

LE PROBLÈME DE KADISON-SINGER
[d'après A. Marcus, D. Spielman et N. Srivastava]

par Alain VALETTE

The results that we have obtained leave the question of uniqueness of the singular pure states of \mathcal{A}_d open. We incline to view that such extension is non-unique (...)

(R.V. Kadison and I.M. Singer, [KS], p. 397)

1. INTRODUCTION

1.1. Énoncé du problème

Si \mathcal{H} est un espace de Hilbert, une C^* -algèbre sur \mathcal{H} est une $*$ -sous-algèbre, fermée pour la norme-opérateur, de l'algèbre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ des opérateurs linéaires bornés sur \mathcal{H} . Si A est une C^* -algèbre unitale sur \mathcal{H} , un état sur A est une fonctionnelle linéaire continue φ sur A , positive (c-à-d. $\varphi(x^*x) \geq 0$ pour tout $x \in A$), et normalisée ($\varphi(1) = 1$). L'espace $S(A)$ des états sur A est une partie convexe faible- $*$ compacte du dual de A ; un état est pur si c'est un point extrême de $S(A)$.

Exemple 1.1. — Avec $A = \mathcal{B}(\mathcal{H})$: si $\xi \in \mathcal{H}$ est un vecteur de norme 1, l'état $\varphi(T) = \langle T(\xi)|\xi \rangle$ est pur ; ces états s'appellent *états vectoriels*.

Exemple 1.2. — Si A est commutative, les états purs sont exactement les caractères de A . En effet, la transformée de Gelfand identifie A à $C(X)$, la C^* -algèbre des fonctions continues sur un espace compact X ; par le théorème de représentation de Riesz, $S(C(X))$ s'identifie à l'espace des mesures de probabilités sur X ; une telle mesure est extrémale si et seulement si c'est une masse ponctuelle, donc l'état correspondant est l'évaluation en un point de X .

Pour A une C^* -algèbre unitale de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, une application du théorème de Hahn-Banach montre que tout état φ de A s'étend en un état de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (voir [Dix], lemme 2.10.1). L'ensemble des extensions de φ est un convexe K_φ faible- $*$ compact de $\mathcal{B}(\mathcal{H})^*$. Si φ est pur, les points extrêmes de K_φ sont des états purs de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (en effet, dans ce cas K_φ est une face de $S(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$). Par le théorème de Krein-Milman, un état pur sur A

s'étend en un unique état pur de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ si et seulement s'il s'étend en un unique état de $B(H)$.

Exemple 1.3. — $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ admet des états purs qui ne sont pas vectoriels. En effet, considérons $C[0, 1]$ comme une C^* -algèbre agissant par multiplication sur $\mathcal{H} = L^2[0, 1]$. Un état pur de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ qui étend un état pur de $C[0, 1]$ ne peut être vectoriel, car les fonctions de $C[0, 1]$ n'ont pas de vecteur propre commun sur \mathcal{H} .

Exemple 1.4. — Il est facile de voir qu'une extension d'un état non pur n'est pas unique en général. Prenons par exemple l'algèbre $A \simeq \mathbb{C}^2$ des matrices diagonales dans l'algèbre $M_2(\mathbb{C})$ des matrices 2-fois-2 complexes. Considérons les matrices positives $B_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1/2 & i/2 \\ -i/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Les états $S \mapsto \text{Tr}(SB_1)$ et $S \mapsto \text{Tr}(SB_2)$ de $M_2(\mathbb{C})$ se restreignent tous deux en l'état non pur $(a_1, a_2) \mapsto \frac{a_1 + a_2}{2}$ de A .

En 1959, R.V. Kadison et I.M. Singer [KS] étudient la propriété d'extension unique des états purs sur les C^* -algèbres abéliennes maximales (MASA) de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Si $\mathcal{H} = L^2[0, 1]$ (avec la mesure de Lebesgue) et $A = L^\infty[0, 1]$ agissant par multiplication, ils montrent que A n'a pas la propriété d'extension unique des états purs ([KS], Theorem 2). Pour $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ et l'algèbre $D = \ell^\infty(\mathbb{N})$ des opérateurs diagonaux, ils posent la question :

Problème de Kadison-Singer : D a-t-elle la propriété d'extension unique des états purs ?

Exemple 1.5. — Pour $k \in \mathbb{N}$, l'état pur φ_k de D , défini par $\varphi_k((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = a_k$, admet comme unique extension à $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ l'état pur $T \mapsto \langle T\mathbf{e}_k | \mathbf{e}_k \rangle$, où \mathbf{e}_k est le k -ième vecteur de la base canonique de $\ell^2(\mathbb{N})$. En effet, soient ψ un état pur de $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ qui étend φ_k , et π_ψ la représentation GNS associée. L'état ψ ne s'annule pas sur l'idéal \mathcal{K} des opérateurs compacts (puisqu'il prend la valeur 1 sur le projecteur de rang 1 associé à \mathbf{e}_k). Ainsi la restriction de π_ψ à \mathcal{K} est une représentation irréductible de \mathcal{K} , elle est donc équivalente à la représentation standard de \mathcal{K} , donc ψ est un état vectoriel ; c'est l'état associé à \mathbf{e}_k , comme on le voit facilement⁽¹⁾.

Il y a une façon canonique d'étendre un état de D en un état de $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$, grâce à l'espérance conditionnelle $E : \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N})) \rightarrow D : T \mapsto \text{diag}(T)$ (où $\text{diag}(T)$ est la diagonale de T dans la base canonique) : si φ est un état de D , alors $\varphi \circ E$ est un état de $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ qui étend φ (si φ est pur, alors $\varphi \circ E$ est un état pur de $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$), voir [An1], Theorem 1). Le problème de Kadison-Singer se reformule donc ainsi : si φ est un état pur de D , l'état $\varphi \circ E$ est-il la seule extension en un état de $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$? Quoiqu'ils aient établi l'unicité de E comme espérance conditionnelle $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N})) \rightarrow D$

1. Notons que $D \simeq C(\beta\mathbb{N})$, où $\beta\mathbb{N}$ est le compactifié de Stone-Ćech de \mathbb{N} , c-à-d. l'ensemble des ultrafiltres de \mathbb{N} . Pour attaquer le problème de Kadison-Singer, il suffirait donc de considérer les états purs de D correspondant aux ultrafiltres libres de \mathbb{N} . Cette approche a été considérée (voir par exemple [An2]), mais n'intervient pas dans la récente solution du problème de Kadison-Singer.

(voir [KS, Thm.1]), Kadison et Singer tendaient à penser que la réponse devait être négative, comme l’indique la phrase en exergue⁽²⁾.

1.2. Motivations

Dans [KS], Kadison et Singer écrivent qu’ils ont appris le problème de I. Kaplansky et I. Segal. Cependant, lors d’exposés plus récents (voir par exemple [Jor]), Kadison a affirmé que le problème trouve sa source dans certains passages du livre de P.A.M. Dirac [Dir] sur les fondements de la mécanique quantique. La question traitée par Dirac est : comment déterminer les probabilités «de base» associées aux états quantiques d’un système? À la section 18 de [Dir], Dirac suggère de commencer par considérer un ensemble complet d’observables commutant deux à deux⁽³⁾; un tel ensemble forme la partie auto-adjointe d’une MASA. Ensuite, on spécifie les distributions de probabilité associées aux observables de cet ensemble dans un état quantique donné : cela revient à fixer un état φ sur la MASA⁽⁴⁾. Enfin, on veut généraliser cette information au système entier, c-à-d. étendre cette distribution de probabilité à toutes les autres observables, même non compatibles avec celles de la MASA. Il est naturel de se demander si cette extension est unique, ce qui amène au problème de Kadison-Singer⁽⁵⁾.

1.3. Les principaux résultats

Le problème de Kadison-Singer a été résolu – par l’affirmative! – en juin 2013 par A. Marcus, D. Spielman et N. Srivastava [MSS2], trois scientifiques actifs à l’interface des mathématiques et de l’informatique théorique :

THÉORÈME 1.6. — *Tout état pur sur D admet une unique extension en un état de $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ (nécessairement pur).*

Ce résultat n’a pas été démontré directement, mais via une traduction en algèbre linéaire due à J. Anderson [An2], C. Akemann et J. Anderson [AA], et N. Weaver

2. Le problème d’extension unique des états purs peut se reformuler pour d’autres MASAs dans d’autres algèbres de von Neumann. En particulier, dans un article récent [Pop], Popa montre que le problème de Kadison-Singer est équivalent à la propriété d’extension unique des états purs pour l’ultraproduit des algèbres diagonales dans l’ultraproduit des $M_n(\mathbb{C})$, qui est un facteur de type II_1 ; il montre également, indépendamment des résultats de Marcus-Spielman-Srivastava, que si ω est un ultrafiltre libre sur \mathbb{N} et si A est une MASA singulière dans un facteur M de type II_1 , alors l’ultraproduit A^ω a la propriété d’extension unique des états purs dans l’ultraproduit M^ω .

3. Il s’agit donc d’observables compatibles, telles que la mesure de l’un n’influence pas la mesure de l’autre.

4. La probabilité que, dans cet état, une observable A prenne des valeurs entre a et b est alors donnée par $\varphi(E_{[a,b]})$, où $E_{[a,b]}$ est le projecteur spectral de A associé à l’intervalle $[a, b]$.

5. Citons la p. 75 de [Dir] : « *The representation is then completely determined except for the arbitrary phase factors. For most purposes the arbitrary phase factors are unimportant and trivial, so that we may count the representation as being completely determined by the observables that are diagonal in it.* » Cela peut laisser penser que Dirac était convaincu de l’unicité de l’extension d’un état. Nous renvoyons à [Rob] pour davantage de détails quant à l’interprétation physique.

[Wea]. Cette traduction est donnée à la section 5. Les principaux résultats de A. Marcus, D. Spielman et N. Srivastava [MSS2, Thm.1.2] sont les suivants (où on note $p_A(z) = \det(z.1_m - A)$ le polynôme caractéristique de A , pour une matrice A de taille m).

THÉORÈME 1.7. — *Soient A_1, \dots, A_d des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans les matrices semi-définies positives de rang 1 de $M_m(\mathbb{C})$; posons $A = \sum_{i=1}^d A_i$. On suppose que $\mathbb{E}A = 1_m$ et que $\mathbb{E}\|A_i\| \leq \varepsilon$ pour $i = 1, \dots, d$. Alors la plus grande racine réelle de $\mathbb{E}p_A$ est au plus $(1 + \sqrt{\varepsilon})^2$.*

THÉORÈME 1.8. — *Soient A_1, \dots, A_d des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans les matrices semi-définies positives de rang 1 de $M_m(\mathbb{C})$; posons $A = \sum_{i=1}^d A_i$. On suppose que les A_i prennent un nombre fini de valeurs. Alors $\|A\|$ est inférieure ou égale à la plus grande racine réelle de $\mathbb{E}p_A$, pour au moins une réalisation des A_i .*

Comme $\|A\|$ est la plus grande racine positive de p_A , le théorème 1.8 se reformule : pour au moins une réalisation des A_i , la plus grande racine de p_A est inférieure ou égale à la plus grande racine de $\mathbb{E}p_A$. On peut donc penser à ce résultat comme une version «non linéaire» d'un principe de probabilité élémentaire : si X est une variable aléatoire réelle prenant un nombre fini de valeurs, alors $X \leq \mathbb{E}X$ pour au moins une réalisation de X .

1.4. Énoncés équivalents

Une série de travaux ont montré, depuis la fin des années 1970, que le problème de Kadison-Singer est équivalent à une série d'énoncés ouverts en algèbre linéaire, en analyse harmonique, en théorie des opérateurs, et en analyse du signal - énoncés qui se retrouvent donc démontrés du même coup ! Citons :

- la conjecture (KS_r) de N. Weaver [Wea]; voir les remarques précédant le théorème 5.1 ci-dessous ;
- la conjecture de pavage de J. Anderson [An2]; voir le théorème 5.3 ci-dessous ;
- la conjecture de Bourgain-Tzafriri sur les matrices dont toutes les colonnes sont de norme 1 - voir la section 6.
- la conjecture de Feichtinger en théorie des frames⁽⁶⁾ – voir également la section 6.

Les équivalences entre ces énoncés sont bien expliquées dans les travaux de P. Casazza et de ses collaborateurs (voir par exemple [CFTW]).

1.5. Organisation de l'article

Les théorèmes 1.7 et 1.8 seront démontrés à la section 4. La principale idée est de considérer p_A comme polynôme caractéristique mixte de A_1, \dots, A_d (voir la définition 4.1 ci-dessous), qui est une spécialisation d'un polynôme à $d + 1$ variables obtenu à partir de $\det(z.1_m + \sum_{i=1}^d z_i A_i)$. On est ainsi conduit à étudier une classe de polynômes à plusieurs variables, les polynômes *réels stables*, des polynômes à coefficients réels définis par une condition sur les zéros complexes (cf. Définition 3.1), qui sont étudiés

6. Nous utilisons cet anglicisme avec la bénédiction de S. Mallat [Mal].

via un mélange de méthodes réelles et complexes ; cette étude est faite à la section 3. La preuve originale de [MSS2] utilisait des propriétés d’entrelacements de zéros pour des familles de polynômes. Dans [Tao], T. Tao remplace les entrelacements de zéros par des arguments basés sur le fait que certaines combinaisons convexes de polynômes ont tous leurs zéros réels⁽⁷⁾. Nous nous inspirons très largement de l’approche de Tao. La solution du problème de Kadison-Singer est présentée à la section 5 ; les applications aux conjectures de Feichtinger et Bourgain-Tzafriri sont dans la section 6.

Marcus, Spielman et Srivastava ne se sont pas contentés de résoudre le problème de Kadison-Singer ! Deux mois plus tôt, ils avaient résolu par l’affirmative un problème à peine moins célèbre : celui de l’existence de familles infinies de graphes de Ramanujan de degré arbitraire (voir [MSS1]). Comme il s’agit d’une belle application du théorème 1.8, nous donnons leur preuve à la section 7.

2. NOTATIONS

2.1. Espaces de Hilbert

On notera $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ et $\ell_m^2 = \ell^2(\{1, \dots, m\})$; on note \mathbf{e}_k le k -ième vecteur de la base canonique ; pour $m < n$, on voit ℓ_m^2 comme le sous-espace de ℓ_n^2 engendré par $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$.
Produit scalaire : $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_n x_n \overline{y_n}$.
Normes : $\|\mathbf{x}\|_2 = (\sum_n |x_n|^2)^{1/2}$; $\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_n |x_n|$.

2.2. Opérateurs et matrices

On note $\mathcal{B}(\ell^2)$ l’algèbre des opérateurs linéaires bornés ; on les voit comme matrices de taille infinie par rapport à la base $(\mathbf{e}_k)_k$; pour $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$, on note $\text{diag}(T)$ la suite des valeurs diagonales de T . La *norme-opérateur* de T est :

$$\|T\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|_2 \leq 1} \|T(\mathbf{x})\|_2.$$

Un opérateur $P \in \mathcal{B}(\ell^2)$ est un *projecteur* si $P = P^* = P^2$. Un opérateur T est *semi-défini positif* si $\langle T(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \rangle \geq 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \ell^2$; de façon équivalente, il existe un opérateur S tel que $T = S^*S$. Pour S, T des opérateurs auto-adjoints, on note $S \leq T$ si $T - S$ est semi-défini positif.

On note $M_m(\mathbb{C})$ l’algèbre $\mathcal{B}(\ell_m^2)$ des matrices complexes de taille m ; la matrice-identité se note 1_m . Le polynôme caractéristique de la matrice $T \in M_m(\mathbb{C})$ est $p_T(z) = \det(z.1_m - T)$.

7. On sait que les deux approches sont équivalentes, voir [Fel, Thm. 2] ; [Sr2, Thm.4].

2.3. Fonctions et polynômes

Si $p(z)$ est un polynôme en une variable, $ZM(p)$ désigne le plus grand zéro réel de p (s'il existe). Pour les fonctions $f(z_1, \dots, z_d)$ sur \mathbb{C}^d , on note $\partial_i = \frac{\partial}{\partial z_i}$ l'opérateur de dérivée partielle par rapport à la i -ième variable. On note $\Phi_f^i = \frac{\partial_i f}{f}$ la dérivée logarithmique de f par rapport à la i -ième variable.

3. POLYNÔMES RÉELS STABLES

3.1. Définitions et premières propriétés

Notons $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ le demi-plan supérieur de \mathbb{C} .

DÉFINITION 3.1. — *Un polynôme en d variables z_1, \dots, z_d est réel stable si ses coefficients sont réels et s'il n'admet aucun zéro dans l'ouvert \mathbb{H}^d de \mathbb{C}^d .*

En particulier, un polynôme à une variable est réel stable, si et seulement si ses coefficients sont réels et tous ses zéros sont réels. Voici la principale source d'exemples de polynômes réels stables.

LEMME 3.2. — *Soient A_1, \dots, A_d des matrices semi-définies positives dans $M_m(\mathbb{C})$. Le polynôme $q(z, z_1, \dots, z_d) = \det(z \cdot 1_m + \sum_{i=1}^d z_i A_i)$ est réel stable.*

Preuve : En utilisant $A_i = A_i^*$, on voit facilement que

$$q(\bar{z}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_d) = \overline{q(z, z_1, \dots, z_d)},$$

donc q est à coefficients réels. Supposons par l'absurde que q s'annule en (z, z_1, \dots, z_d) , avec $\text{Im}(z) > 0$ et $\text{Im}(z_i) > 0$ pour $i = 1, \dots, d$. On trouve donc un vecteur $\xi \in \ell_m^2$ non nul, dans le noyau de l'opérateur $z \cdot 1_m + \sum_{i=1}^d z_i A_i$. En particulier $0 = z \|\xi\|_2^2 + \sum_{i=1}^d z_i \langle A_i(\xi) | \xi \rangle$, et les coefficients de cette combinaison linéaire de z, z_1, \dots, z_d sont positifs et non tous nuls. En prenant les parties imaginaires, on a une contradiction. \square

Une propriété importante de la classe des polynômes réels stables est d'être préservée par spécialisation à des valeurs réelles des variables.

PROPOSITION 3.3 ([Wag], lemma 2.4(d)). — *Soit $p(z_1, \dots, z_d)$ un polynôme réel stable, avec $d > 1$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Le polynôme à $d - 1$ variables $p(z_1, \dots, z_{d-1}, t)$ est réel stable, s'il n'est pas identiquement nul.*

Preuve : Il est clair que $q(z_1, \dots, z_{d-1}) = p(z_1, \dots, z_{d-1}, t)$ est à coefficients réels. Comme la suite de polynômes $(p(z_1, \dots, z_{d-1}, t + \frac{i}{n}))_{n \geq 1}$ converge vers q uniformément sur tout compact de \mathbb{H}^{d-1} et n'a pas de zéro dans \mathbb{H}^{d-1} , le théorème de Hurwitz en analyse complexe garantit que q est sans zéro dans \mathbb{H}^{d-1} , à moins d'être identiquement nul. \square

La classe des polynômes réels stables est aussi invariante par certains opérateurs différentiels :

PROPOSITION 3.4 ([MSS2], Cor. 3.7; [Wag], lemma 2.4(f))

Soit $p(z_1, \dots, z_d)$ un polynôme réel stable. Pour $t \in \mathbb{R}$, le polynôme $(1+t\partial_d)p(z_1, \dots, z_d)$ est réel stable.

Preuve : On peut bien sûr supposer $t \neq 0$. Supposons par l'absurde que $(1+t\partial_d)p$ ait un zéro (z_1, \dots, z_d) dans \mathbb{H}^d . Le polynôme $q(z) = p(z_1, \dots, z_{d-1}, z)$ est sans zéro dans \mathbb{H} , en particulier $q(z_d) \neq 0$. Factorisons q en facteurs du 1er degré : $q(z) = c \prod_{i=1}^n (z - w_i)$, où les zéros w_i satisfont $\operatorname{Im}(w_i) \leq 0$. On a alors

$$0 = (1+t\partial_d)p(z_1, \dots, z_d) = (q + tq')(z_d) = q(z_d)(1 + t(\frac{q'}{q})(z_d));$$

donc en prenant la dérivée logarithmique de q :

$$0 = 1 + t(\frac{q'}{q})(z_d) = 1 + t \sum_{i=1}^n \frac{1}{z_d - w_i} = 1 + t \sum_{i=1}^n \frac{\overline{z_d - w_i}}{|z_d - w_i|^2}.$$

En prenant les parties imaginaires :

$$0 = t \sum_{i=1}^n \frac{\operatorname{Im}(w_i) - \operatorname{Im}(z_d)}{|z_d - w_i|^2}.$$

Mais ceci est une contradiction car $t \neq 0$ et $\operatorname{Im}(w_i) < \operatorname{Im}(z_d)$ pour $i = 1, \dots, d$. □

3.2. Propriétés de convexité

LEMME 3.5 ([Tao], lemma 14). — Soient $p(z)$ et $q(z)$ deux polynômes en une variable, de même degré, avec coefficient de plus haut degré égal à 1. On suppose que, pour tout $t \in [0, 1]$, le polynôme $(1-t)p + tq$ est réel stable. Alors $ZM((1-t)p + tq)$ est dans l'intervalle $[ZM(p), ZM(q)]$.

Preuve : On peut bien sûr supposer $0 < t < 1$ et $ZM(p) \leq ZM(q)$.

- Commençons par montrer que $ZM((1-t)p + tq) \leq ZM(q)$. Si $x > ZM(q)$, on a simultanément $q(x) > 0$ et $p(x) > 0$, donc $((1-t)p + tq)(x) > 0$, et donc $x > ZM((1-t)p + tq)$.
- Pour montrer $ZM(p) \leq ZM((1-t)p + tq)$, il suffit de montrer que $q(ZM(p)) \leq 0$ (alors $((1-t)p + tq)(ZM(p)) \leq 0$, et le résultat découle du théorème des valeurs intermédiaires).

Supposons par l'absurde que $q(ZM(p)) > 0$, donc aussi $q(x) > 0$ pour $ZM(p) < x < ZM(p) + \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$ assez petit.

On va utiliser le caractère réel stable comme suit : la fonction $N : [0, 1] \rightarrow \mathbb{N}$ qui compte le nombre de zéros (avec multiplicités) de $(1-t)p + tq$ dans l'intervalle $[ZM(p) + \varepsilon, ZM(q)]$ est constante. En effet, comme $(1-t)p + tq$ est strictement positif à gauche de $ZM(p) + \varepsilon$ et à droite de $ZM(q)$, les zéros ne peuvent pas «s'échapper» à gauche ou à droite. Donc la seule façon pour N de varier est qu'il existe une valeur de t où deux zéros réels de $(1-t)p + tq$ se confondent et bifurquent en des zéros complexes conjugués (ou vice versa), ce qui est exclu par le caractère réel stable de $(1-t)p + tq$. Ceci fournit la contradiction désirée, puisque

$N(0) = 0$ (p est strictement positif à droite de $ZM(p)$) et $N(1) \geq 2$ (comme $q(ZM(p) + \varepsilon) > 0$, le polynôme q a au moins 2 zéros sur l'intervalle considéré. \square)

Pour $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, on définit l'orthant $\{\mathbf{y} \geq \mathbf{x}\}$ comme :

$$\{\mathbf{y} \geq \mathbf{x}\} = \{\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d : y_i \geq x_i \text{ pour tout } i = 1, \dots, d\}.$$

Rappelons que, pour une fonction f de d variables, on note $\Phi_f^j = \frac{\partial_j f}{f}$ la dérivée logarithmique de f par rapport à la j -ième variable ($j = 1, \dots, d$).

LEMME 3.6 ([MSS2], lemma 5.7; [Tao], lemma 17). — Soit $p(z_1, \dots, z_d)$ un polynôme réel stable; soit $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$; si p est sans zéro dans l'orthant $\{\mathbf{y} \geq \mathbf{x}\}$; alors, pour tous $k \in \mathbb{N}$, $i, j \in \{1, \dots, d\}$, on a $(-1)^k \frac{\partial^k}{\partial z_j^k} \Phi_p^i(x_1, \dots, x_d) \geq 0$. En particulier la fonction $t \mapsto \Phi_p^i(\mathbf{x} + te_j)$ est positive, décroissante, et convexe pour $t \geq 0$.

Preuve : En 2 pas :

- 1) $d = 1$. Comme dans la preuve de la proposition 3.4, on écrit $p(z) = c \prod_{i=1}^n (z - w_i)$, où les w_i sont réels. Alors $\Phi_p(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x - w_i}$, et donc la dérivée k -ième $\Phi_p^{(k)}$ est donnée par $\Phi_p^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{i=1}^n \frac{k!}{(x - w_i)^{k+1}}$; la dernière somme est positive pour $x > ZM(p)$.
- 2) $d > 1$. Pour $k = 0$ ou $i = j$, le résultat découle du pas (1). On peut donc supposer $k \geq 1$ et $i \neq j$. Quitte à renuméroter les variables, on peut supposer $d = 2$, $i = 1$ et $j = 2$ et il faut montrer que, si $p(z_1, z_2)$ est réel stable sans zéro dans le quadrant $\{y_1 \geq x_1, y_2 \geq x_2\}$, alors

$$\begin{aligned} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial z_2^k} \Phi_p^1(x_1, x_2) \geq 0 &\Leftrightarrow (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial z_2^k} \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \log p \right)(x_1, x_2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z_1} \left((-1)^k \frac{\partial^k}{\partial z_2^k} \log p \right)(x_1, x_2) \geq 0. \end{aligned}$$

On va donc montrer que la fonction $t \mapsto (-1)^k \left(\frac{\partial^k}{\partial z_2^k} \log p \right)(t, x_2)$ est croissante pour $t \geq x_1$. Par continuité, il suffit de le montrer pour un ensemble générique de valeurs de t (où un ensemble fini de valeurs exceptionnelles est exclu).

Pour t fixé, le polynôme $q(z) = p(t, z)$ est réel stable de degré $n = n(t)$ (voir le lemme 3.3), avec des racines réelles $y_1(t), \dots, y_n(t)$ (éventuellement multiples). Pour t générique, le degré n de q ne dépend pas de t , et on peut supposer que les racines y_i dépendent de t au moins de manière C^1 . Comme au pas (1), on écrit $q(z) = c \prod_{i=1}^n (z - y_i(t))$ donc

$$\begin{aligned} (-1)^k \left(\frac{\partial^k}{\partial z_2^k} \log p \right)(t, x_2) &= (-1)^k (\log q)^{(k)}|_{z=x_2} \\ &= (-1)^k \left(\sum_{i=1}^n \log(z - y_i(t)) \right)^{(k)}|_{z=x_2} = - \sum_{i=1}^n \frac{(k-1)!}{(x_2 - y_i(t))^k}, \end{aligned}$$

et il suffit de montrer que $t \mapsto \frac{1}{x_2 - y_i(t)}$ est décroissante, pour $i = 1, \dots, n$ et $t \geq x_1$. Comme p est sans zéro dans le quadrant $\{y_1 \geq x_1, y_2 \geq x_2\}$, on a $x_2 > ZM(q)$, c-à-d. $x_2 > y_i(t)$ pour $i = 1, \dots, n$. Donc il suffit de montrer que $t \mapsto y_i(t)$ est décroissante pour $i = 1, \dots, n$. Si ce n'était pas le cas, on trouverait un indice i et une valeur τ_1 de t telle que $y'_i(\tau_1) > 0$. Soit $\tau_2 = y_i(\tau_1)$. Considérons le développement de Taylor de p autour de (τ_1, τ_2) :

$$p(z_1, z_2) = p(\tau_1, \tau_2) + (z_1 - \tau_1)(\partial_1 p)(\tau_1, \tau_2) + (z_2 - \tau_2)(\partial_2 p)(\tau_1, \tau_2) + O(|z_1 - \tau_1|^2 + |z_2 - \tau_2|^2).$$

Mais $p(\tau_1, \tau_2) = 0$ et $(\partial_1 p)(t, z) = -c \sum_{k=1}^n y'_k(t) \prod_{j \neq k} (z - y_j(t))$, donc $(\partial_1 p)(\tau_1, \tau_2) = -c y'_i(\tau_1) \prod_{j \neq i} (\tau_2 - y_j(\tau_1))$; tandis que $(\partial_2 p)(t, z) = c \sum_{k=1}^n \prod_{j \neq k} (z - y_j(t))$, donc $(\partial_2 p)(\tau_1, \tau_2) = c \prod_{j \neq i} (\tau_2 - y_j(\tau_1))$. Ainsi :

$$p(z_1, z_2) = c \prod_{j \neq i} (\tau_2 - y_j(\tau_1)) [(z_2 - \tau_2) - y'_i(\tau_1)(z_1 - \tau_1)] + O(|z_1 - \tau_1|^2 + |z_2 - \tau_2|^2).$$

Comme $y'_i(\tau_1) > 0$, la droite complexe d'équation $(z_2 - \tau_2) - y'_i(\tau_1)(z_1 - \tau_1) = 0$ rencontre l'ouvert \mathbb{H}^2 de \mathbb{C}^2 . Par le théorème des fonctions implicites, p a des zéros voisins de (τ_1, τ_2) dans \mathbb{H}^2 , ce qui contredit le caractère réel stable de p . \square

LEMME 3.7 ([MSS2], lemma 5.9; [Tao], lemma 20). — Soit $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Soit $p(z_1, \dots, z_d)$ un polynôme réel stable, sans zéro dans l'orthant $\{\mathbf{y} \geq \mathbf{x}\}$. On suppose que, pour un certain $j \in \{1, \dots, d\}$, il existe $\delta > 0$ tel que $\Phi_p^j(x_1, \dots, x_d) + \frac{1}{\delta} \leq 1$. Alors $(1 - \partial_j)p$ n'a pas de zéro dans l'orthant $\{\mathbf{y} \geq \mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_j\}$, et de plus pour tout $i = 1, \dots, d$:

$$(1) \quad \Phi_{(1-\partial_j)p}^i(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_j) \leq \Phi_p^i(\mathbf{x}).$$

Preuve : Si \mathbf{y} est dans l'orthant $\{\mathbf{y} \geq \mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_j\}$, alors par le lemme 3.6 on a $\Phi_p^j(\mathbf{y}) \leq \Phi_p^j(\mathbf{x}) \leq 1 - \frac{1}{\delta} < 1$, donc $\partial_j p(\mathbf{y}) < p(\mathbf{y})$ et ainsi $(1 - \partial_j)p(\mathbf{y}) > 0$.

Pour montrer l'inégalité (1), partons de $(1 - \partial_j)p = p(1 - \Phi_p^j)$ et prenons la dérivée logarithmique par rapport à la i -ième variable : $\Phi_{(1-\partial_j)p}^i = \Phi_p^i - \frac{\partial_i \Phi_p^j}{1 - \Phi_p^j}$. Donc (1) est équivalente à :

$$(2) \quad -\frac{\partial_i \Phi_p^j(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_j)}{1 - \Phi_p^j(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_j)} \leq \Phi_p^i(\mathbf{x}) - \Phi_p^i(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_j).$$

Pour montrer (2), on remarque d'abord que, par le lemme 3.6, on a $\Phi_p^j(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_j) \leq \Phi_p^j(\mathbf{x})$ et, par hypothèse, $\Phi_p^j(x_1, \dots, x_d) \leq 1 - \frac{1}{\delta}$, donc $\Phi_p^j(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_j) \leq 1 - \frac{1}{\delta}$ d'où :

$$\delta \geq \frac{1}{1 - \Phi_p^j(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_j)}.$$

Comme p est sans zéro dans l'orthant $\{\mathbf{y} \geq \mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_j\}$, le lemme 3.6 (appliqué en $\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_j$) donne $-\partial_i \Phi_p^j(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_j) \geq 0$, donc

$$-\delta \cdot \partial_i \Phi_p^j(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_j) \geq -\frac{\partial_i \Phi_p^j(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_j)}{1 - \Phi_p^j(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_j)}.$$

Pour établir (2), il suffit donc de montrer $-\delta \cdot \partial_i \Phi_p^j(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_j) \leq \Phi_p^i(\mathbf{x}) - \Phi_p^i(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_j)$. Mais

$$\partial_i \Phi_p^j(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_j) = (\partial_i \partial_j \log p)(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_j) = (\partial_j \partial_i \log p)(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_j) = \partial_j \Phi_p^i(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_j),$$

donc on veut démontrer

$$-\delta \cdot \partial_j \Phi_p^i(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_j) \leq \Phi_p^i(\mathbf{x}) - \Phi_p^i(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_j) \iff \Phi_p^i(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_j) \leq \Phi_p^i(\mathbf{x}) + \delta \cdot \partial_j \Phi_p^i(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_j)$$

qui exprime exactement la convexité de la fonction $t \mapsto \Phi_p^i(\mathbf{x} + t \mathbf{e}_j)$, établie au lemme 3.6. \square

PROPOSITION 3.8 ([Tao], Cor. 21). — *Soit $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Soit $p(z_1, \dots, z_d)$ un polynôme réel stable, sans zéro dans l'orthant $\{\mathbf{y} \geq \mathbf{x}\}$. S'il existe $\delta > 0$ tel que $\Phi_p^j(x_1, \dots, x_d) + \frac{1}{\delta} \leq 1$ (pour tout $j = 1, \dots, d$), alors le polynôme $(\prod_{i=1}^d (1 - \partial_i))p$ est sans zéro dans l'orthant $\{\mathbf{y} \geq \mathbf{x} + \mathbf{d}\}$, où $\mathbf{d} = (\delta, \dots, \delta)$.*

Preuve : Pour $0 \leq k \leq d$, posons $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1 + \delta, \dots, x_k + \delta, x_{k+1}, \dots, x_d)$, et $q_k = (\prod_{i=1}^k (1 - \partial_i))p$. Par récurrence sur k à partir du lemme 3.7, on voit que q_k n'a pas de zéro dans l'orthant $\{\mathbf{y} \geq \mathbf{x}^{(k)}\}$ et $\Phi_{q_k}^j(\mathbf{x}^{(k)}) + \frac{1}{\delta} \leq 1$ pour $j = 1, \dots, d$. On obtient le résultat désiré pour $k = d$. \square

4. POLYNÔMES CARACTÉRISTIQUES MIXTES

4.1. Définitions

DÉFINITION 4.1. — *Pour des matrices $A_1, \dots, A_d \in M_m(\mathbb{C})$, le polynôme caractéristique mixte de la famille $\{A_1, \dots, A_d\}$ est :*

$$\mu[A_1, \dots, A_d](z) = \left(\prod_{i=1}^d (1 - \partial_i) \right) \det \left(z \cdot 1_m + \sum_{i=1}^d z_i A_i \right) \Big|_{z_1 = \dots = z_d = 0}.$$

Exemple 4.2. — Si A_1, \dots, A_d sont des matrices semi-définies positives, il résulte du lemme 3.2 et des propositions 3.3 et 3.4 que $\mu[A_1, \dots, A_d](z)$ est un polynôme réel stable, c-à-d. a toutes ses racines réelles.

La principale motivation pour la définition 4.1, vient du lemme suivant :

LEMME 4.3 ([Tao], Prop. 3). — *Soient A_1, \dots, A_d des matrices de rang 1 dans $M_m(\mathbb{C})$, et $A = \sum_{i=1}^d A_i$. Alors*

$$p_A(z) = \mu[A_1, \dots, A_d](z).$$

Preuve : On commence par observer que, pour toute matrice $B \in M_m(\mathbb{C})$, le polynôme $(z_1, \dots, z_d) \mapsto \det(B + \sum_{i=1}^d z_i A_i)$ est *affine-multilinéaire*, c-à-d. de la forme

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq d} c_{i_1, \dots, i_d} z_{i_1} \dots z_{i_j}$$

(ou encore : dans chaque monôme, chaque variable apparaît avec un degré ≤ 1). Le cas $d = 1$ se traite en travaillant dans une base dont le premier vecteur est dans l'image

de A_1 , et en développant le déterminant par rapport à la première ligne. Le cas général se ramène à $d = 1$ en «gelant» $d - 1$ variables.

Comme un polynôme affine-multilinéaire est égal à son développement de Taylor à l'ordre $(1, \dots, 1)$, on a :

$$\det\left(B + \sum_{i=1}^d t_i A_i\right) = \left(\prod_{i=1}^d (1 + t_i \partial_i)\right) \det\left(B + \sum_{i=1}^d z_i A_i\right) \Big|_{z_1=\dots=z_d=0}.$$

Le résultat s'obtient alors avec $B = z \cdot 1_m$ et $t_1 = \dots = t_d = -1$. \square

4.2. Preuve du théorème 1.8

PROPOSITION 4.4 ([Tao], Cor. 4 et 15). — *Soient A_1, \dots, A_d des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans les matrices semi-définies positives de rang 1 de $M_m(\mathbb{C})$, et $A = \sum_{i=1}^d A_i$. Alors :*

- 1) $\mathbb{E}p_A(z) = \mu[\mathbb{E}A_1, \dots, \mathbb{E}A_d](z)$.
- 2) *Supposons de plus que les A_i prennent un nombre fini de valeurs. Alors, pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$ et toute réalisation de A_1, \dots, A_{j-1} , on a*

$$ZM(\mu[A_1, \dots, A_{j-1}, A_j, \mathbb{E}A_{j+1}, \dots, \mathbb{E}A_d]) \leq ZM(\mu[A_1, \dots, A_{j-1}, \mathbb{E}A_j, \mathbb{E}A_{j+1}, \dots, \mathbb{E}A_d])$$

pour au moins une réalisation de A_j .

Preuve :

- 1) Par le lemme 4.3, on a $p_A(z) = \mu[A_1, \dots, A_d](z)$ et la preuve du même lemme montre que $\mu[A_1, \dots, A_d](z)$ est une somme de termes multilinéaires en les coefficients de A_1, \dots, A_d . En utilisant l'indépendance des A_i , on voit alors que $\mathbb{E}\mu[A_1, \dots, A_d](z) = \mu[\mathbb{E}A_1, \dots, \mathbb{E}A_d](z)$.
- 2) Comme $\mathbb{E}A_j$ est une combinaison convexe des valeurs de A_j , vu le caractère affine-multilinéaire de μ , le polynôme $\mu[A_1, \dots, A_{j-1}, \mathbb{E}A_j, \mathbb{E}A_{j+1}, \dots, \mathbb{E}A_d](z)$ est une combinaison convexe des polynômes $\mu[A_1, \dots, A_{j-1}, A_j, \mathbb{E}A_{j+1}, \dots, \mathbb{E}A_d](z)$, lesquels sont des polynômes réels stables. Par le lemme 3.5,

$$ZM(\mu[A_1, \dots, A_{j-1}, \mathbb{E}A_j, \mathbb{E}A_{j+1}, \dots, \mathbb{E}A_d])$$

est dans l'enveloppe convexe des $ZM(\mu[A_1, \dots, A_{j-1}, A_j, \mathbb{E}A_{j+1}, \dots, \mathbb{E}A_d])$. L'événement décrit dans l'énoncé se produit donc pour au moins une réalisation de A_j . \square

Preuve du théorème 1.8 : Par le point (1) de la proposition 4.4 :

$$ZM(\mathbb{E}p_A) = ZM(\mu[\mathbb{E}A_1, \dots, \mathbb{E}A_d]).$$

Puis on déroule les d inégalités du point (2) de la proposition 4.4 ; pour au moins une réalisation de A_1 :

$$ZM(\mu[\mathbb{E}A_1, \dots, \mathbb{E}A_d]) \geq ZM(\mu[A_1, \mathbb{E}A_2, \dots, \mathbb{E}A_d]);$$

pour au moins une réalisation de A_2 :

$$ZM(\mu[A_1, \mathbb{E}A_2, \dots, \mathbb{E}A_d]) \geq ZM(\mu[A_1, A_2, \mathbb{E}A_3, \dots, \mathbb{E}A_d]),$$

etc. Au final, pour au moins une réalisation de A_1, A_2, \dots, A_d :

$$ZM(\mathbb{E}p_A) \geq ZM(\mu[A_1, \dots, A_d]).$$

Enfin, par le lemme 4.3, on a : $ZM(\mu[A_1, \dots, A_d]) = ZM(p_A) = \|A\|$. \square

4.3. Preuve du théorème 1.7

PROPOSITION 4.5 ([MSS2], Thm. 5.1 ; [Tao], Thm. 18). — Soient $A_1, \dots, A_d \in M_m(\mathbb{C})$ des matrices semi-définies positives, avec $\sum_{i=1}^d A_i = 1_m$ et $\text{tr}(A_i) \leq \varepsilon$ pour $i = 1, \dots, d$. Soit $p(z_1, \dots, z_d) = \det(\sum_{i=1}^d z_i A_i)$. Alors le polynôme $(\prod_{i=1}^d (1 - \partial_i))p$ n'a pas de zéro dans l'orthant $\{\mathbf{y} \geq \mathbf{e}\}$, où $\mathbf{e} = ((1 + \sqrt{\varepsilon})^2, \dots, (1 + \sqrt{\varepsilon})^2)$.

Preuve : On veut appliquer la proposition 3.8 au polynôme p . Celui-ci est réel stable, comme spécialisation du polynôme $(z, z_1, \dots, z_d) \mapsto \det(z \cdot 1_m + \sum_{i=1}^d z_i A_i)$ (voir le lemme 3.2 et la proposition 3.3). Soient $t > 0$ un paramètre positif et $\mathbf{t} = (t, \dots, t)$. Montrons que p est sans zéro dans l'orthant $\{\mathbf{x} \geq \mathbf{t}\}$. En effet, pour (x_1, \dots, x_d) dans cet orthant, on a $\sum_{i=1}^d x_i A_i \geq \sum_{i=1}^d t A_i = t \cdot 1_m$, donc $\sum_{i=1}^d x_i A_i$ est inversible. Il reste à vérifier la condition sur les Φ_p^j . On va pour cela utiliser la *formule de Jacobi* : si $t \mapsto A(t)$ est une fonction dérivable à valeurs dans $M_m(\mathbb{C})$, on a $(\det A(t))' = \text{tr}(\text{adj}(A(t)) \cdot A'(t))$, où adj désigne la matrice des co-facteurs ; en particulier, si $A(t)$ est inversible, la dérivée logarithmique de $\det A(t)$ est donnée par : $\frac{(\det A(t))'}{\det A(t)} = \text{tr}(A(t)^{-1} \cdot A'(t))$.

Ici, avec (x_1, \dots, x_d) dans l'orthant strictement positif :

$$\Phi_p^j(x_1, \dots, x_d) = \text{tr}\left(\left(\sum_{i=1}^d x_i A_i\right)^{-1} \cdot A_j\right).$$

En particulier $\Phi_p^j(t, \dots, t) = \frac{\text{tr}(A_j)}{t} \leq \frac{\varepsilon}{t}$. Prenons alors $t = \varepsilon + \sqrt{\varepsilon}$ et $\delta = 1 + \sqrt{\varepsilon}$, de sorte que $\frac{\varepsilon}{t} + \frac{1}{\delta} = 1$, et donc $\Phi_p^j(t, \dots, t) + \frac{1}{\delta} \leq 1$. En remarquant que $t + \delta = (1 + \sqrt{\varepsilon})^2$, la proposition 3.8 s'applique et donne le résultat désiré. \square

Preuve du théorème 1.7 : Par le point (1) de la proposition 4.4, on a :

$$\mathbb{E}p_A(z) = \left(\prod_{i=1}^d (1 - \partial_i)\right) \det\left(z \cdot 1_m + \sum_{i=1}^d z_i \mathbb{E}A_i\right) \Big|_{z_1=\dots=z_d=0}.$$

Mais $z \cdot 1_m + \sum_{i=1}^d z_i \mathbb{E}A_i = \sum_{i=1}^d (z + z_i) \mathbb{E}A_i$, donc par une translation de z sur les variables z_i on a :

$$\mathbb{E}p_A(z) = \left(\prod_{i=1}^d (1 - \partial_i)\right) \det\left(\sum_{i=1}^d z_i \mathbb{E}A_i\right) \Big|_{z_1=\dots=z_d=z}.$$

En notant que $\text{tr}(\mathbb{E}A_i) = \mathbb{E}(\text{tr}(A_i)) = \mathbb{E}\|A_i\| \leq \varepsilon$ (car A_i est semi-définie positive de rang 1), on peut appliquer la proposition 4.5 aux matrices $\mathbb{E}A_i$: le polynôme $(\prod_{i=1}^d (1 - \partial_i)) \det(\sum_{i=1}^d z_i \mathbb{E}A_i)$ n'a pas de zéro dans l'orthant $\{\mathbf{y} \geq \mathbf{e}\}$, où $\mathbf{e} = ((1 + \sqrt{\varepsilon})^2, \dots, (1 + \sqrt{\varepsilon})^2)$, donc $ZM(\mathbb{E}p_A) \leq (1 + \sqrt{\varepsilon})^2$. \square

5. SOLUTION DU PROBLÈME DE KADISON-SINGER

Dans [Wea], N. Weaver introduit pour chaque entier $r \geq 2$ une conjecture KS_r , et montre que chacune est équivalente au problème de Kadison-Singer :

(KS_r) : Soit $r \geq 2$. Il existe des constantes universelles $N \geq 2$ et $\varepsilon > 0$ telles que : si $A_1, \dots, A_d \in M_m(\mathbb{C})$ sont des matrices semi-définies positives de rang 1, avec $\sum_{i=1}^d A_i = N \cdot 1_m$ et $\|A_i\| \leq 1$ pour $i = 1, \dots, d$, alors il existe une partition $\{S_1, \dots, S_r\}$ de $\{1, \dots, d\}$ telle que $\|\sum_{i \in S_j} A_i\| \leq N - \varepsilon$.

Au corollaire 1.3 de [MSS2], Marcus, Spielman et Srivastava démontrent la conjecture KS_2 avec $N = 18$ et $\varepsilon = 2$. Nous adoptons la forme légèrement différente proposée par T. Tao ([Tao], Theorem 22).

THÉORÈME 5.1. — *On fixe des entiers $d, m, r \geq 2$ et une constante $C > 0$. Soient $A_1, \dots, A_d \in M_m(\mathbb{C})$ des matrices semi-définies positives de rang 1, avec $\|A_i\| \leq C$ pour $i = 1, \dots, d$ et $\sum_{i=1}^d A_i = 1_m$. Il existe une partition $\{S_1, \dots, S_r\}$ de $\{1, \dots, d\}$ telle que $\|\sum_{i \in S_j} A_i\| \leq (\sqrt{\frac{1}{r}} + \sqrt{C})^2$ pour $j = 1, \dots, r$.*

Preuve : Pour $i = 1, \dots, d$, on note E_i la variable aléatoire uniforme sur $\{1, \dots, r\}$, qui consiste à tirer au hasard, avec probabilité $\frac{1}{r}$, un projecteur P_j sur un des r vecteurs de base e_j de ℓ_r^2 . Pour $i = 1, \dots, d$, on pose alors $\tilde{A}_i = r(A_i \otimes E_i)$, et $\tilde{A} = \sum_{i=1}^d \tilde{A}_i$. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\tilde{A} &= r \sum_{i=1}^d \mathbb{E}(A_i \otimes E_i) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^r (A_i \otimes P_j) \\ &= \sum_{j=1}^r \left(\sum_{i=1}^d A_i \right) \otimes P_j = \sum_{j=1}^r (1_m \otimes P_j) = 1_m \otimes \left(\sum_{j=1}^r P_j \right) = 1_m \otimes 1_r. \end{aligned}$$

De plus : $\|\tilde{A}_i\| = r\|A_i\| \leq rC$.

On applique le théorème 1.8, puis le théorème 1.7 (avec $\varepsilon = rC$) : pour au moins une réalisation des \tilde{A}_i :

$$\|\tilde{A}\| \leq ZM(\mathbb{E}p_{\tilde{A}}) \leq (1 + \sqrt{rC})^2.$$

Cette réalisation des \tilde{A}_i permet de définir la partition $\{S_1, \dots, S_r\}$ de $\{1, \dots, d\}$:

$$S_j = \{i \in \{1, \dots, d\} : E_i = P_j\} \quad (j = 1, \dots, r).$$

On a alors :

$$r \left\| \sum_{i \in S_j} A_i \right\| = r \left\| \sum_{i \in S_j} (A_i \otimes P_j) \right\| = \left\| \sum_{i \in S_j} \tilde{A}_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^d \tilde{A}_i \right\| = \|\tilde{A}\| \leq (1 + \sqrt{rC})^2.$$

On a alors le résultat en divisant par r . \square

LEMME 5.2 ([Tao], Cor. 23). — Soit $P \in M_d(\mathbb{C})$ un projecteur. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, il existe des projecteurs diagonaux $Q_1, \dots, Q_r \in M_d(\mathbb{C})$ avec $\sum_{i=1}^r Q_i = 1_d$ et

$$\|Q_i P Q_i\| \leq \left(\sqrt{\frac{1}{r}} + \sqrt{\|diag(P)\|_\infty} \right)^2.$$

Preuve : Notons $V \subset \ell_d^2$ l'image de P , et $m = \dim V$ son rang. On définit une famille A_1, \dots, A_d d'opérateurs de rang 1 sur V par : $A_i(v) = \langle v | P(e_i) \rangle P(e_i)$. Alors $\|A_i\| = \|P(e_i)\|_2^2 = \langle P(e_i) | e_i \rangle \leq \|diag(P)\|_\infty$. De plus $\sum_{i=1}^d A_i = 1_m$ car

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\sum_{i=1}^d A_i \right) v | v \right\rangle &= \sum_{i=1}^d \langle A_i(v) | v \rangle = \sum_{i=1}^d |\langle v | P(e_i) \rangle|^2 \\ &= \sum_{i=1}^d |\langle P(v) | e_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^d |\langle v | e_i \rangle|^2 = \|v\|_2^2 \end{aligned}$$

puisque $v \in V$. On applique le théorème 5.1 avec $C = \|diag(P)\|_\infty$: il existe une partition $\{S_1, \dots, S_r\}$ de $\{1, \dots, d\}$ avec

$$\left\| \sum_{i \in S_j} A_i \right\| \leq \left(\sqrt{\frac{1}{r}} + \sqrt{\|diag(P)\|_\infty} \right)^2,$$

pour $j = 1, \dots, r$. Notons alors Q_j le projecteur diagonal de $M_d(\mathbb{C})$ correspondant à S_j . On a, pour $j = 1, \dots, r$:

$$\|Q_j P Q_j\| = \|(Q_j P)(Q_j P)^*\| = \|Q_j P\|^2 = \|Q_j|_V\|^2.$$

Mais, pour $v \in V$ (donc $v = P(v)$) :

$$\begin{aligned} \|Q_j(v)\|_2^2 &= \sum_{i \in S_j} |\langle v | e_i \rangle|^2 = \sum_{i \in S_j} |\langle P(v) | e_i \rangle|^2 = \sum_{i \in S_j} |\langle v | P(e_i) \rangle|^2 \\ &= \sum_{i \in S_j} \langle A_i(v) | v \rangle \leq \left\| \sum_{i \in S_j} A_i \right\| \|v\|_2^2 \leq \left(\sqrt{\frac{1}{r}} + \sqrt{\|diag(P)\|_\infty} \right)^2 \|v\|_2^2, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. \square

L'équivalence de l'énoncé suivant avec le problème de Kadison-Singer apparaît dans l'article original de Kadison-Singer [KS, lemma 5].

THÉORÈME 5.3. — Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ avec $diag(T) = 0$, il existe une famille Q_1, \dots, Q_r de projecteurs diagonaux, avec $\sum_{i=1}^r Q_i = 1$ et $\|Q_i T Q_i\| \leq \varepsilon \|T\|$ pour $i = 1, \dots, r$.

Ce résultat affirme donc que, pour tout opérateur T de diagonale nulle, on peut trouver une partition finie $\{A_1, \dots, A_r\}$ de \mathbb{N} , telle que la norme des opérateurs compressés $(T_{mn})_{m,n \in A_i}$ (pour $i = 1, \dots, r$) soit arbitrairement petite. L'étude des opérateurs de diagonale nulle est naturelle, en vue du problème de Kadison-Singer.

Exemple 5.4. — Considérons l'opérateur S de décalage unilatéral sur ℓ^2 , défini par $S\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cet opérateur vérifie la conjecture de pavage avec $\varepsilon = 0$: il suffit de prendre pour P_1 l'ensemble $2\mathbb{N}+1$ des nombres impairs, et pour P_2 l'ensemble $2\mathbb{N}$ des nombres pairs ; on a clairement $Q_1 S Q_1 = Q_2 S Q_2 = 0$.

Preuve du théorème 5.3 : La preuve se fait en trois pas : on traite d'abord le cas des matrices auto-adjointes de taille finie ; puis on passe aux matrices de taille finie quelconques ; enfin un argument de compacité permet de passer de la dimension finie à la dimension infinie. L'énoncé pour des matrices de taille finie est connu dans la littérature sous le nom de *conjecture de pavage de J. Anderson* ; pour l'équivalence avec le problème de Kadison-Singer, voir [An2, Theorem 3.6].

Premier pas (d'après une idée de P. Casazza) : Soit $T = T^* \in M_d(\mathbb{C})$ avec $\text{diag}(T) = 0$; on peut clairement supposer $\|T\| \leq 1$. On forme alors, dans $M_{2d}(\mathbb{C})$, la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1+T}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{1-T^2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{1-T^2} & \frac{1-T}{2} \end{pmatrix} ;$$

c'est un projecteur qui de plus vérifie $\text{diag}(P_1) = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$. On prend r assez grand pour avoir $2\left(\sqrt{\frac{1}{r}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 - 1 \leq \varepsilon$. Par le lemme 5.2, on trouve des projecteurs diagonaux $Q''_1, \dots, Q''_r \in M_{2d}(\mathbb{C})$, avec $\sum_{i=1}^r Q''_i = 1_{2d}$ et $\|Q''_i P Q''_i\| \leq \left(\sqrt{\frac{1}{r}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$ pour $i = 1, \dots, r$. Dans $M_{2d}(\mathbb{C})$, notons E (resp. E') le projecteur sur le sous-espace engendré par les d premiers (resp. derniers) vecteurs de base, de sorte que $EPE = \frac{1+T}{2}$ (resp. $E'PE' = \frac{1-T}{2}$). Pour $i = 1, \dots, r$, posons $Q_i = EQ''_i$ (resp. $Q'_i = E'Q''_i$), donc $\sum_{i=1}^r Q_i = \sum_{j=1}^r Q'_j = 1_d$ et, pour $i = 1, \dots, d$:

$$\|Q_i(1+T)Q_i\| \leq 2\left(\sqrt{\frac{1}{r}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 \quad (\text{resp. } \|Q'_i(1-T)Q'_i\| \leq 2\left(\sqrt{\frac{1}{r}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2).$$

Donc

$$-Q_i \leq Q_i T Q_i \leq \left[2\left(\sqrt{\frac{1}{r}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 - 1\right] Q_i \leq \varepsilon Q_i$$

(resp.

$$-\varepsilon Q'_i \leq \left[1 - 2\left(\sqrt{\frac{1}{r}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2\right] Q'_i \leq Q'_i T Q'_i \leq Q'_i).$$

Posons $Q_{i,j} = Q_i Q'_j$ ($1 \leq i, j \leq r$). On a alors $\sum_{i,j=1}^r Q_{i,j} = 1_d$ et :

$$-\varepsilon Q_{i,j} \leq Q_{i,j} T Q_{i,j} \leq \varepsilon Q_{i,j},$$

donc $\|Q_{i,j} T Q_{i,j}\| \leq \varepsilon$.

Deuxième pas : Soit $T \in M_d(\mathbb{C})$ avec $\text{diag}(T) = 0$. On écrit $T = \frac{T+T^*}{2} + i\left(\frac{T-T^*}{2i}\right)$, et on applique le premier cas aux matrices auto-adjointes $A = \frac{T+T^*}{2}$ et $B = \frac{T-T^*}{2i}$ (en observant que $\|A\| \leq \|T\|$ et $\|B\| \leq \|T\|$). On trouve donc des projecteurs diagonaux $Q'_1, \dots, Q'_r, Q''_1, \dots, Q''_r \in M_d(\mathbb{C})$ avec $\sum_{i=1}^r Q'_i = \sum_{j=1}^r Q''_j = 1_d$ et $\|Q'_i A Q'_i\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|T\|$ pour $i = 1, \dots, r$ et $\|Q''_j B Q''_j\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|T\|$ pour $j = 1, \dots, r$. On pose alors $Q_{ij} = Q'_i Q''_j$ et on a $\sum_{i,j} Q_{ij} = 1_d$ avec $\|Q_{ij} T Q_{ij}\| \leq \varepsilon \|T\|$ pour $1 \leq i, j \leq r$.

Troisième pas : Soit $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$, avec $\text{diag}(T) = 0$. Notons $E_d : \ell^2 \rightarrow \ell^2_d$ le projecteur (diagonal), et $T_d = E_d T E_d$. Par le deuxième pas, on trouve des projecteurs diagonaux $Q_1^{(d)}, \dots, Q_r^{(d)}$ avec $\sum_{i=1}^r Q_i^{(d)} = E_d$ et $\|Q_i^{(d)} T_d Q_i^{(d)}\| \leq \varepsilon \|T\|$ pour $i = 1, \dots, r$. On identifie l'ensemble des projecteurs diagonaux à l'espace compact $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Un argument diagonal, appliqué aux r suites $(Q_i^{(d)})_{d \geq 1}$ de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, fournit une suite strictement croissante d'entiers $(d_k)_{k > 0}$ et des projecteurs diagonaux Q_1, \dots, Q_r avec $\lim_{k \rightarrow \infty} Q_i^{(d_k)} = Q_i$ pour $i = 1, \dots, r$. On a d'une part $\sum_{i=1}^r Q_i = \lim_{k \rightarrow \infty} (\sum_{i=1}^r Q_i^{(d_k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} 1_{d_k} = 1$; d'autre part, pour $\xi, \eta \in \ell^2$ à support fini, on a $\xi, \eta \in \ell^2_{d_k}$ pour $k \gg 0$, donc :

$$\begin{aligned} |\langle Q_i T Q_i \xi | \eta \rangle| &= |\langle T Q_i \xi | Q_i \eta \rangle| = |\langle T_{d_k} Q_i^{(d_k)} \xi | Q_i^{(d_k)} \eta \rangle| \quad (\text{pour } k \gg 0) \\ &= |\langle Q_i^{(d_k)} T_{d_k} Q_i^{(d_k)} \xi | \eta \rangle| \leq \|Q_i^{(d_k)} T_{d_k} Q_i^{(d_k)}\| \|\xi\|_2 \|\eta\|_2 \leq \varepsilon \|T\| \|\xi\|_2 \|\eta\|_2, \end{aligned}$$

d'où $\|Q_i T Q_i\| \leq \varepsilon \|T\|$. □

Preuve du théorème 1.6 : Soit φ un état pur sur D , et ψ un état sur $\mathcal{B}(\ell^2)$ avec $\psi|_D = \varphi$. On doit montrer que $\psi(T) = \varphi(\text{diag}(T))$ pour tout $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$. Quitte à remplacer T par $T - \text{diag}(T)$ et à normer, on peut supposer que $\text{diag}(T) = 0$ et $\|T\| \leq 1$, et on doit montrer que $\psi(T) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. On va montrer que $|\psi(T)| \leq \varepsilon$. Par le théorème 5.3, on trouve des projecteurs diagonaux Q_1, \dots, Q_r avec $\sum_{i=1}^r Q_i = 1$ et $\|Q_i T Q_i\| \leq \varepsilon$. Comme φ est multiplicatif sur D , on a $\psi(Q_i) = \varphi(Q_i) \in \{0, 1\}$, et donc il existe un unique indice $i_0 \in \{1, \dots, r\}$ tel que $\psi(Q_{i_0}) = 1$. On a alors :

$$\psi(T) = \psi\left(\sum_i Q_i T \sum_j Q_j\right) = \sum_{i,j} \psi(Q_i T Q_j).$$

Montrons que, dans cette somme double, tous les termes sont nuls sauf celui correspondant à $i = j = i_0$. En effet, comme le produit scalaire $(A, B) \mapsto \psi(AB^*)$ est semi-défini positif sur $\mathcal{B}(\ell^2)$, on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\psi(Q_i T Q_j)|^2 \leq \psi((Q_i T)(Q_i T)^*) \psi(Q_j Q_j^*)$ et donc $\psi(Q_i T Q_j) = 0$ si $j \neq i_0$. Symétriquement, on a $\psi(Q_i T Q_j) = 0$ si $i \neq i_0$. On a donc finalement : $|\psi(T)| = |\psi(Q_{i_0} T Q_{i_0})| \leq \|Q_{i_0} T Q_{i_0}\| \leq \varepsilon$, ce qui termine la preuve. □

6. CONJECTURES DE BOURGAIN-TZAFRIRI ET DE FEICHTINGER

Cette section doit beaucoup aux notes de cours de P. Casazza [Cas].

DÉFINITION 6.1. — Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans un espace de Hilbert \mathcal{H} .

- La suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite de Riesz** s'il existe des constantes $A, B > 0$ telles que, pour tout $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$:

$$A\|\mathbf{a}\|_2^2 \leq \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \varphi_n \right\|^2 \leq B\|\mathbf{a}\|_2^2.$$

Si $A = 1 - \varepsilon$ et $B = 1 + \varepsilon$, on parle de ε -suite de Riesz.

- La suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **frame**, ou **structure oblique**, s'il existe des constantes $A, B > 0$ telles que, pour tout $\xi \in \mathcal{H}$:

$$A\|\xi\|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle \xi | \varphi_n \rangle|^2 \leq B\|\xi\|^2.$$

La proposition suivante confirme une conjecture de Casazza et Vershynin (appelée conjecture R_ε dans [Cas]) :

PROPOSITION 6.2. — Soit $\varepsilon > 0$. Toute suite de Riesz de ℓ^2 formée de vecteurs de norme 1, est la réunion disjointe d'un nombre fini de ε -suites de Riesz.

Preuve : Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Riesz de ℓ^2 , de constantes A, B , avec $\|\varphi_n\|_2 = 1$ pour tout n . Soit $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ l'opérateur borné défini par $t(\mathbf{e}_n) = \varphi_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Posons $S = T^*T$; vu les hypothèses, on a $\text{diag}(S) = (1, 1, 1, \dots)$. On peut donc appliquer le théorème 5.3 (conjecture de pavage) à l'opérateur $S - 1$: il existe une partition finie $\{A_1, \dots, A_r\}$ de \mathbb{N} , telle que $\|Q_{A_j}(S - 1)Q_{A_j}\| \leq \delta\|S - 1\|$ pour $j = 1, \dots, r$, où $\delta = \frac{\varepsilon}{1 + \|S\|}$ et Q_{A_j} est le projecteur diagonal associé à A_j . Notons que $r = r(\varepsilon, \|T\|)$.

Montrons que la suite $(\varphi_n)_{n \in A_j}$ est une ε -suite de Riesz. En effet, pour $\mathbf{a} \in \ell^2$:

$$\left\| \sum_{n \in A_j} a_n \varphi_n \right\|_2^2 = \left\| T \left(\sum_{n \in A_j} a_n \mathbf{e}_n \right) \right\|_2^2 = \|TQ_{A_j}\mathbf{a}\|_2^2 = \langle Q_{A_j}SQ_{A_j}\mathbf{a} | \mathbf{a} \rangle.$$

Mais

$$\begin{aligned} \langle Q_{A_j}SQ_{A_j}\mathbf{a} | \mathbf{a} \rangle &= \langle Q_{A_j}\mathbf{a} | Q_{A_j}\mathbf{a} \rangle - \langle (Q_{A_j}(1 - S)Q_{A_j})Q_{A_j}\mathbf{a} | Q_{A_j}\mathbf{a} \rangle \\ &\geq (1 - \delta\|1 - S\|)\|Q_{A_j}\mathbf{a}\|_2^2 \geq (1 - \varepsilon)\|Q_{A_j}\mathbf{a}\|_2^2. \end{aligned}$$

On montre de manière analogue que $\left\| \sum_{n \in A_j} a_n \varphi_n \right\|_2^2 \leq (1 + \varepsilon)\|Q_{A_j}\mathbf{a}\|_2^2$. \square

En 2004, H. Feichtinger émet la conjecture suivante, popularisée par P. Casazza et ses collaborateurs (voir par exemple [CCLV]) :

THÉORÈME 6.3. — Toute frame dans ℓ^2 , consistant en vecteurs de norme 1, est réunion disjointe d'une famille finie de suites de Riesz.

Preuve : Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une frame dans ℓ^2 , de constantes A, B , avec $\|\varphi_n\|_2 = 1$ pour tout n . On considère l'opérateur borné $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2 : \xi \mapsto (\langle \xi | \varphi_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$. Son adjoint satisfait $T^*(\mathbf{e}_n) = \varphi_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Posons $S = TT^*$: comme les φ_n sont de norme 1, on a $\text{diag}(S) = (1, 1, 1, \dots)$; exactement comme dans la preuve de la proposition 6.2, on peut appliquer à $S - 1$ la conjecture de pavage (Théorème 5.3) avec $\varepsilon = \frac{1}{2(1+B)}$: on

trouve une partition $\{A_1, \dots, A_r\}$ de \mathbb{N} avec $\|Q_{A_j}(S-1)Q_{A_j}\| \leq \varepsilon\|S-1\|$ et on montre comme dans la preuve de la proposition 6.2 que, pour $j = 1, \dots, r$:

$$\frac{1}{2} \sum_{i \in A_j} |a_i|^2 \leq \left\| \sum_{i \in A_j} a_i \varphi_i \right\|^2 \leq \frac{3}{2} \sum_{i \in A_j} |a_i|^2,$$

pour tout $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^2$. □

Dans les articles [BT1, BT2], J. Bourgain et L. Tzafriri étudient – en liaison d’abord avec des questions de géométrie des espaces de Banach, ensuite avec le problème de Kadison-Singer – un problème d’*invertibilité restreinte* de matrice : si $T \in M_n(\mathbb{C})$, et $A \subset \{1, \dots, n\}$ est tel que T est injectif en restriction au sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^n engendré par les \mathbf{e}_i ($i \in A$), de quelle taille peut-on choisir A ? Ils démontrent :

THÉORÈME 6.4 ([BT1], Theorem 1.2). — *Il existe une constante $c > 0$ telle que, pour toute matrice $T \in M_n(\mathbb{C})$ ayant des colonnes de norme 1, il existe une partie $A \subset \{1, \dots, n\}$ de cardinal au moins $c \cdot \frac{n}{\|T\|^2}$, telle que $\left\| \sum_{i \in A} a_i T(\mathbf{e}_i) \right\|_2^2 \geq c^2 \sum_{i \in A} |a_i|^2$ pour tout choix de nombres complexes $(a_i)_{i \in A}$.* □

Les cas extrêmes $T = 1_n$ (de norme 1) et $T(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_1$ (de norme \sqrt{n}), montrent que cet énoncé est essentiellement optimal quant à la taille de la partie A . Voir [Nao, Sr2] pour des énoncés récents d’invertibilité restreinte.

Le théorème 6.4 a motivé l’énoncé suivant ; ce dernier semble avoir longtemps appartenu à la tradition orale, avant d’avoir été consigné par Casazza⁽⁸⁾ sous le nom de *conjecture de Bourgain-Tzafriri* ; voir par exemple [CT].

THÉORÈME 6.5. — *Pour tout $B > 1$, il existe un entier $r = r(B)$ qui vérifie : Pour tout n et toute matrice $T \in M_n(\mathbb{C})$ avec des colonnes de norme 1 et $\|T\| \leq B$, il existe une partition $\{A_1, \dots, A_r\}$ de $\{1, 2, \dots, n\}$ telle que, pour tout $j = 1, 2, \dots, r$ et tout choix de nombres complexes $(a_i)_{i \in A_j}$, on a :*

$$\left\| \sum_{i \in A_j} a_i T(\mathbf{e}_i) \right\|_2^2 \geq \frac{7}{16} \sum_{i \in A_j} |a_i|^2.$$

Preuve : En remplaçant T par $T \oplus 1$, on peut supposer que T est un opérateur sur ℓ^2 , à colonnes de norme 1. Posons $\varphi_n = (\frac{3}{5}T(\mathbf{e}_n), \frac{4}{5}\mathbf{e}_n) \in \ell^2 \oplus \ell^2$. Les φ_n forment une suite de Riesz de vecteurs de norme 1. On peut donc lui appliquer la proposition 6.2 avec $\varepsilon = (\frac{3}{5})^2$: il existe une partition $\{A_1, \dots, A_r\}$ de \mathbb{N} (où r est fonction de $\|T\|$) telle que, pour $j = 1, \dots, r$:

$$\frac{16}{25} \sum_{i \in A_j} |a_i|^2 \leq \left\| \sum_{i \in A_j} a_i \varphi_i \right\|_2^2 = \frac{16}{25} \left\| \sum_{i \in A_j} a_i T(\mathbf{e}_i) \right\|_2^2 + \frac{9}{25} \sum_{i \in A_j} |a_i|^2.$$

8. P. Casazza, communication personnelle, 26 décembre 2013.

En réarrangeant :

$$\frac{7}{16} \sum_{i \in A_j} |a_i|^2 \leq \left\| \sum_{i \in A_j} a_i T(\mathbf{e}_i) \right\|_2^2.$$

□

7. GRAPHES DE RAMANUJAN DE DEGRÉ ARBITRAIRE

7.1. Théorie algébrique des graphes

Soit $X = (V, E)$ un graphe fini connexe. Notons \sim la *relation d'adjacence* sur l'ensemble V des sommets :

$$x \sim y \iff \{x, y\} \in E.$$

Un graphe X est *d-régulier* si tout sommet est adjacent à d autres sommets. La *matrice d'adjacence* de X est :

$$(A_X)_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \sim y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le résultat suivant est classique (voir par exemple [God], théorème 4.2 du chapitre 2).

PROPOSITION 7.1. — *Soit X un graphe fini connexe, d -régulier.*

- 1) *Pour toute valeur propre λ de A_X , on a $|\lambda| \leq d$.*
- 2) *d est valeur propre de A_X , de multiplicité 1.*
- 3) *$-d$ est valeur propre de A_X si et seulement si X est bi-colorable. Dans ce cas, le spectre de A_X est symétrique par rapport à 0.*

DÉFINITION 7.2. — *Un graphe fini connexe d -régulier X est un graphe de Ramanujan si, pour toute valeur propre λ de A_X , on a $|\lambda| = d$ ou $|\lambda| \leq 2\sqrt{d-1}$.*

Nous renvoyons à [Lub, DSV, Val] pour la justification de la quantité $2\sqrt{d-1}$. Les familles infinies de graphes de Ramanujan d -réguliers fournissent (pour $d \geq 3$) des familles d'expansions optimales du point de vue spectral. Les seules constructions connues de telles familles sont pour d de la forme $1+q$, où q est une puissance de premier, et reposent sur de la théorie des nombres difficile – qui explique la terminologie «Ramanujan». La question est posée dans [Lub, Problem 10.7.3] (voir aussi [Val], bas de la page 250) de l'existence, pour tout $d \geq 3$, de familles infinies de graphes de Ramanujan d -réguliers. Dans [MSS1, Theorem 5.5], Marcus, Spielman et Srivastava démontrent :

THÉORÈME 7.3. — *Pour tout $d \geq 3$, il existe des familles infinies de graphes de Ramanujan d -réguliers bi-colorables.*

Nous verrons que la preuve est non constructive. La restriction au cas bi-colorable s'explique par le fait que les techniques de Marcus-Spielman-Srivastava leur permettent de contrôler la plus grande valeur propre d'une matrice, mais pas la plus petite (voir le théorème 1.8) : l'hypothèse «bi-colorable» permet de contrôler toutes les valeurs propres simultanément. Pour d quelconque, la question de l'existence de familles infinies de graphes de Ramanujan d -réguliers non bi-colorables est toujours ouverte.

7.2. 2-relèvements

DÉFINITION 7.4. — Soit $X = (V, E)$ un graphe fini connexe. Un *signage* de X est une fonction symétrique $s : V \times V \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ telle que $s(x, y) \neq 0$ si et seulement si $x \sim y$.

Soit s un signage d'un graphe à n sommets. La *matrice d'adjacence signée* $A_X^{(s)}$ est la matrice n -fois- n définie par :

$$(A_X^{(s)})_{xy} = s(x, y).$$

Le *2-relèvement* de X associé à s est un graphe $\tilde{X}^{(s)}$ à $2n$ sommets, dont l'ensemble des sommets est la réunion $V_1 \amalg V_2$ de 2 copies de V , et dont les arêtes sont données par :

$$\begin{cases} x_1 \sim y_1 \text{ et } x_2 \sim y_2 & \text{si } x \sim y \text{ et } s(x, y) = 1 \\ x_1 \sim y_2 \text{ et } x_2 \sim y_1 & \text{si } x \sim y \text{ et } s(x, y) = -1 \end{cases}$$

(où, pour $i = 1, 2$, le sommet x_i de V_i correspond au sommet x de V). On observe que :

- si $\tilde{X}^{(s)}$ est connexe, c'est un revêtement double de X ;
- si X est d -régulier, $\tilde{X}^{(s)}$ l'est également ;
- si X est bi-colorable, $\tilde{X}^{(s)}$ l'est également.

On montre alors (voir [BL, Lemme 3.1]) que le spectre de la matrice d'adjacence $A_{\tilde{X}^{(s)}}$ est la réunion du spectre de A_X et du spectre de $A_X^{(s)}$. Bilu et Linial proposent dans [BL] la conjecture suivante :

CONJECTURE 7.5. — *Tout graphe d -régulier X possède un signage s tel que les valeurs propres de $A_X^{(s)}$ sont inférieures ou égales à $2\sqrt{d-1}$ en valeur absolue.*

Une conséquence de cette conjecture est qu'un graphe de Ramanujan d -régulier possède un 2-relèvement qui est encore de Ramanujan, pour lequel on peut itérer la construction. Donc, cette conjecture, si elle est vraie, implique l'existence de familles infinies de graphes de Ramanujan d -réguliers, puisqu'on peut démarrer avec le graphe complet K_{d+1} sur $d+1$ sommets. Marcus, Spielman et Srivastava démontrent la conjecture de Bilu-Linial dans le cas bi-colorable [MSS1, Theorem 5.3] :

THÉORÈME 7.6. — *Tout graphe d -régulier bi-colorable possède un signage qui satisfait la conjecture 7.5.*

Puisqu'on peut démarrer avec le graphe biparti complet $K_{d,d}$ sur $2d$ sommets, qui est de Ramanujan, par itération de la construction des 2-relèvements on obtient une famille infinie de graphes de Ramanujan d -réguliers bi-colorables, ce qui démontre le théorème 7.3.

7.3. Preuve du théorème 7.6

Soit X un graphe d -régulier bi-colorable à n sommets et m arêtes. Pour un signage s de X et une arête $e = \{u, v\} \in E$, on définit un opérateur $A_e^{(s)}$ semi-défini positif de rang 1 sur $\ell^2(V)$:

$$A_e^{(s)}(f) = \begin{cases} \langle f | \delta_u - \delta_v \rangle (\delta_u - \delta_v) & \text{si } s(u, v) = -1 \\ \langle f | \delta_u + \delta_v \rangle (\delta_u + \delta_v) & \text{si } s(u, v) = 1 \end{cases}$$

($f \in \ell^2(V)$). Matriciellement, si $s(u, v) = -1$:

$$(A_e^{(s)})_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y = u & \text{ou } x = y = v \\ -1 & \text{si } x = u \text{ et } y = v & \text{ou } x = v \text{ et } y = u \\ 0 & \text{si } x \notin \{u, v\} & \text{ou } y \notin \{u, v\}, \end{cases}$$

tandis que si $s(u, v) = 1$:

$$(A_e^{(s)})_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{u, v\} \text{ et } y \in \{u, v\} \\ 0 & \text{si } x \notin \{u, v\} \text{ ou } y \notin \{u, v\}. \end{cases}$$

Donc

$$d \cdot 1_n + A_X^{(s)} = \sum_{e \in E} A_e^{(s)}.$$

On munit l'ensemble des 2^m signages de X de la mesure de probabilité uniforme. Pour $e \in E$, on définit la variable aléatoire $A_e : s \mapsto A_e^{(s)}$ à valeurs dans les opérateurs semi-définis positifs de rang 1. Les variables aléatoires $(A_e)_{e \in E}$ sont indépendantes. Par le théorème 1.8, on a pour au moins une réalisation des A_e , c-à-d. pour au moins un signage s :

$$(3) \quad ZM(p_{d \cdot 1_n + A_X^{(s)}}) \leq ZM(\mathbb{E} p_{\sum_{e \in E} A_e}).$$

Notons $\lambda_{max}^{(s)}$ la plus grande valeur propre de $A_X^{(s)}$. Le membre de gauche de (3) est $d + \lambda_{max}^{(s)}$. Pour le membre de droite, remarquons que

$$(\mathbb{E} p_{\sum_{e \in E} A_e})(z) = \left(\sum_s \frac{1}{2^m} p_{d \cdot 1_n + A_X^{(s)}} \right)(z) = \left(\sum_s \frac{1}{2^m} p_{A_X^{(s)}} \right)(z - d) = (\mathbb{E}_s p_{A_X^{(s)}})(z - d).$$

Pour continuer, nous aurons besoin de la notion de mariage : un *mariage* dans un graphe X est un ensemble d'arêtes 2 à 2 disjointes. Notons p_r le nombre de mariages à r arêtes dans X (on convient que $p_0 = 1$), et définissons le *polynôme de mariage* de X :

$$\mu_X(z) = \sum_{r \geq 0} (-1)^r p_r z^{n-2r}.$$

On a alors un résultat de Godsil et Gutman [GG] (voir aussi l'appendice A de [MSS1] pour une preuve courte) :

PROPOSITION 7.7. — $\mathbb{E}_s p_{A_X^{(s)}} = \mu_X$.

Comme $\mathbb{E} p_{\sum_{e \in E} A_e}$ est un polynôme caractéristique mixte (voir la proposition 4.4 ci-dessus), on en tire que μ_X a toutes ses racines réelles (ce qui était connu, voir [God], corollaire 1.2 du chapitre 6). Mieux (même référence) :

PROPOSITION 7.8. — *Si X est d -régulier, toute racine de μ_X est réelle et bornée par $2\sqrt{d-1}$ en valeur absolue.*

Les propositions 7.7 et 7.8 montrent que le membre de droite de (3) satisfait $ZM(\mathbb{E} p_{\sum_{e \in E} A_e}) = d + ZM(\mu_X) \leq d + 2\sqrt{d-1}$. L'inéquation (3) se réécrit donc :

$$\lambda_{max}^{(s)} \leq 2\sqrt{d-1},$$

et comme le 2-relèvement $\tilde{X}^{(s)}$ est bi-colorable, toutes les valeurs propres de $A_X^{(s)}$ sont majorées par $2\sqrt{d-1}$ en valeur absolue. \square

Dans [Sr1] on trouvera une application des théorèmes 1.7 et 1.8 à un problème de « *spectral sparsification* » (élagage spectral ?) en théorie des graphes. Ce résultat améliore les résultats antérieurs de Batson-Spielman-Srivastava [BSS] (voir aussi [Nao]).

Remerciements : Merci à J. Anderson, J. Bourgain, P. Casazza, N. Srivastava et N. Weaver pour d'intéressants échanges. Je remercie spécialement Adam Marcus pour son mini-cours sur les entrelacements de polynômes, et Sorin Popa et Stefaan Vaes pour leur relecture attentive d'une première version de ce texte. Bravo à Terry Tao pour son blog.

RÉFÉRENCES

- [AA] C.A. AKEMANN, J. ANDERSON – *Lyapunov theorems for operator algebras*, Memoir 458, Amer. Math. Soc. 1991.
- [An1] J. ANDERSON – *Extreme points in sets of positive linear maps on $\mathcal{B}(\mathcal{H})$* , J. Functional Analysis 31(2) (1979), 195-217.
- [An2] J. ANDERSON – *Extensions, restrictions and representations of states on C^* -algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 249(2) (1979), 303-329.
- [BSS] J. BATSON, D. SPIELMAN, N. SRIVASTAVA – *Twice-Ramanujan sparsifiers*, STOC 2009, SICOMP special issue (2012), 255-262
- [BL] Y. BILU, N. LINIAL – *Lifts, discrepancy and nearly optimal spectral gap*, Combinatorica 26 (2006), 495–519.
- [BT1] J. BOURGAIN, L. TZAFRIRI – *Invertibility of «large» submatrices with applications to the geometry of Banach spaces and harmonic analysis*, Israel J. Math. 57 (1987), 137-224.

- [BT2] J. BOURGAIN, L. TZAFRIRI – *On a problem of Kadison and Singer*, J. reine angew. Math. 420 (1991), 1-43.
- [Cas] P.G. CASAZZA – *The Kadison-Singer problem in mathematics and engineering*, Masterclass on ergodic theory and von Neumann algebras, Copenhagen, October 14-18, 2013; http://www.math.ku.dk/english/research/conferences/2013/masterclass_ergodic/
- [CCLV] P.G. CASAZZA, O. CHRISTENSEN, A.M. LINDNER, R. VERSHYNIN – *Frames and the Feichtinger conjecture*, Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), 1025-1033.
- [CFTW] P.G. CASAZZA, M. FICKUS, J.C. TREMAIN, E. WEBER – *The Kadison-Singer problem in mathematics and engineering : a detailed account*, Operator theory, operator algebras, and applications, 299-355, Contemp. Math., 414, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [CT] P.G. CASAZZA, J.C. TREMAIN – *Revisiting the Bourgain-Tzafriri restricted invertibility theorem*, Oper. Matrices 3 (2009), 97-110.
- [DSV] G. DAVIDOFF, P. SARNAK, A. VALETTE – *Elementary Number theory, group theory and Ramanujan graphs*, Cambridge Univ. Press, 2003.
- [Dir] P.A.M. DIRAC – *The principles of quantum mechanics*, Oxford Univ. Press, 1958.
- [Dix] J. DIXMIER – *Les C^* -algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, 1969.
- [Fel] H.J. FELL – *On the zeros of convex combinations of polynomials*, Pacific J. Math. 89 (1980), 43-50.
- [God] C.D. GODSIL – *Algebraic combinatorics*, Chapman & Hall, 1993.
- [GG] C.D. GODSIL, I. GUTMAN – *On the matching polynomial of a graph*, in : Algebraic methods in graph theory, Vol. I, II (Szeged, 1978), Colloq. Math. Soc. János Bolyai 25, 241–249, North-Holland, 1981.
- [Jor] P.E.T. JORGENSEN – *Kadison-Singer from mathematical physics : an introduction* Notes non publiées, 2006; <http://homepage.math.uiowa.edu/~jorgen/kadsinin.pdf>
- [KS] R.V. KADISON, I.M. SINGER – *Extensions of pure states*, Amer. J. Math. 81 (1959), 383-400.
- [Lub] A. LUBOTZKY – *Discrete groups, expanding graphs and invariant measures*, Birkhäuser, 1994.
- [Mal] S. MALLAT – *Une exploration des signaux en ondelettes*, Éd. de l'École Polytechnique, 2000. ISBN : 2-7302-0733-3.
- [MSS1] A. MARCUS, D.A. SPIELMAN, N. SRIVASTAVA – *Interlacing families I : Bipartite Ramanujan graphs of all degrees*, ArXiv : 1304.4132.

- [MSS2] A. MARCUS, D.A. SPIELMAN, N. SRIVASTAVA – *Interlacing families II : Mixed characteristic polynomials and the Kadison-Singer problem*, ArXiv : 1306.3969.
- [Nao] A. NAOR – *Sparse quadratic forms and their geometric applications (following Batson, Spielman, and Srivastava)*, Séminaire Bourbaki 2010-2011, exposé n° 1033, Astérisque 348 (2012), 189-217.
- [Pop] S. POPA – *A II_1 factor approach to the Kadison-Singer problem*, ArXiv :1303.1424, à paraître dans Comm. Math. Phys.
- [Rob] B.W. ROBERTS – *Philosophy and physics in the Kadison-Singer conjecture*, <http://www.soulphysics.org/2013/06/philosophy-and-physics-in-the-kadison-singer-conjecture/>
- [Sr1] N. SRIVASTAVA – *Discrepancy, graphs, and the Kadison-Singer problem*, <http://windowsontheory.org/2013/07/11/discrepancy-graphs-and-the-kadison-singer-conjecture-2/>
- [Sr2] N. SRIVASTAVA – *Restricted invertibility by interlacing polynomials*, <http://windowsontheory.org/2014/04/15/restricted-invertibility-by-interlacing-polynomials/>
- [Tao] T. TAO – *Real stable polynomials and the Kadison-Singer problem*, <http://terrytao.wordpress.com/2013/11/04/real-stable-polynomials-and-the-kadison-singer-problem/>
- [Val] A. VALETTE – *Graphes de Ramanujan et applications*, Séminaire Bourbaki 1996/97, exposé n° 829, Astérisque 245 (1997), 247-276.
- [Wag] D.G. WAGNER – *Multivariate stable polynomials : theory and applications*, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (2011), 53-84.
- [Wea] N. WEAVER – *The Kadison-Singer problem in discrepancy theory*, Discrete Math. 278 (2004), 227-239.

Alain VALETTE

Université de Neuchâtel

Faculté des Sciences

Institut de Mathématiques

Rue Émile-Argand 11

CH-2000 Neuchâtel, Suisse

E-mail : alain.valette@unine.ch