, un développement à l'ordre 1 de

$$\Phi\left(\frac{1}{N}\left[\delta_{v_i\,\cos\theta - v_j\,\sin\theta} + \delta_{v_i\,\sin\theta + v_j\,\cos\theta} + \sum_{k\neq i,j}\delta_{v_k}\right]\right) - \Phi\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{v_i}\right)$$

donne (en se souvenant que Φ est une fonction hölderienne d'ordre $1+\eta$)

$$\frac{1}{N}\left\langle D[\Phi]\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{v_i}\right], \delta_{v_i\,\cos\theta - v_j\,\sin\theta} + \delta_{v_i\,\sin\theta + v_j\,\cos\theta} - \delta_{v_i} - \delta_{v_j}\right\rangle$$

$$+\,O\left(\frac{1}{N^{1+\eta}}\,||\delta_{v_i\,\cos\theta - v_j\,\sin\theta} + \delta_{v_i\,\sin\theta + v_j\,\cos\theta} - \delta_{v_i} - \delta_{v_j}||_{\tilde F}^{1+\eta}\right).$$

On en déduit que (pour une constante C liée à une norme illustrant la régularité de Φ),

$$|G^N\,[\pi_N\,\Phi] - \pi_N\,[G^\infty\Phi]|(v_1,..,v_N)$$

$$\leq \frac{C}{N^{2+\eta}} \sum_{i,j=1}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} \left(||\delta_{v_i \cos\theta - v_j \sin\theta} + \delta_{v_i \sin\theta + v_j \cos\theta} - \delta_{v_i} - \delta_{v_j}||_{\tilde{F}}^{1+\eta} \right) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Mais

$$||\delta_{v_i \cos\theta - v_j \sin\theta} + \delta_{v_i \sin\theta + v_j \cos\theta} - \delta_{v_i} - \delta_{v_j}||_{\tilde{F}} \leq C\,(1 + |v_i|^2 + |v_j|^2),$$

pour une constante $C > 0$.

On voit donc que, quitte à introduire des poids, on arrive à borner de manière explicite $G^N \pi_N \Phi - \pi_N G^\infty \Phi$ par une expression variant comme $N^{-\eta}$, ce qui est le résultat de consistance demandé pour pouvoir appliquer l'hypothèse (A3).

RÉFÉRENCES

[ADVW] R. Alexandre, L. Desvillettes, C. Villani, B. Wennberg – *Entropy dissipation and long-range interactions.* Arch. Ration. Mech. Anal. 152 (2000), 327–355.

[Bi] G. A. Bird – *Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows. Corrected reprint of the 1994 original.* Oxford Engineering Science Series, 42. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995.

[Bob] A. V. Bobylev – *The theory of the nonlinear spatially uniform Boltzmann equation for Maxwell molecules.* Mathematical physics reviews, Vol. 7, 111–233, Soviet Sci. Rev. Sect. C Math. Phys. Rev., 7, Harwood Academic Publ., Chur, 1988.

[Bol] L. Boltzmann – *Lectures on gas theory.* Translated by Stephen G. Brush University of California Press, Berkeley-Los Angeles, Calif. 1964.

[Ca] K. Carrapatoso – *Propagation of chaos for the spatially homogeneous Landau equation for Maxwellian molecules.* Preprint, 2012.

[Ce] C. Cercignani – *The Boltzmann equation and its applications.* Applied Mathematical Sciences, 67. Springer-Verlag, New York, 1988.

[Ch] S. Chapman, T. G. Cowling – *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases.* Cambridge University Press, Cambridge, 1939.

[De] L. Desvillettes – *Some applications of the method of moments for the homogeneous Boltzmann and Kac equations.* Arch. Rational Mech. Anal. 123 (1993), 387–404.

[DM] L. Desvillettes, C. Mouhot – *Stability and uniqueness for the spatially homogeneous Boltzmann equation with long-range interactions.* Arch. Rational Mech. Anal. 193 (2009), 471–488.

[GTW] E. Gabetta, G. Toscani, B. Wennberg – *Metrics for probability distributions and the trend to equilibrium for solutions of the Boltzmann equations.* J. Stat. Phys. 81 (1995), 901–934.

[GST] I. Gallagher, L. Saint-Raymond, B. Texier – *From Newton to Boltzmann : the case of hard spheres and short-range potentials.* To appear in ZLAM.

[GM] C. Graham, S. Méléard – *Stochastic particle approximations for generalized Boltzmann models and convergence estimates.* Ann. Probab. 25 (1997), 115–132.

[Gru] F. A. Grünbaum – *Propagation of chaos for the Boltzmann equation.* Arch. Rational Mech. Anal. 42 (1971), 323–345

[IP1] R. Illner, M. Pulvirenti – *Global validity of the Boltzmann equation for a two-dimensional rare gas in vacuum.* Comm. Math. Phys. 105 (1986), 189–203

[IP2] R. Illner, M. Pulvirenti – *Global validity of the Boltzmann equation for two- and three dimensional rare gas in vacuum. Erratum and improved result.* Comm. Math. Phys. 121 (1989), 143–146

[K1] M. Kac – *Foundations of kinetic theory.* Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1954–1955, vol. III, pp. 171–197. University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1956.

[K2] M. Kac – *Probability and related topics in physical sciences. With special lectures by G. E. Uhlenbeck, A. R. Hibbs, and B. van der Pol.* Lectures in Applied Mathematics. Proceedings of the Summer Seminar, Boulder, Colo., 1957, Vol. I Interscience Publishers, London-New York 1959.

[Ko] V. N. Kolokoltsov – *Nonlinear Markov processes and kinetic equations.* Vol. 182 of *Cambridge Tracts in Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[L] O. E., III Lanford – *Time evolution of large classical systems.* Dynamical systems, theory and applications (Recontres, Battelle Res. Inst., Seattle, Wash., 1974), pp. 1–111. Lecture Notes in Phys., Vol. 38, Springer, Berlin, 1975.

[MK] H. P. McKean – *Fluctuations in the kinetic theory of gases.* Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), 435–455.

[MM] S. Mischler, C. Mouhot – *Kac's program in kinetic theory.* Invent. Math. 193 (2013), 1–147.

[MMW] S. Mischler, C. Mouhot, B. Wennberg – *A new approach to quantitative propagation of chaos for drift, diffusion and jump processes.* Preprint arXiv :1101.4727v2.

[Mo] C. Mouhot – *Rate of convergence to equilibrium for the spatially homogeneous Boltzmann equation with hard potentials.* Comm. Math. Phys. 261 (2006), 629–672.

[S] A.-S. Sznitman – *Equations de type de Boltzmann, spatialement homogènes.* (French) [Spatially homogeneous Boltzmann-type equations] Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 66 (1984), 559–592.

[V] C. Villani – *Limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann (d'après C. Bardos, F. Golse, C. D. Levermore, P.-L. Lions, N. Masmoudi, L. Saint-Raymond). (French) [Hydrodynamic limits of the Boltzmann equation (following C. Bardos, F. Golse, C. D. Levermore, P.-L. Lions, N. Masmoudi, L. Saint-Raymond)]* Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001, exp. n° 893, Astérisque 282 (2002), 365–405.

Laurent DESVILLETTES

École normale supérieure de Cachan
C.M.L.A.
UMR 8536 du C.N.R.S.
61 avenue du Président Wilson
94235 Cachan Cedex
E-mail : `desville@cmla.ens-cachan.fr`