

**THÉORIE DE LA PETITE SIMPLIFICATION :
UNE APPROCHE GÉOMÉTRIQUE**

[d'après F. Dahmani, V. Guirardel, D. Osin et S. Cantat, S. Lamy]

par Rémi COULON

INTRODUCTION

Le but de la *théorie géométrique des groupes* est d'étudier des groupes en tant qu'objets métriques ou plus généralement via une action par isométries sur un espace métrique approprié. La notion de courbure négative y joue un rôle déterminant. Elle apparaît déjà dans les travaux de M. DEHN sur les groupes de surfaces. Étant donné un groupe de présentation finie, M. DEHN demande dans quelle mesure on peut trouver un algorithme capable de décider si un mot en les générateurs représente l'identité. Dans le cas du groupe fondamental G d'une surface Σ , il regarde le graphe de CAYLEY de G dessiné dans le plan hyperbolique, vu comme le revêtement universel de Σ , puis utilise la courbure négative pour résoudre le problème. V.A. TARTAKOVSKIÏ en a extrait une condition combinatoire sur la présentation d'un groupe qui permet de généraliser les idées de M. DEHN. C'est la première formulation explicite de la *théorie de la petite simplification* [48]. Cette théorie, particulièrement fructueuse, a été par la suite largement étudiée notamment par M. GREENLINGER [23, 24], R. LYNDON et P. SCHUPP [36]. Statistiquement parlant, les groupes à petite simplification sont abondants [42]. C'est une source importante de groupes hyperboliques [25]. Par ailleurs la petite simplification permet de construire et étudier des groupes aux pathologies diverses : construction de RIPS [45], monstre de TARSKI [42], groupes de BURNSIDE [40, 41, 15], etc.

Cependant les origines géométriques de la petite simplification ont petit à petit été oubliées au profit de méthodes combinatoires et topologiques. Selon les mots de M. GROMOV [27] « *the role of curvature was reduced to a metaphor. (Algebraists do not trust geometry.)* ». Dans une série d'articles, M. GROMOV propose un retour aux sources [27, 26, 28]. Il y développe un point de vue géométrique qui va bien au-delà du cadre usuel de la petite simplification.

La géométrie δ -hyperbolique introduite par M. GROMOV à la fin des années 80 est une autre forme extrêmement importante de courbure négative [25]. Elle met en lumière les similarités entre les groupes de surfaces, les groupes kleinien, les groupes opérant sur un arbre (théorie de BASS-SERRE), les groupes à petite simplification, etc. L'idée est que si un groupe G agit sur un espace δ -hyperbolique X de façon « raisonnable » alors son comportement à large échelle présente des similarités avec les groupes libres ou les groupes fondamentaux de variétés hyperboliques. En particulier étant donnée une

partie finie R d'un groupe hyperbolique G , on peut étendre la théorie de la petite simplification pour étudier le quotient de G par le sous-groupe distingué engendré par R [10, 14].

En généralisant ce point de vue, S. CANTAT et S. LAMY ont montré que le groupe de CREMONA n'est pas simple [9]. F. DAHMANI, V. GUIARDEL et D. OSIN ont revisité la petite simplification grâce aux familles de rotations [13]. Ils obtiennent ainsi un cadre commun pour étudier des groupes a priori très différents : groupes modulaires de surfaces, groupes des automorphismes extérieurs du groupe libre, groupes d'ARTIN à angles droits, etc. Le but de cet exposé est de présenter ces résultats.

REMARQUE. — Les travaux de F. DAHMANI, V. GUIARDEL et D. OSIN portent sur deux notions : les *groupes hyperboliquement plongés* et les *familles de rotations*. À première vue ces deux outils semblent différents, cependant la plupart de leurs résultats peuvent se démontrer avec l'un ou l'autre [13]. Les groupes hyperboliquement plongés généralisent la structure périphérique des groupes relativement hyperboliques. Dans cet exposé, nous abordons uniquement les familles de rotations qui sont de nature plus « dynamique ». Une partie de l'article original de S. CANTAT et S. LAMY [9] généralise des techniques empruntées aux travaux de T. DELZANT sur la petite simplification dans les groupes hyperboliques [14]. Nous adoptons ici le point de vue unificateur des familles de rotations.

1. THÉORIE DE LA PETITE SIMPLIFICATION

Rappelons en premier lieu le cadre usuel de la théorie de la petite simplification. Pour plus de détails on pourra lire [37, chapter V]. Soient S un ensemble fini et R une collection finie de mots cycliquement réduits sur l'alphabet $S \cup S^{-1}$. La longueur d'un mot m est notée $|m|$. On note R^* l'ensemble des conjugués cycliques des éléments de R et leurs inverses. Une pièce est un préfixe commun à deux éléments distincts de R^* . La présentation $\bar{G} = \langle S | R \rangle$ satisfait la condition $C'(\lambda)$ si pour toute pièce u , préfixe d'une relation $r \in R^*$, on a $|u| < \lambda|r|$. La théorie de la petite simplification s'intéresse au cas où λ est petit, en particulier inférieur à $1/6$. Le groupe fondamental Γ_g d'une surface de genre g (avec $g \geq 2$) relève par exemple de cette catégorie. En effet une présentation de ce groupe est

$$\Gamma_g = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g | [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] \rangle.$$

Ses pièces ne contiennent qu'une seule lettre tandis que la relation est de longueur $2g$. Elle satisfait donc la condition $C'(\lambda)$ pour tout $\lambda > 1/4g$.

Les diagrammes de Van Kampen sont un des outils pour étudier cette classe de groupes. Un tel diagramme D est un complexe cellulaire planaire obtenu en attachant des disques dont le bord est étiqueté par des éléments de R . Le bord de D représente

alors un mot dont l'image dans \bar{G} est trivial. Les composantes connexes de l'intersection de deux disques adjacents sont étiquetées par des pièces. La condition $C'(\lambda)$ s'interprète alors comme une forme de courbure négative. Des arguments topologiques type caractéristique d'EULER permettent d'investiguer les propriétés de \bar{G} . Ainsi, si $\lambda \leq 1/6$, ces diagrammes satisfont une inégalité isopérimétrique linéaire, ce qui entraîne que \bar{G} est un groupe hyperbolique.

On peut penser à la condition $C'(\lambda)$ de façon plus géométrique. Étant donné un groupe G engendré par une partie finie S , son graphe de CAYLEY est un graphe dont les sommets sont les éléments de G . Deux sommets g et g' sont reliés par une arête s'il existe $s \in S \cup S^{-1}$ tel que $g' = gs$. Cette arête est étiquetée par s . Puisque $\mathbf{F}(S)$ est un groupe libre, son graphe de CAYLEY X est un arbre. Étant donnée une relation $r \in R^*$, il existe une géodésique bi-infinie de X , notée $\text{Axe}(r)$, sur laquelle r agit par translation de longueur $|r|$. C'est exactement le chemin passant par l'identité et étiqueté par le mot bi-infini $\dots rrrrr \dots$. Dans cette description, une pièce correspond à un mot étiquetant l'intersection des axes respectifs de deux éléments distincts de R^* . Ainsi $\bar{G} = \langle S|R \rangle$ satisfait la condition $C'(\lambda)$ si et seulement si pour toute paire (r, r') d'éléments distincts de R^* on a

$$\text{diam}(\text{Axe}(r) \cap \text{Axe}(r')) < \lambda \min\{|r|, |r'|\}.$$

Ce point de vue permet de généraliser la théorie de la petite simplification à une classe de groupes extrêmement large [26]. Au lieu du groupe libre $\mathbf{F}(S)$ agissant sur un arbre, on regarde un groupe G agissant sur un espace hyperbolique X . À la place d'une relation r et de son axe, on considère un sous-groupe H de G et une partie quasi-convexe Y de X invariante sous l'action de H .

1.1. Version géométrique de la petite simplification

Commençons par quelques notions de géométrie hyperbolique (au sens de GROMOV) [25, 11, 22]. Soit X un espace métrique géodésique. On notera $|x - x'|$ la distance entre deux points de X et $[x, x']$ une géodésique qui les relie (même si celle-ci n'est pas nécessairement unique). On suppose que X est δ -hyperbolique, c'est-à-dire que pour tous $x, y, z, t \in X$ on a

$$(1) \quad |x - y| + |z - t| \leq \max\{|x - z| + |y - t|, |x - t| + |y - z|\} + 2\delta.$$

Géométriquement, cette hypothèse implique que les triangles de X sont 4δ -fins : pour tous $x, y, z \in X$, la géodésique $[x, z]$ reste à distance au plus 4δ de $[x, y] \cup [y, z]$. On gardera en mémoire les deux exemples classiques suivants.

- Un *arbre réel* est un espace géodésique dans lequel toute paire de points est reliée par un unique segment topologique. De manière équivalente, c'est un espace géodésique et 0-hyperbolique.

– Le demi-plan de POINCARÉ $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 0\}$ muni de la métrique

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$

est un modèle du *plan hyperbolique* \mathbf{H}^2 . Il est δ -hyperbolique avec $\delta = \ln 3$.

Remarque 1.1. — À l’instar de l’inégalité (1), les propriétés de l’espace X s’expriment très souvent via des relations métriques modulo une erreur contrôlée en fonction de δ . On n’a pas cherché dans cet exposé à optimiser le nombre de δ de chaque énoncé. Il faut voir ces constantes comme des ordres de grandeurs.

Une partie Y de X est dite α -quasi-convexe si toute géodésique entre deux points de Y reste à distance au plus α de Y . L’ensemble des points à distance au plus d de Y sera noté Y^{+d} .

Soit G un groupe agissant par isométries sur X . Pour mesurer l’action d’un élément $g \in G$ sur X on utilise la longueur de translation définie comme suit :

$$[g] = \inf_{x \in X} |gx - x|.$$

Les éléments de G se répartissent en trois catégories : *elliptique* (g a une orbite bornée), *hyperbolique* (il existe $c > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $[g^n] \geq cn$), *parabolique* (g n’est ni elliptique, ni hyperbolique). Si g n’est pas hyperbolique alors $[g] \leq 20\delta$.

Soit \mathcal{R} une famille finie de paires (H, Y) où Y est une partie 10δ -quasi-convexe de X et H un sous-groupe de $\text{Stab}(Y)$ – le stabilisateur de Y dans G . Notons K le sous-groupe distingué de G engendré par la famille $\{H \mid (H, Y) \in \mathcal{R}\}$. L’objectif est d’étudier la structure de K et les propriétés du quotient $\bar{G} = G/K$. Pour ce faire, on introduit deux paramètres. Soit \mathcal{R}^* l’ensemble $\mathcal{R}^* = \{(gHg^{-1}, gY) \mid (H, Y) \in \mathcal{R}, g \in G\}$. Les quantités $\Delta(\mathcal{R}, X)$ et $\text{inj}(\mathcal{R}, X)$ définies ci-dessous jouent respectivement le rôle de la longueur de la plus grande pièce et de la longueur de la plus petite relation.

$$\begin{aligned} \Delta(\mathcal{R}, X) &= \sup \left\{ \text{diam} (Y_1^{+20\delta} \cap Y_2^{+20\delta}) \mid (H_1, Y_1) \neq (H_2, Y_2) \in \mathcal{R}^* \right\}, \\ \text{inj}(\mathcal{R}, X) &= \inf \{ [h] \mid (H, Y) \in \mathcal{R}^*, h \in H \setminus \{1\} \}. \end{aligned}$$

On s’intéresse au cas où les rapports $\delta/\text{inj}(\mathcal{R}, X)$ et $\Delta(\mathcal{R}, X)/\text{inj}(\mathcal{R}, X)$ sont « très petits ». T. DELZANT et M. GROMOV parlent d’ailleurs de *toute petite simplification* [15].

DÉFINITION 1.2. — Soient $A > 0$ et $\lambda > 0$. La famille \mathcal{R} satisfait la condition de petite simplification $C(A, \lambda)$ si $\text{inj}(\mathcal{R}, X) \geq A\delta$ et $\Delta(\mathcal{R}, X) \leq \lambda \text{inj}(\mathcal{R}, X)$.

La seconde hypothèse $\Delta(\mathcal{R}, X) \leq \lambda \text{inj}(\mathcal{R}, X)$ est plus forte que son analogue $C'(\lambda)$. En effet elle revient à demander que la longueur d’une pièce soit au plus λ fois celle de *n’importe quelle* relation. Soit $(H, Y) \in \mathcal{R}$. Si $\text{inj}(\mathcal{R}, X)$ est suffisamment grand, les éléments de H sont nécessairement tous hyperboliques. En particulier Y n’est pas borné. Puisque $\Delta(\mathcal{R}, X)$ est fini, H est nécessairement un sous-groupe distingué de

$\text{Stab}(Y)$. L'énoncé ci-dessous est un des résultats majeurs de la théorie de la petite simplification.

THÉORÈME 1.3. — *Soit $D \geq 0$. Il existe des nombres $A > 0$ et $\lambda > 0$ avec les propriétés suivantes. Soit X un espace de longueur δ -hyperbolique muni d'une action par isométries d'un groupe G . Soit \mathcal{R} une famille satisfaisant la condition $C(A, \lambda)$. On note K le sous-groupe distingué engendré par $\{H \mid (H, Y) \in \mathcal{R}\}$ et \bar{G} le quotient G/K . Alors,*

(i) *il existe un sous-ensemble \mathcal{R}_0^* de \mathcal{R}^* tel que K est isomorphe au produit libre*

$$K \equiv \prod_{(H,Y) \in \mathcal{R}_0^*}^* H,$$

(ii) *pour tout $(H, Y) \in \mathcal{R}$, la projection canonique $G \rightarrow \bar{G}$ induit un plongement de $\text{Stab}(Y)/H$ dans \bar{G} ,*

(iii) *pour tout $g \in G \setminus \{1\}$, si $[g] \leq D\delta$ alors l'image de g dans \bar{G} est non triviale,*

(iv) *il existe un espace de longueur $\bar{\delta}$ -hyperbolique \bar{X} muni d'une action par isométries du quotient \bar{G} .*

Le point (iii) assure que le groupe quotient \bar{G} n'est pas trivial. En particulier, si $D \gg 1$, tous les éléments de $K \setminus \{1\}$ sont nécessairement hyperboliques.

Tel qu'il est formulé, le point (iv) n'est pas très pertinent : n'importe quel groupe agit trivialement sur un point... qui est un espace hyperbolique ! Cependant l'espace \bar{X} a des propriétés métriques remarquables qui facilitent l'étude de \bar{G} . La construction de \bar{X} sera détaillée dans les sections 2 et 3. Dans le cadre de la petite simplification usuelle, \bar{X} n'est autre que le *complexe de CAYLEY* de \bar{G} . Soit $\bar{G} = \langle S \mid R \rangle$ un groupe satisfaisant la condition $C'(\lambda)$ avec $\lambda \ll 1$. Supposons pour simplifier que toutes les relations de R sont de longueur $L > 0$ et ne sont pas des puissances propres. On note $\bar{\Gamma}$ son graphe de CAYLEY. Le complexe de CAYLEY \bar{X} de \bar{G} est un complexe cellulaire simplement connexe de dimension 2 obtenu de la manière suivante. Pour chaque relation $r \in R$ on considère un disque de l'espace hyperbolique de courbure négative constante κ dont le bord est étiqueté par r . On en attache une copie sur $\bar{\Gamma}$ le long de chaque boucle étiquetée par r . Sous la condition $C'(\lambda)$ la métrique sur les disques recollés induit une distance sur \bar{X} qui en fait un espace $\bar{\delta}$ -hyperbolique avec $\bar{\delta} \ll L$. La géométrie de cet espace est bien plus fine que celle de $\bar{\Gamma}$: le groupe \bar{G} étant hyperbolique, $\bar{\Gamma}$ est aussi un espace hyperbolique, seulement sa constante d'hyperbolicité est de l'ordre de $L/2$.

Rappelons que dans un espace δ -hyperbolique, de nombreux phénomènes peuvent être caractérisés à une échelle locale. Par exemple une isométrie elliptique a toujours une orbite de diamètre au plus 20δ . De ce point de vue la géométrie de \bar{X} est très avantageuse. Elle permet de relever certaines propriétés locales de \bar{X} dans X et ainsi relier le comportement de \bar{G} à celui de G .

1.2. Applications

1.2.1. Cadre général. — L'action de G sur X est *propre* si pour tout $x \in X$, il existe $r > 0$ tel que l'ensemble des éléments $g \in G$ vérifiant $|gx - x| \leq r$ est fini. On parle ici d'action propre au sens des groupes discrets. Par exemple l'action de $SO(2, 1)$ sur le plan hyperbolique \mathbf{H}^2 n'est pas propre en ce sens. L'action de G est *co-compacte* si le quotient X/G est compact. Un groupe est *hyperbolique* si et seulement si il admet une action propre et co-compacte sur un espace hyperbolique.

Lorsque l'action de G sur X est propre et co-compacte, on retrouve la théorie de la petite simplification dans les groupes hyperboliques ébauchée par M. GROMOV [25] et étudiée par C. CHAMPETIER [10], T. DELZANT [14], etc. Si en outre pour tout $(H, Y) \in \mathcal{R}$ l'action de H sur Y est co-compacte, alors celle du quotient \bar{G} sur \bar{X} est encore propre et co-compacte. En particulier \bar{G} est aussi hyperbolique. On a ainsi une classe de groupes « invariante par petite simplification ». En itérant cette construction T. DELZANT et M. GROMOV ont donné une nouvelle preuve du fait que les groupes de Burnside d'exposant impair suffisamment grand sont infinis [15]. Ce point de vue recouvre aussi la petite simplification à graphe utilisée dans la construction du monstre de GROMOV [28, 1]. On pourra consulter à ce propos l'exposé n° 916 d'É. GHYS au séminaire BOURBAKI [21].

Il est cependant important de noter que le théorème 1.3 ne fait aucune hypothèse sur l'action de G . Ainsi G n'est pas nécessairement un groupe hyperbolique. Cette particularité ouvre de nouvelles perspectives. Rappelons toutefois que n'importe quelle action ne permet pas d'exploiter la théorie de la petite simplification. Étant donné un entier $n \geq 2$, le groupe de BAUMSLAG-SOLITAR est défini par la présentation

$$BS(1, n) = \langle a, t \mid tat^{-1} = a^n \rangle.$$

En tant qu'extension HNN, il agit naturellement sur l'arbre de BASS-SERRE associé X . Pourtant on ne trouvera pas de famille \mathcal{R} pour laquelle $\Delta(\mathcal{R}, X)$ est fini et $\text{inj}(\mathcal{R}, X)$ arbitrairement grand : il existe un point dans le bord à l'infini de X qui est fixé par tous les éléments hyperboliques du groupe. Pour construire des familles à petite simplification, il est nécessaire de supposer que l'action de G sur X est propre dans un sens relativement faible. La définition suivante, introduite par M. BESTVINA et K. FUJIWARA dans leurs travaux sur la cohomologie bornée, remplit ce rôle [4].

DÉFINITION 1.4 (BESTVINA-FUJIWARA [4]). — *Soit g un élément hyperbolique de G . Le groupe G agit discrètement le long de g si pour tout $d \geq 0$, pour tout $x \in X$, il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que l'ensemble des éléments $u \in G$ vérifiant $|ux - x| \leq d$ et $|ug^p x - g^p x| \leq d$ est fini.*

M. BESTVINA et K. FUJIWARA utilisent une terminologie un peu différente. Ils disent que g est *faiblement proprement discontinu* (*weakly properly discontinuous* ou *WPD* dans le texte). Si l'action de G sur X est propre alors G agit discrètement le long de tous les éléments hyperboliques.

Soit g un élément hyperbolique de G . Comme dans le cas des arbres on peut lui associer un axe, noté $\text{Axe}(g)$. C'est une partie 10δ -quasi-convexe de X qui est quasi-isométrique à une droite sur laquelle g agit par translation de longueur $[g]$ (modulo une erreur de l'ordre de δ). En outre pour tout $n \in \mathbf{Z}^*$, les axes de g et g^n sont identiques. Si l'action de G est discrète le long de g , on peut contrôler l'intersection entre $\text{Axe}(g)$ et ses translatés de la manière suivante. En exploitant l'hyperbolicité de l'espace X on peut tout d'abord changer l'ordre des quantificateurs dans la définition précédente : il existe deux entiers p et N tels que pour tout $x \in X$, il existe au plus N éléments $u \in G$ vérifiant $|ux - x| \leq 500\delta$ et $|ug^p x - g^p x| \leq 500\delta$. Soit $u \in G$. L'axe de $h = ugu^{-1}$ est exactement $u \text{Axe}(g)$. L'intersection des axes respectifs de g et h est quasi-isométrique à une géodésique $[x, x']$. Supposons que la longueur de celle-ci soit au

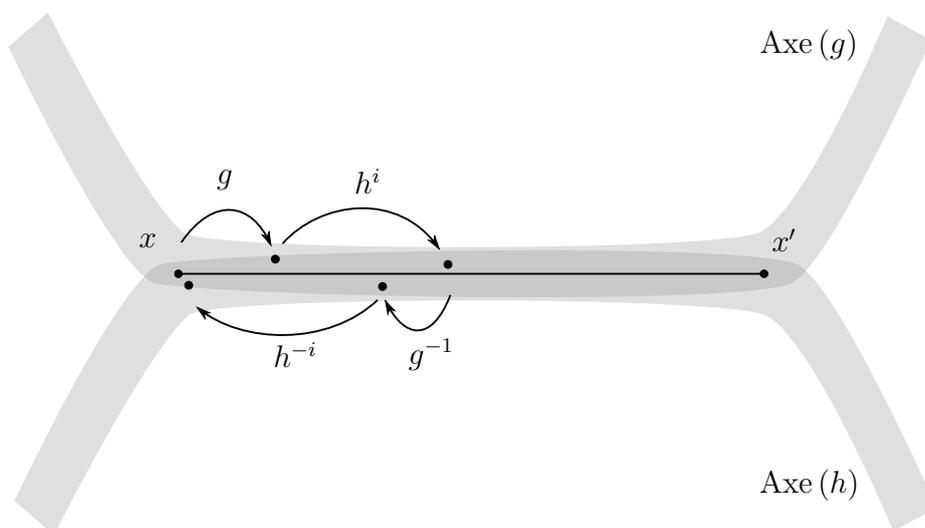


FIGURE 1. Action de g et h sur $[x, x']$.

moins $(p + N)[g] + 2000\delta$. Les éléments g et h agissant sur leurs axes par translation de longueur $[g]$, le commutateur $[g, h]$ déplace les points x et $g^p x$ d'au plus 500δ (voir Figure 1). Le même constat est vrai pour le commutateur $[g, h^i]$ du moment que $i \leq N$. Vu le choix de N , deux commutateurs doivent être égaux. Il existe donc $q \in \mathbf{N}^*$ tel que g et h^q commutent. Cela entraîne que les axes de g et h sont les mêmes. En d'autres termes, il existe une constante C telle que pour tout $u \in G$, soit u stabilise $\text{Axe}(g)$ soit

$$(2) \quad \text{diam} \left(\text{Axe}(g)^{+5\delta} \cap u \text{Axe}(g)^{+5\delta} \right) \leq C.$$

Un argument similaire montre que $\langle g \rangle$ est un sous-groupe d'indice fini du stabilisateur de $\text{Axe}(g)$. Puisque g est hyperbolique, on peut trouver un entier n tel que la longueur de translation de g^n soit arbitrairement grande et $\langle g^n \rangle$ soit distingué dans le stabilisateur de son axe. Ainsi la famille $\mathcal{R} = \{(\text{Axe}(g), \langle g^n \rangle)\}$ satisfait les hypothèses de petite simplification. Plus précisément on a le résultat suivant.

PROPOSITION 1.5. — Soient $A > 0$ et $\lambda > 0$. Soient $g_1, \dots, g_m \in G$ des éléments hyperboliques. On suppose que pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, G agit discrètement le long de g_i . Alors, il existe un entier κ tel que pour tout $n \geq 1$, la famille $\mathcal{R} = \{(\text{Axe}(g_i), \langle g_i^{\kappa n} \rangle) \mid 1 \leq i \leq m\}$ satisfait la condition $C(A, \lambda)$.

1.2.2. *Abondance de quotients.* — Le théorème 1.3 permet de construire de nombreux quotients : si G agit discrètement le long d'un élément hyperbolique, alors pour toute partie finie S de G , il existe un quotient de G dans lequel S se plonge. En fait G possède bien plus de quotients que ce simple exemple pourrait laisser penser.

Un groupe G est *SQ universel* si tout groupe dénombrable peut être plongé dans un quotient de G (SQ est une abréviation de sous-quotient). Rappelons qu'il existe un nombre indénombrable de groupes de rang 2 (c'est-à-dire engendré par 2 éléments). À l'inverse si G est de type fini, un quotient de G ne peut contenir qu'un nombre dénombrable de sous-groupes de rang 2. Il en découle que G possède une infinité non dénombrable de quotients non isomorphes.

PROPOSITION 1.6. — Soit G un groupe muni d'une action sur un espace géodésique hyperbolique X . Supposons que G n'est pas virtuellement cyclique. Si G agit discrètement le long d'un élément hyperbolique, alors G est *SQ universel*.

Esquisse de preuve. — Il suffit de se concentrer sur les groupes de rang 2. En effet tout groupe dénombrable peut être plongé dans un groupe de rang 2 [37]. La première étape consiste à montrer le fait suivant. Pour tout $A > 0$ et $\lambda > 0$, il existe un sous-groupe H de G isomorphe au groupe libre de rang 2, et une partie 10δ -quasi-convexe Y de G telle que la famille $\mathcal{S} = \{(H, Y)\}$ vérifie la condition $C(A, \lambda)$. En outre, il existe un sous-groupe fini F de G tel que le stabilisateur de Y est exactement $\text{Stab}(Y) = F \times H$. Supposons que G agit discrètement le long d'un élément hyperbolique $g \in G$. Puisque G n'est pas virtuellement cyclique, il existe un conjugué h de g tel que g et h aient des axes différents. En particulier ces axes se chevauchent sur une longueur au plus C – cf. (2). Comme on l'a expliqué précédemment, quitte à prendre une puissance, on peut supposer que $[g]$ est très grand devant C . Ainsi le sous-groupe engendré par g et h est libre. Cependant il ne satisfait pas nécessairement la condition $C(A, \lambda)$. Il se trouve qu'on peut prendre pour H un sous-groupe bien choisi de $\langle g, h \rangle$ et pour Y l'enveloppe convexe d'une orbite de H . Cette construction fonctionne bien si G est un groupe sans torsion. Dans le cas général, le stabilisateur de Y n'a pas nécessairement la structure annoncée. La construction est plus délicate (notamment le choix des éléments g et h) mais repose sur la même idée. On peut maintenant passer à la seconde partie de la preuve. Soit Γ un groupe de rang 2. Puisque H est isomorphe au groupe libre de rang 2, il existe un morphisme surjectif $H \twoheadrightarrow \Gamma$ dont on note N le noyau. Or, $\text{Stab}(Y)$ se décomposant en un produit direct, N est un sous-groupe distingué de $\text{Stab}(Y)$. Il en découle que la famille $\mathcal{S}' = \{(N, Y)\}$ satisfait encore la condition $C(A, \lambda)$. D'après le théorème 1.3, $\text{Stab}(Y)/N$ se plonge dans G/K où K est le sous-groupe distingué de G

engendré par N . Par construction $\text{Stab}(Y)/N$ est isomorphe à $F \times H/N \equiv F \times \Gamma$, ce qui fournit le plongement désiré. \square

1.3. Exemples

Agir discrètement le long d'un élément hyperbolique est une propriété suffisante pour construire des familles à petite simplification. Nous allons voir maintenant quelques exemples de groupes qui remplissent cette condition.

1.3.1. Groupe modulaire de surface. — Soit Σ une surface de genre g avec p composantes de bords. Le groupe modulaire de Σ , noté $\text{Mod}(\Sigma)$, est l'ensemble des homéomorphismes de Σ préservant l'orientation modulo isotopies. D'après la classification de W. THURSTON, les classes $f \in \text{Mod}(\Sigma)$ peuvent être rangées en trois catégories disjointes [49].

- (i) f est *périodique* si elle est d'ordre fini.
- (ii) f est *réductible* s'il existe une famille de courbes invariantes (à isotopie près) sous l'action de f . Par exemple un twist de Dehn est réductible.
- (iii) f est *pseudo-Anosov* s'il existe une paire de feuilletages transverses invariants sous l'action de f et sur lesquels f agit de « manière appropriée ».

Un argument de ping-pong permet de construire facilement des sous-groupes libres et purement pseudo-Anosov de $\text{Mod}(\Sigma)$. Par *purent pseudo-Anosov* on entend que tous les éléments non triviaux sont pseudo-Anosov. Le problème est plus compliqué si l'on regarde des sous-groupes *distingués*. En particulier les deux questions suivantes sont restées longtemps sans réponse. Existe-t-il un sous-groupe distingué purement pseudo-Anosov de $\text{Mod}(\Sigma)$? Étant donnée une classe pseudo-Anosov $f \in \text{Mod}(\Sigma)$, est-ce que le sous-groupe distingué engendré par une puissance suffisamment grande de f est libre? B. FARB présente ces questions comme des problèmes « basiques » pour tester notre compréhension de $\text{Mod}(\Sigma)$ [19]. F. DAHMANI, V. GUIARDEL et D. OSIN y répondent positivement. Pour ce faire ils exploitent l'action de $\text{Mod}(\Sigma)$ sur le complexe des courbes.

Le *complexe des courbes* X est un complexe simplicial introduit par W. HARVEY sur lequel $\text{Mod}(\Sigma)$ agit par isométries [34]. Un simplexe de dimension k est une collection de $k + 1$ classes d'homotopies de courbes essentielles, non périphériques, qui peuvent être réalisées de manière disjointe. Ce complexe n'est pas localement fini. H. MAZUR et Y. MINSKY ont montré que si $3g + p - 4 > 0$, alors X est un espace hyperbolique. En outre les éléments hyperboliques de $\text{Mod}(\Sigma)$ pour cette action sont exactement les classes pseudo-Anosov. Toutes les autres agissent de façon elliptique [38]. L'action de $\text{Mod}(\Sigma)$ n'est pas propre. En effet le stabilisateur d'une courbe est en général infini. Toutefois B. BOWDITCH a montré que l'action de $\text{Mod}(\Sigma)$ sur X est *acylindrique* [5]. Formellement cela signifie que pour tout $d \geq 0$, il existe $D \geq 0$ et $N \geq 0$ tels que pour toute paire de points $x, y \in X$ à distance au moins D , il existe au plus N classes $u \in \text{Mod}(\Sigma)$ vérifiant $|ux - x| \leq d$ et $|uy - y| \leq d$. Intuitivement, l'ensemble des éléments qui déplacent peu une longue géodésique est fini. Cette propriété implique

entre autres que $\text{Mod}(\Sigma)$ agit discrètement le long de tout élément hyperbolique. On peut donc appliquer la proposition 1.5.

THÉORÈME 1.7. — *Soit Σ une surface de genre g avec p composantes de bords telle que $3g + p - 4 > 0$. Il existe un entier n tel que pour toute classe pseudo-Anosov $f \in \text{Mod}(\Sigma)$, la clôture normale de f^n est un groupe libre purement pseudo-Anosov.*

Remarque 1.8. — Contrairement à la proposition 1.5, l'exposant n ne dépend pas de f . En effet une action acylindrique fournit un contrôle uniforme sur les constantes qui apparaissent dans la définition 1.4. Pour tous $A > 0$ et $\lambda > 0$, on peut alors trouver un exposant n de telle sorte que pour toute classe pseudo-Anosov $f \in \text{Mod}(\Sigma)$, f^n donne lieu à une famille à petite simplification $C(A, \lambda)$.

1.3.2. Groupe d'automorphismes extérieurs du groupe libre. — Soit r un entier. On note \mathbf{F}_r le groupe libre de rang r . Le groupe des automorphismes extérieurs de \mathbf{F}_r est le quotient du groupe des automorphismes de \mathbf{F}_r par le sous-groupe distingué des automorphismes intérieurs – c'est-à-dire ceux définis par une conjugaison. On le note $\text{Out}(\mathbf{F}_r)$. Cette famille de groupes présente de nombreuses analogies avec les groupes modulaires de surfaces. Soit $\Phi \in \text{Out}(\mathbf{F}_r)$. On dit que Φ est *réductible* s'il existe une décomposition de \mathbf{F}_r en un produit libre $\mathbf{F}_r = A * B$ dont le facteur A est invariant (à conjugaison près). Si aucune puissance (non triviale) de Φ n'est réductible, Φ est *complètement irréductible*. Cette classe d'automorphismes est un analogue des homéomorphismes pseudo-Anosov d'une surface. Suivant le modèle du groupe modulaire, M. BESTVINA, M. FEIGN, M. HANDEL et L. MOSHER ont cherché un pendant au complexe des courbes. Il existe plusieurs candidats : le complexe des facteurs libres [3] et le complexe des scindements libres [32, 35]. Ceux-ci sont hyperboliques. L'action de $\text{Out}(\mathbf{F}_r)$ est malheureusement moins rigide que dans le cas des surfaces. En particulier dans le cas du complexe des scindements libres, $\text{Out}(\mathbf{F}_r)$ n'agit pas nécessairement discrètement le long des éléments hyperboliques [33]. Toutefois pour tout automorphisme complètement irréductible $\Phi \in \text{Out}(\mathbf{F}_r)$, M. BESTVINA et M. FEIGN construisent un complexe hyperbolique (qui cette fois dépend de Φ) muni d'une action par isométries de $\text{Out}(\mathbf{F}_r)$. Le groupe $\text{Out}(\mathbf{F}_r)$ agit discrètement le long de cet automorphisme. En outre tous les éléments hyperboliques sont complètement irréductibles [2]. On peut alors utiliser la proposition 1.5.

THÉORÈME 1.9. — *Soit r un entier. Soit Φ un automorphisme extérieur du groupe libre \mathbf{F}_r . Si Φ est complètement irréductible, alors il existe un entier n tel que la clôture normale de Φ^n est un groupe libre. Tous ses éléments non triviaux sont complètement irréductibles.*

1.3.3. Groupe de CREMONA. — Soit \mathbf{k} un corps algébriquement clos et n un entier. Le groupe de CREMONA $\text{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n)$ est le groupe des transformations birationnelles de l'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n$. On peut aussi l'interpréter comme le groupe des automorphismes sur \mathbf{k} du corps de fractions rationnelles à n variables $\mathbf{k}(x_1, \dots, x_n)$. Savoir si $\text{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^2)$

était un groupe simple est resté pendant très longtemps une question ouverte. S. CANTAT et S. LAMY y ont répondu par la négative [9]. L'espace de PICARD-MANIN est un espace vectoriel de dimension infinie défini comme limite inductive des groupes de PICARD des surfaces obtenues en éclatant tous les points possibles de $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^2$ [7]. Il est muni d'une forme quadratique Q induite par la forme d'intersection. Le théorème de l'indice de Hodge permet de montrer que la signature de Q est $(1, \infty)$. L'ensemble des vecteurs x tels que $Q(x, x) = 1$ définit un hyperboloïde à deux nappes. L'une de ces deux nappes est munie d'une distance caractérisée par $\operatorname{ch} |x - y| = Q(x, y)$. La complétion X de cet espace métrique est un analogue en dimension infinie de l'espace hyperbolique usuel de dimension n . Le groupe de CREMONA $\operatorname{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^2)$ agit par isométries sur X . Parmi les éléments hyperboliques de $\operatorname{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^2)$ pour cette action on distingue une classe d'éléments *tendus*. Un tel élément g satisfait les propriétés suivantes.

- (i) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C \geq 0$ tel que si un élément $u \in \operatorname{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^2)$ satisfait $\operatorname{diam}(\operatorname{Axe}(g)^{+\varepsilon} \cap u \operatorname{Axe}(g)^{+\varepsilon}) \geq C$ alors $u \operatorname{Axe}(g) = \operatorname{Axe}(g)$.
- (ii) Pour tout élément $u \in \operatorname{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^2)$, si $u \operatorname{Axe}(g) = \operatorname{Axe}(g)$ alors $ugu^{-1} = g^{\pm 1}$.

S. CANTAT et S. LAMY montrent qu'un élément « générique » du groupe de CREMONA est tendu. Par ailleurs, pour tout élément hyperbolique $g \in \operatorname{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^2)$, $\langle g \rangle$ est d'indice fini dans son centralisateur [8]. Il en découle que si g est tendu alors $\operatorname{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^2)$ agit discrètement le long de g . On peut alors utiliser la proposition 1.5.

THÉORÈME 1.10. — *Soit \mathbf{k} un corps algébriquement clos. Si $g \in \operatorname{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^2)$ est un élément tendu, alors il existe un entier n tel que la clôture normale de g^n ne contient pas g . En particulier, le groupe de CREMONA $\operatorname{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^2)$ n'est pas simple.*

1.3.4. Autres groupes. — Il existe dans la littérature de nombreuses notions dont le but est de capturer des propriétés liées à une action sur un espace hyperbolique sans pour autant se restreindre au seul cadre des groupes hyperboliques ou relativement hyperboliques : l'*acylindricité* introduite par Z. SELA pour les arbres [46] et reformulée par B. BOWDITCH pour les espaces hyperboliques [5], l'*acylindricité faible* énoncée par U. HAMMENSTÄDT [31], la présence d'éléments *faiblement proprement discontinus* définis par M. BESTVINA et K. FUJIWARA [4], l'existence d'éléments *faiblement contractants* d'A. SISTO [47], etc.

Toutes ces propriétés sont en fait très proches. Soit G un groupe qui n'est pas virtuellement cyclique. D. OSIN a montré que dès que G satisfait l'une de ces propriétés alors G admet une action acylindrique sur un espace hyperbolique (a priori différent). En particulier il agit discrètement le long de tout élément hyperbolique (pour cette action). D. OSIN parle de groupe *acylindriquement hyperbolique* [44]. Outre les exemples déjà cités, cette classe rassemble des objets très variés :

- les groupes d'ARTIN à angles droits qui ne se décomposent pas comme un produit direct non trivial [13] ;
- les groupes définis par une présentation avec exactement une relation et au moins trois générateurs [39] ;

- si \mathbf{k} est un corps, le groupe des automorphismes de l’algèbre de polynômes $\mathbf{k}[x, y]$ [20, 39].

La théorie de la petite simplification permet d’obtenir des résultats généraux. Par exemple tous ces groupes sont SQ-universels. Si on veut préciser les propriétés d’un quotient en particulier on se heurte à une difficulté. Étant donné un groupe G dans la liste ci-dessous, on sait construire une action sur un espace hyperbolique qui est discrète le long d’un élément. Cependant, à l’inverse des groupes modulaires, on n’est pas toujours capable de caractériser intrinsèquement les éléments hyperboliques. Il est donc difficile d’énoncer les propriétés de ce quotient sans se référer à l’action sous-jacente.

1.3.5. Stratégie générale.— La preuve du théorème 1.3 se fait en deux étapes. La première consiste à changer de point de vue (cf. Section 3). Pour chaque paire (H, Y) de \mathcal{R}^* on recolle sur X un cône $C(Y)$ de base Y dont la métrique est modelée sur celle du plan hyperbolique \mathbf{H}^2 . Sous l’hypothèse $C(A, \lambda)$ on montre que l’espace \dot{X} ainsi obtenu est hyperbolique. En outre H fixe le sommet du cône $C(Y)$. Localement il agit en fait comme un groupe de rotations d’angle très grand. La deuxième étape consiste à étudier l’action de K sur l’espace \dot{X} (cf. Section 2). En particulier en combinant la courbure négative de \dot{X} et les propriétés des groupes de rotations H , on « voit » dans \dot{X} un arbre permettant de décrire le sous-groupe distingué K . Une des conséquences est que la projection canonique de \dot{X} vers le quotient $\bar{X} = \dot{X}/K$ induit une isométrie locale autour de tout point $x \in X$. Par ailleurs au voisinage du sommet d’un cône $C(Y)$, l’espace \bar{X} est isométrique à X/H . Le théorème de CARTAN-HADAMARD-GROMOV permet alors de passer du local au global. On en déduit ainsi que l’espace \bar{X} est hyperbolique.

2. FAMILLES DE ROTATIONS

On commence par la deuxième partie de la preuve du théorème 1.3. On oublie pour un instant le contexte de la petite simplification, pour étudier l’action d’une famille de groupes d’isotropies sur un espace hyperbolique.

Les familles de rotations ont été introduites par M. GROMOV [28]. L’idée est la suivante. Soit X un espace à courbure négative $\text{CAT}(\kappa)$ muni d’une action par isométries d’un groupe G . On regarde une famille de sous-groupes dont chacun fixe un point de X . On suppose que cette famille est invariante sous l’action de G . En outre on demande que chacun de ces sous-groupes d’isotropie H se comporte comme une rotation d’angle très grand, ce que M. GROMOV exprime en disant que la courbure du quotient X/H est encore majorée par κ . Sous ces hypothèses, M. GROMOV explique que le groupe K engendré par les groupes de rotations a une structure de produit libre et que le quotient X/K est encore à courbure négative. F. DAHMANI, V. GUIARDEL et D. OSIN ont étendu cette approche au cadre des espaces hyperboliques.

2.1. Sous-groupe engendré par une famille de rotations

Soit X un espace géodésique δ -hyperbolique et G un groupe agissant par isométries sur X . On ne fait ici absolument aucune hypothèse sur l'action de G .

DÉFINITION 2.1. — Une famille de rotations de paramètre σ est une collection \mathcal{F} de paires (H, c) où H est un sous-groupe de G et c un point de X ayant les propriétés suivantes.

- (R1) La famille \mathcal{F} est invariante sous l'action de G définie comme suit. Pour tout $(H, c) \in \mathcal{F}$, pour tout $g \in G$, $g(H, c) = (gHg^{-1}, gc)$.
- (R2) Pour tout $(H, c), (H', c') \in \mathcal{F}$, si $(H, c) \neq (H', c')$ alors $|c - c'| \geq \sigma$.
- (R3) Pour tout $(H, c) \in \mathcal{F}$, H fixe c . En outre, pour tout $h \in H \setminus \{1\}$, pour tout $x, y \in B(c, 40\delta) \setminus B(c, 20\delta)$, si $|x - y| < |x - c| + |y - c| - 10\delta$, alors toute géodésique entre x et hy passe par c .

L'axiome (R3) est une manière de dire que le groupe H se comporte comme un groupe de rotations de centre c et de grand angle (supérieur à π). En effet dans un espace hyperbolique, l'hypothèse $|x - y| < |x - c| + |y - c| - 10\delta$ signifie que l'angle en c $\angle_c(x, y)$ est petit. À l'inverse, dire que toutes les géodésiques entre x et gy passent par c reflète le fait que l'angle $\angle_c(x, gy)$ est « supérieur à π ». Notons que cet énoncé est *local* : les points x et y sont choisis dans la boule de centre c et de rayon 40δ . L'hyperbolicité de l'espace ambiant X permet d'en faire une propriété *globale*. Plus précisément, pour tout $h \in H \setminus \{1\}$, pour tous $x, y \in X$, si $|x - y| < |x - c| + |y - c| - 50\delta$, alors toute géodésique entre x et hy passe par c . En particulier la concaténation de deux géodésiques $[x, c]$ et $[c, hy]$ est encore une géodésique.

On note $c(\mathcal{F})$ l'ensemble des sommets $\{c \mid (H, c) \in \mathcal{F}\}$. Si Y est une partie de X on appelle K_Y le sous-groupe engendré par la famille $\{H \mid (H, c) \in \mathcal{F}, c \in Y\}$. Pour simplifier les notations on appelle $K = K_X$ le sous-groupe (distingué) engendré par tous les sous-groupes H , avec $(H, c) \in \mathcal{F}$. L'objectif est d'étudier la structure de K , ainsi que l'action du quotient $\bar{G} = G/K$ sur l'espace $\bar{X} = X/K$. Un des résultats fondamentaux démontrés par F. DAHMANI, V. GUIRARDEL et D. OSIN s'énonce ainsi.

THÉORÈME 2.2. — Si $\sigma > 10^{100}\delta$, alors

(i) il existe une partie \mathcal{F}_0 de \mathcal{F} telle que K est isomorphe au produit libre

$$K \equiv \ast_{(H,c) \in \mathcal{F}_0} H;$$

(ii) pour tout $g \in K$, soit il existe $(H, c) \in \mathcal{F}$ tel que $g \in H$, soit $[g] \geq \sigma/2$.

Esquisse de preuve. — L'étude de K se fait de « proche en proche ». On part d'une paire $(H_0, c_0) \in \mathcal{F}$ et on regarde l'ensemble V des sommets de $c(\mathcal{F})$ dans un voisinage donné de c_0 . On fait ensuite tourner c_0 autour de ces sommets en utilisant les groupes de rotations H associés. On note V_0 un ensemble de représentants de V/H_0 . Les angles

de rotations étant très grands, la figure M ainsi obtenue s'identifie à l'arbre de BASS-SERRE d'un graphe de groupes dont le groupe fondamental est $H_0 * (*_{(H,c) \in \mathcal{F}, c \in V_0} H)$. On regarde alors les sommets dans un voisinage de M et on recommence le même procédé. Les *moulins à vent* introduits par F. DAHMANI, V. GUIARDEL et D. OSIN permettent de formaliser cette idée.

DÉFINITION 2.3. — *Un moulin à vent est une partie M de X satisfaisant les conditions suivantes.*

- (M1) M est 10δ -quasi-convexe.
- (M2) Tout sommet de $c(\mathcal{F})$ à distance au plus $\sigma/10$ de M est en fait contenu dans M .
- (M3) M est globalement invariant sous l'action de K_M .
- (M4) Pour tout élément $g \in K_M$, soit il existe $(H, c) \in \mathcal{F}$ avec $c \in M$ tel que $g \in H$, soit $[g] \geq \sigma - 300\delta$.

FAIT 2.4. — *Soit M un moulin à vent. Il existe un moulin à vent M' contenant le $\sigma/10$ -voisinage de M . En outre il existe une partie \mathcal{G} de \mathcal{F} telle que les sommets de \mathcal{G} sont contenus dans $M' \setminus M$ et $K_{M'}$ est isomorphe au produit libre*

$$K_{M'} \equiv K_M * \left(\left(*_{(H,c) \in \mathcal{G}} H \right) \right).$$

Notons V l'ensemble des sommets de $c(\mathcal{F}) \setminus M$ qui sont à distance au plus $3\sigma/10$ de M . Si V est vide alors le $\sigma/10$ -voisinage de M est encore un moulin à vent. Sinon on procède comme suit. Par construction V est invariant sous l'action de K_M . On note V_0 un ensemble de représentants de V/K_M . On relie par une géodésique chaque sommet $c \in V$ à sa projection sur M . On obtient ainsi un ensemble 20δ -quasi-convexe S . On choisit pour M' le $\sigma/10$ -voisinage de $K_S S$ (voir Figure 2).

Un argument de quasi-convexité montre que tout sommet à distance au plus $\sigma/5$ de S est en fait dans $M \cup V$. Puisque $c(\mathcal{F})$ est invariant sous l'action de G (et donc de K_S) il en découle que M' satisfait l'axiome (M2). En outre K_S coïncide avec $K_{M'}$. Par conséquence M' est invariant sous l'action de $K_{M'}$ ce qui correspond à l'axiome (M3).

Puisque les sommets de V sont loins de M (à distance au moins $\sigma/10$) les groupes de rotations correspondants font tourner tout M avec un très grand angle. Autrement dit pour tout $(H, c) \in \mathcal{F}$ avec $c \in V$, pour tout $h \in H \setminus \{1\}$, pour tous $x, y \in S$, toute géodésique entre x et hy passe par c .

On considère le produit libre $L = K_M * (*_{(H,c) \in \mathcal{F}, c \in V_0} H)$ comme le groupe fondamental du graphe de groupes Γ représenté Figure 3.

L'arbre de BASS-SERRE associé T est un arbre invariant sous l'action de L avec deux types de sommets : l'orbite Lv_M du sommet v_M fixé par K_M et, pour tout $(H, c) \in \mathcal{F}$, avec $c \in V_0$, l'orbite Lv_c du sommet v_c fixé par H . Pour tout $g \in L$, les sommets gv_M et gv_c sont reliés par une arête. Par simplicité on notera de la même manière les éléments de L et leurs images par l'application naturelle $L \rightarrow K_S$. On construit une application $\varphi: T \rightarrow X$. Pour tout $g \in L$, on envoie gv_M sur un point de gM (au choix)

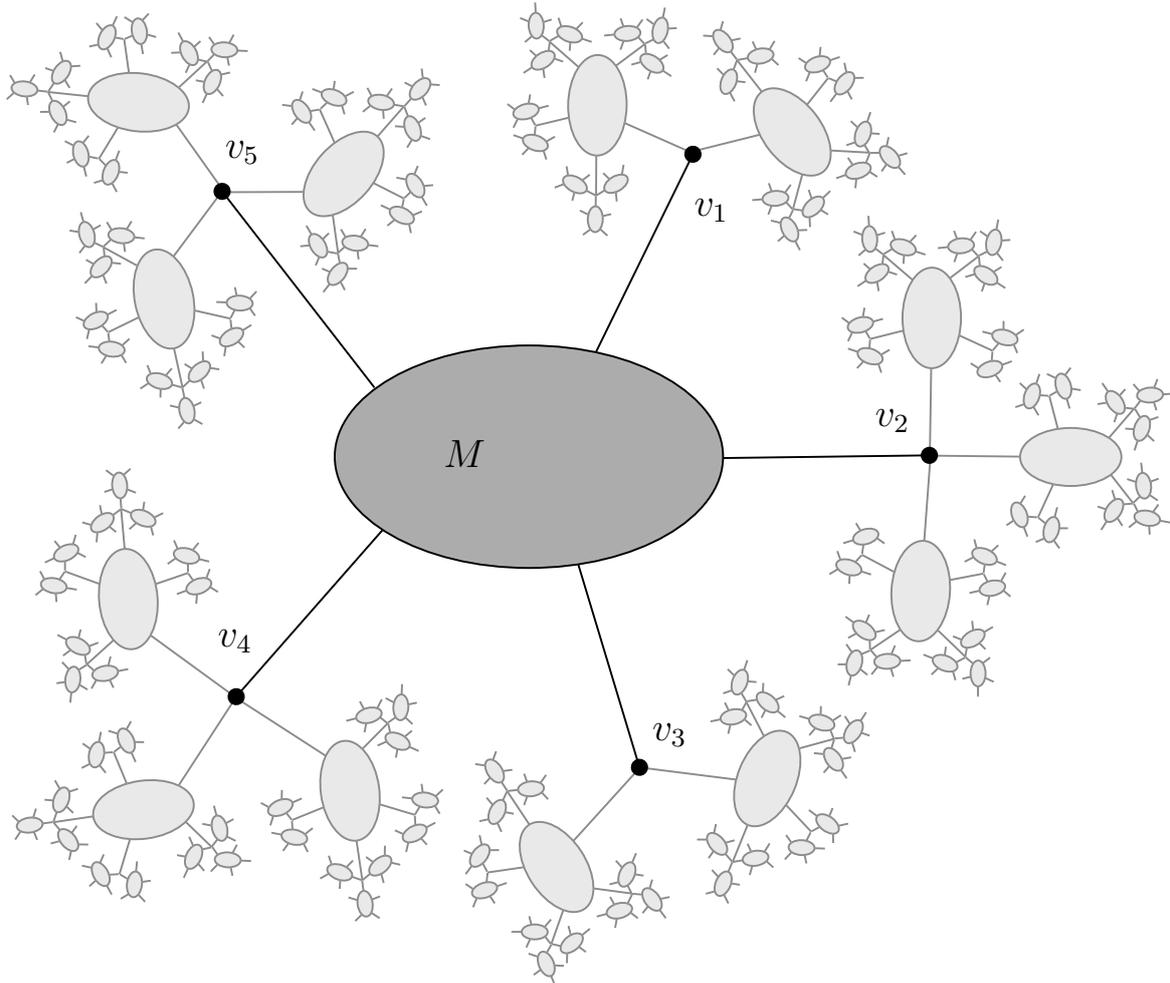


FIGURE 2. Un exemple de moulin à vent : en gris foncé, l'ensemble S avec le moulin de départ M et les sommets v_1, \dots, v_5 de V ; en gris clair, une (petite) partie de $K_S S$.

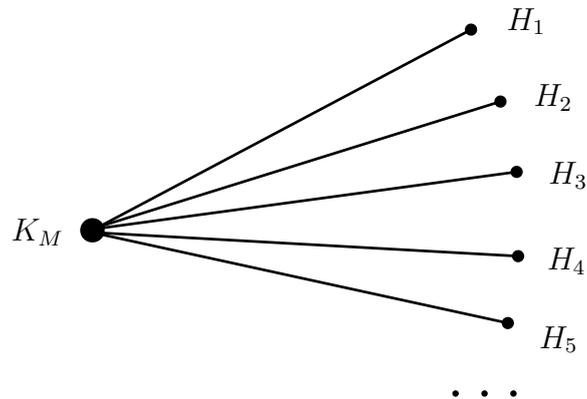


FIGURE 3. Le graphe de groupes Γ . Les sommets de droite correspondent aux groupes de rotations H_i dont le sommet associé c_i appartient à V_0 .

et gv_c sur c . Notons que l'application $L \rightarrow K_S$ est surjective. En particulier l'image de T visite tous les translatés de V et M sous l'action de K_S . Pour montrer que L et K_S sont isomorphes, il suffit de montrer que l'application φ est injective. Soient x et y deux sommets de T . L'intérieur de la géodésique $[x, y]$ qui les relie passe par une suite de sommets dans l'orbite de $\{v_c \mid c \in V_0\}$. On les note z_1, \dots, z_m et on suppose qu'ils apparaissent dans cet ordre le long de $[x, y]$. On pose alors $z_0 = x$ et $z_{m+1} = y$. Pour tout $i \in \{0, \dots, m\}$, on choisit une géodésique $[\varphi(z_i), \varphi(z_{i+1})]$ entre $\varphi(z_i)$ et $\varphi(z_{i+1})$. On construit un chemin γ dans X entre $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$ en concaténant ces géodésiques. Soit $i \in \{1, \dots, m\}$. Le graphe de groupe Γ a été défini de telle sorte que le passage du sommet z_i se fait de la manière suivante. Il existe $g \in L$, $(H, c) \in \mathcal{F}$ avec $c \in V_0$ et $h \in H \setminus \{1\}$ tels que $g^{-1}z_i = v_c$ (ainsi $\varphi(g^{-1}z_i) = c$). En outre $g^{-1}\varphi(z_{i-1})$ appartient à S et $g^{-1}\varphi(z_{i+1})$ est un point de hS (voir la Figure 4).

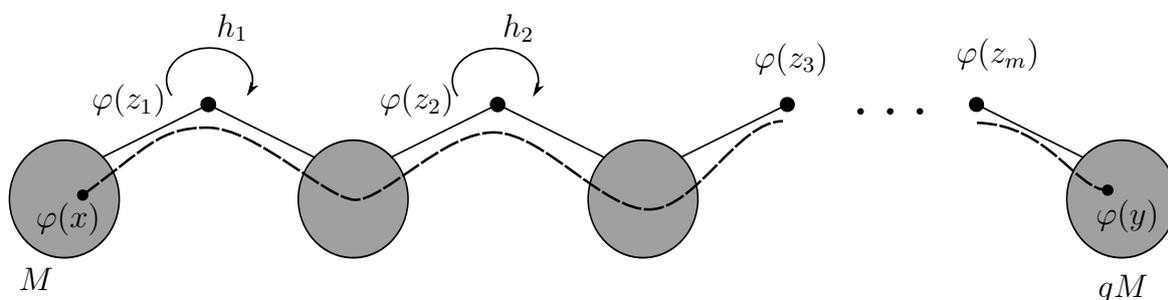


FIGURE 4. Chemin entre $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$. Le tracé en pointillé représente une géodésique entre $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$. Les disques gris sont des translatés du moulin original M .

D'après la discussion précédente la concaténation de $[\varphi(z_{i-1}), \varphi(z_i)]$ et $[\varphi(z_i), \varphi(z_{i+1})]$ est encore une géodésique. Puisque deux sommets distincts sont distants d'au moins σ , il en découle que le chemin γ est une géodésique σ -locale. Rappelons que $\sigma > 10^{100}\delta$. Dans un espace δ -hyperbolique, une géodésique σ -locale ne peut revenir à son point de départ [11, chapitre 3]. Par conséquent l'application φ est injective. Le groupe $K_{M'} = K_S$ a donc la structure annoncée.

La convexité de M' suit un raisonnement similaire. Puisque S est 20δ -quasi-convexe, le chemin γ construit précédemment est à distance au plus 20δ de S . La stabilité des géodésiques locales nous dit que toute géodésique joignant les extrémités de γ reste à distance au plus 20δ de γ [6] (voir Figure 4). On montre ainsi que $K_S S$ est 40δ -quasi-convexe. Il est alors facile de voir que M' , étant le $\sigma/10$ -voisinage de $K_S S$, est 10δ -quasi-convexe.

Il reste à prouver que M' vérifie l'axiome (M4). Pour cela on regarde d'abord l'action de K_S sur S . Soit g un élément de K_S qui n'est ni dans K_M ni dans un groupe de rotations. Soit x un point de S . En raisonnant comme précédemment on construit une géodésique σ -locale entre x et gx . Puisque g n'appartient pas à K_M , γ contient au moins un sommet de $c(\mathcal{F})$. Rappelons que les points de $c(\mathcal{F})$ sont à distance au moins σ les uns

des autres. En outre la distance de HAUSDORFF entre γ et toute géodésique joignant x et gx est au plus 20δ . Si γ contient au moins 2 sommets, alors $|gx - x| \geq \sigma - 100\delta$. Si γ ne contient qu'un seul sommet, alors g s'écrit $g = hu$ ou h est un élément non trivial d'un groupe de rotations H dont le sommet c appartient à V et $u \in K_M$. Les éléments de K_M ne pouvant fixer c , $|uc - c| \geq \sigma$. L'inégalité triangulaire assure alors que $|gx - x| \geq \sigma - 100\delta$. Considérons maintenant un élément $g \in K_S$ qui n'est pas dans un groupe de rotations. L'objectif est de montrer que $[g] \geq \sigma - 300\delta$. Soit $x \in X$. On note y une projection de x sur $K_S S$. Rappelons que \mathcal{F} est invariante sous l'action de G . Quitte à conjuguer g par un élément de K_S on peut supposer que y appartient à S . Si $g \in K_M$ l'axiome (M4) pour M nous dit que $|gx - x| \geq \sigma - 300\delta$. Si $g \notin K_M$, la discussion précédente assure que $|gy - y| \geq \sigma - 100\delta$. Or y et gy sont des projections de x et gx sur $K_S S$. En utilisant la quasi-convexité de $K_S S$ on obtient que $|gx - x| \geq \sigma - 300\delta$ [11, chapitre 10, §2]. On a donc démontré l'axiome (M4) pour M' . Ceci achève la preuve du Fait 2.4.

Revenons maintenant au théorème 2.2. Choisissons une paire $(H_0, c_0) \in \mathcal{F}$. Le singleton $\{c_0\}$ est un moulin à vent. En itérant le Fait 2.4, on construit une famille croissante (M_n) de moulins à vent capable d'atteindre n'importe quel sommet de $c(\mathcal{F})$. En particulier K est l'union de la famille croissante de groupes (K_{M_n}) . Le point (ii) découle de l'axiome (M4) des moulins à vent. Le Fait 2.4 fournit aussi une décomposition appropriée de K_{M_n} en produit libre. Le point (i) du théorème suit directement. \square

2.2. Quotient par une famille de rotations

Concentrons-nous maintenant sur le quotient $\bar{G} = G/K$. Cette étude repose presque entièrement sur le point (ii) du théorème 2.2. Notons en premier lieu que pour tout $(H, c) \in \mathcal{F}$, $K \cap \text{Stab}(c) = H$. Ce qui peut se reformuler ainsi.

PROPOSITION 2.5. — *Pour tout $(H, c) \in \mathcal{F}$, la projection canonique $G \rightarrow \bar{G}$ induit un plongement de $\text{Stab}(c)/H$ dans \bar{G} .*

Attardons-nous maintenant sur l'espace $\bar{X} = X/K$. Toujours en vertu du théorème 2.2, l'action de K sur $X \setminus c(\mathcal{F})$ est proprement discontinue. Aussi \bar{X} hérite d'une structure d'espace métrique. L'objectif est de montrer que cet espace est hyperbolique. L'ingrédient clef de la preuve est le théorème de CARTAN-HADAMARD-GROMOV. Un des challenges en géométrie différentielle est de comprendre les propriétés globales d'une variété à partir d'informations locales, en particulier celles contenues dans le tenseur de courbure. Le théorème de CARTAN-HADAMARD est un exemple de ce passage du local au global : le revêtement universel d'une variété complète dont la courbure sectionnelle est négative est homéomorphe à un espace euclidien. Un phénomène semblable se produit pour les espaces hyperboliques. Dans notre cas, la définition d'hyperbolicité ne fournit aucune information sur la géométrie de l'espace en deçà de l'échelle δ . On ne peut donc utiliser l'approche microscopique de la géométrie riemannienne. Il est nécessaire de regarder des boules dont le rayon est grand devant δ .

Un espace métrique est δ -hyperbolique à l'échelle τ si toutes ses boules de rayon τ sont δ -hyperboliques. Il est ε -simplement-connexe si tout lacet pointé est homotope à un produit de lacets dont chacun est librement homotope à une courbe de diamètre au plus ε .

THÉORÈME 2.6 (CARTAN-HADAMARD-GROMOV [25]). — Soit $\delta \geq 0$. Soit $\tau > 10^7\delta$. Si un espace métrique de longueur est δ -hyperbolique à l'échelle τ et $10^{-5}\tau$ -simplement connexe, alors il est (globalement) 300δ -hyperbolique.

Il suffit donc dans notre cas de montrer que \bar{X} est « presque » simplement connexe et localement hyperbolique. Soient x un point de X et \bar{x} son image dans \bar{X} . Supposons d'abord que pour tout $c \in c(\mathcal{F})$, $|x - c| \geq \sigma/20$. Soit $g \in K \setminus \{1\}$. D'après le théorème 2.2, si g n'est pas dans un groupe de rotations, sa longueur de translation est au moins $\sigma/2$. À l'inverse, si g est contenu dans un groupe de rotations, la version globale de l'axiome (R3) assure que $|gc - c| \geq \sigma/10$. Il en découle que la projection $X \rightarrow \bar{X}$ induit une isométrie de $B(x, \sigma/40)$ sur $B(\bar{x}, \sigma/40)$. En particulier $B(\bar{x}, \sigma/40)$ est δ -hyperbolique. Supposons maintenant qu'il existe $(H, c) \in \mathcal{F}$ tel que $|x - c| \leq \sigma/20$. On appelle \bar{c} l'image du sommet c dans \bar{X} . Une variation métrique autour de la proposition 2.5 peut se formuler de la manière suivante. La boule $B(\bar{c}, \sigma/10)$ est isométrique au quotient de $B(c, \sigma/10)$ par H . N'importe quel triangle de $B(\bar{c}, \sigma/10)$ dont un sommet est \bar{c} peut ainsi se relever isométriquement dans $B(c, \sigma/10)$ en un triangle 4δ -fin. Regarder uniquement les triangles issus de \bar{c} est suffisant pour conclure que $B(\bar{c}, \sigma/10)$ est 2δ -hyperbolique [11, chapitre 1, proposition 1.2] Ainsi toutes les boules de rayon $\sigma/40$ de \bar{X} sont 2δ -hyperboliques.

En tant qu'espace hyperbolique, X est 40δ -simplement connexe [11, chapitre 5, proposition 1.1]. Puisque le groupe K est engendré par des éléments elliptiques (dont la longueur de translation est au plus 20δ), il en est de même pour \bar{X} . Rappelons que σ a été choisi très grand devant δ . En appliquant le théorème de CARTAN-HADAMARD-GROMOV, on obtient le résultat suivant.

THÉORÈME 2.7. — L'espace \bar{X} est $\bar{\delta}$ -hyperbolique avec $\bar{\delta} \leq 600\delta$.

2.3. Lemme de GREENDLINGER

Le lemme de GREENDLINGER est un outil important dans la théorie usuelle de la petite simplification. En particulier il fournit un algorithme pour résoudre le problème du mot.

LEMME 2.8. — Soit $\lambda < 1/6$. Soit $\bar{G} = \langle S|R \rangle$ une présentation satisfaisant l'hypothèse $C'(\lambda)$. Soit w un mot sur l'alphabet $S \cup S^{-1}$, non vide et réduit. Si w représente un élément trivial de \bar{G} alors il existe une relation $r \in R^*$ qui peut s'écrire $r = ps$ avec $|p| > |s|$ telle que p soit un sous-mot de w .

En d'autres termes, si w représente un élément trivial dans \bar{G} alors on peut lire dans w plus de la moitié d'une relation (ici le préfixe p). En remplaçant dans w , p par s^{-1} on obtient un mot plus court, qui représente le même élément de \bar{G} . En itérant le procédé on peut donc décider si w représente un élément trivial de \bar{G} .

L'approche des familles de rotations fournit aussi un lemme de GREENDLINGER :

LEMME 2.9. — *Soit $g \in G \setminus \{1\}$. Soit $x \in X$. Si g appartient à K alors il existe $(H, c) \in \mathcal{F}$ telle que l'une des affirmations suivantes est vraie.*

- g appartient à H et $|x - c| \leq 20\delta$;
- il existe un élément $h \in H \setminus \{1\}$ et deux points p, q sur la géodésique $[x, gx]$ distants d'au moins 40δ tels que $|p - hq| \leq 8\delta$; en particulier $|x - hgx| < |x - gx| - 30\delta$.

Ainsi un élément g de K est soit déjà contenu dans un groupe de rotations, soit il existe une rotation de la famille \mathcal{F} qui permet de réduire la distance de x à gx . Ce lemme ne découle pas directement du théorème 2.2. Il faut raffiner la définition de moulin à vent M en imposant que chaque élément de K_M satisfasse un énoncé type GREENDLINGER.

2.4. Une première application : le remplissage de DEHN

La chirurgie de DEHN joue un rôle important dans l'étude des variétés de dimension 3. L'idée consiste à retirer un tore plein, vu comme le voisinage d'un nœud plongé dans la variété, et de le recoller de manière différente. Le théorème de LICKORISH-WALLACE explique que toute variété orientable fermée de dimension 3 peut s'obtenir à partir de la sphère de même dimension en enchaînant un nombre fini de chirurgies. La seconde partie de l'opération est appelée *remplissage de DEHN*. On peut y penser de la manière suivante.

Soit M une variété compacte orientable de dimension 3 dont le bord est homéomorphe à un tore. Les remplissages de DEHN sont paramétrés par les classes d'homotopies des courbes simples fermées non orientées de ∂M appelées *pent*es. Un recollement $M(\alpha)$ du tore plein $T = D^2 \times S^1$ le long de ∂M est caractérisé par la pente α sur laquelle s'envoie ∂D^2 . Le théorème de THURSTON affirme que si $M \setminus \partial M$ est muni d'une structure hyperbolique de volume fini, alors la variété $M(\alpha)$ est hyperbolique (sauf pour un nombre fini de pentes α). Cet énoncé peut se réinterpréter en termes de groupes : la pente α définit un élément g du groupe fondamental $\pi_1(\partial M)$. Le groupe fondamental de $M(\alpha)$ est alors le quotient de $\pi_1(M)$ par le sous-groupe distingué engendré par g . Sous les hypothèses du théorème de THURSTON, le groupe $\pi_1(M)$ est hyperbolique relativement à $\pi_1(\partial M)$. De ce point de vue, l'énoncé suivant est une généralisation algébrique du remplissage de DEHN.

THÉORÈME 2.10 ([43, 29]). — *Soit G un groupe hyperbolique relativement à un sous-groupe parabolique P . Il existe une partie finie S de G avec la propriété suivante. Soit H un sous-groupe distingué de P . Soit K le sous-groupe distingué de G engendré par H . Si H ne contient pas d'élément de S , alors on a les faits suivants.*

- (i) K est isomorphe au produit libre d'une famille (infinie) de conjugués de H .
- (ii) La projection $G \rightarrow G/K$ induit un plongement de P/H dans G/K .
- (iii) Le quotient G/K est hyperbolique relativement à P/H . En particulier si H est d'indice fini dans P , alors G/K est hyperbolique.

Pour simplifier l'exposition nous avons énoncé ce théorème avec un seul groupe parabolique. Ce théorème se généralise bien entendu pour une famille finie de sous-groupes paraboliques.

Ce résultat n'est pas une application directe du théorème 1.3. En tant que groupe relativement hyperbolique, G admet une action propre sur un espace hyperbolique dont le bord à l'infini satisfait une certaine hypothèse de finitude. Toutefois le groupe P est parabolique pour cette action. Ses éléments ne peuvent donc pas agir avec une grande longueur de translation. À l'inverse le graphe de CAYLEY de G n'est pas hyperbolique. En y recollant des cônes sur les classes à droite de P , on obtient cependant un nouvel espace hyperbolique, dans lequel P agit comme un groupe d'isotropie. Quitte à éviter un nombre fini d'éléments le sous-groupe H agit alors comme une rotation de grand angle. Les familles de rotations permettent ainsi de redémontrer le théorème 2.10.

3. DE LA PETITE SIMPLIFICATION AUX FAMILLES DE ROTATIONS

Nous allons expliquer maintenant comment le théorème 1.3 peut se ramener aux résultats sur les familles de rotations.

3.1. Cône sur un espace métrique

Dans cette section Y est un espace métrique quelconque.

DÉFINITION 3.1. — *Le cône de base Y et de rayon ρ est le quotient de $Y \times [0, \rho]$ par la relation d'équivalence qui identifie tous les points de la forme $(y, 0)$. On le note $C_\rho(Y)$ ou simplement $C(Y)$. Le sommet du cône, noté c , est la classe de $(y, 0)$.*

L'application $\iota: Y \rightarrow C(Y)$ qui envoie le point y sur (y, ρ) permet d'identifier Y avec la base du cône $C(Y)$.

PROPOSITION 3.2 (BERESTOVSKIĬ [6, Chapter II.3, Theorem 3.14])

Le cône $C(Y)$ peut être muni d'une métrique caractérisée par la relation suivante. Soient $x = (y, r)$ et $x' = (y', r')$ deux points de $C(Y)$

$$\operatorname{ch} |x - x'| = \operatorname{ch} r \operatorname{ch} r' - \operatorname{sh} r \operatorname{sh} r' \cos \left(\min \left\{ \pi, \frac{|y - y'|}{\operatorname{sh} \rho} \right\} \right).$$

Cette métrique s'interprète de la manière suivante. Étant donnés $x = (y, r)$ et $x' = (y', r')$ deux points de $C(Y)$ on construit un triangle $[\tilde{c}, \tilde{x}, \tilde{x}']$ dans le plan hyperbolique \mathbf{H}^2 dont la longueur des côtés $[\tilde{c}, \tilde{x}]$ et $[\tilde{c}, \tilde{x}']$ est respectivement r et r' et tel que l'angle en \tilde{c} soit $\angle_{\tilde{c}}(\tilde{x}, \tilde{x}') = \min\{\pi, |y - y'|/\text{sh } \rho\}$. La loi des cosinus assure que la distance entre x et x' dans $C(Y)$ est exactement la longueur du troisième côté de ce triangle (cf. Figure 5).

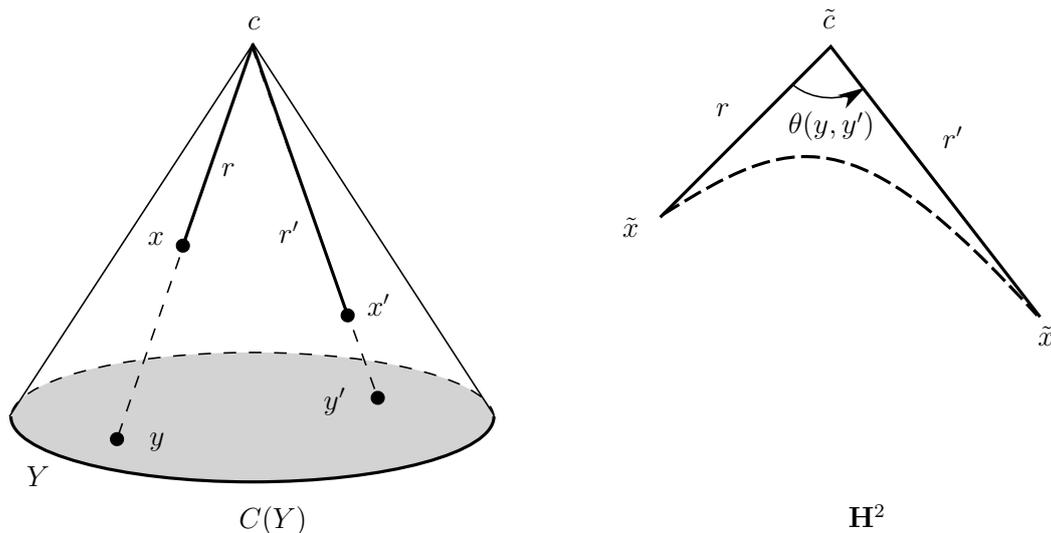


FIGURE 5. Interprétation géométrique de la métrique sur les cônes

Exemple 3.3. — Si Y est un cercle de périmètre $2\pi \text{sh } \rho$ muni de la métrique de longueur, alors $C_\rho(Y)$ est exactement le disque hyperbolique de rayon ρ dans \mathbf{H}^2 . Si Y est isométrique à la droite réelle, alors $C_\rho(Y) \setminus \{c\}$ est le revêtement universel du disque hyperbolique épointé de rayon ρ .

Le cône $C(Y)$ est géodésique si et seulement s'il en est de même pour Y . Plus précisément si $x = (y, r)$ et $x' = (y', r')$ sont deux points de $C(Y)$ alors deux cas se présentent. Si $r > 0$, $r' > 0$ et $|y - y'| < \pi \text{sh } \rho$, alors les géodésiques de $C(Y)$ entre x et x' sont en bijection avec les géodésiques de Y entre y et y' . Dans tous les autres cas, il existe une unique géodésique reliant x et x' . Si en outre $y \neq y'$ alors cette géodésique est la concaténation des segments radiaux $[x, c] \cup [c, x']$.

Les deux exemples que nous avons proposés sont des espaces hyperboliques. Cela reste vrai quel que soit Y .

PROPOSITION 3.4 ([12, Proposition 4.6]). — *Le cône $C(Y)$ est 2δ -hyperbolique, où δ est la constante d'hyperbolicité du plan hyperbolique \mathbf{H}^2 .*

3.2. Espace cône

On se place maintenant dans le cadre général du théorème 1.3. En particulier X est un espace δ -hyperbolique et G un groupe agissant par isométries sur X . On se donne une famille \mathcal{R} de paires (H, Y) comme dans la section 1.1. On fixe en outre un paramètre $\rho > 0$. Sa valeur sera précisée plus tard. Il faut y penser comme à une très grande longueur. L'objectif est de changer d'espace métrique pour faire jouer à \mathcal{R}^* le rôle d'une famille de rotations. La première étape consiste à construire un nouvel espace hyperbolique. Elle n'utilise pas la structure de groupe sous-jacente.

DÉFINITION 3.5. — L'espace cône au-dessus de X relativement à \mathcal{R} est obtenu en recollant pour tout $(H, Y) \in \mathcal{R}^*$ le cône $C_\rho(Y)$ sur X le long de Y grâce à l'application $\iota: Y \rightarrow C(Y)$. On le notera $\dot{X}_\rho(\mathcal{R})$ ou simplement \dot{X} .

Pour le moment \dot{X} n'est qu'un ensemble de points. On souhaite le munir d'une métrique. Il faut noter cependant que l'application $\iota: Y \rightarrow C(Y)$ qui permet de recoller un cône sur X est loin d'être une isométrie. Il n'est donc pas possible de trouver une distance sur \dot{X} pour laquelle les cônes $C(Y)$ et X seraient isométriquement plongés. Toutefois on peut munir \dot{X} d'une métrique de telle sorte que la longueur d'une courbe entièrement contenue dans $C(Y)$ (respectivement X) soit la même mesurée dans \dot{X} ou $C(Y)$ (respectivement ou X). En particulier les applications canoniques $C(Y) \rightarrow \dot{X}$ et $X \rightarrow \dot{X}$ sont des plongements 1-lipschitziens. Par ailleurs si c est le sommet du cône $C(Y)$, alors les distances de $C(Y)$ et \dot{X} coïncident sur la boule $B(c, \rho/3)$. Cette construction est détaillée dans [12].

Remarque 3.6. — Pour simplifier l'exposition, nous avons omis une subtilité technique. Avec la métrique définie précédemment le cône $C(Y)$ n'est pas nécessairement géodésique. Considérons en effet deux points $x = (y, r)$ et $x' = (y', r')$ du cône $C(Y)$. Pour avoir une géodésique entre x et x' il faut s'assurer qu'il existe une géodésique contenue dans Y joignant y et y' . Cette difficulté peut être contournée de la manière suivante. Quitte à remplacer Y par son 20δ -voisinage on peut supposer que Y est presque convexe. C'est-à-dire que pour tous $y, y' \in Y$, il existe des points $z, z' \in Y$ tels que $|y - z| \leq 10\delta$, $|y' - z'| \leq 10\delta$ et que le chemin $[y, z] \cup [y', z'] \cup [z', y']$ soit contenu dans Y . En particulier Y est connexe par arcs rectifiables. On note alors $|\cdot|_Y$ la métrique de longueur sur Y induite par la restriction de $|\cdot|$ à Y . Changer de métrique perturbe peu la construction. En effet, pour tous $y, y' \in Y$, on a $|y - y'| \leq |y - y'|_Y \leq |y - y'| + 40\delta$. On considère alors le cône $C(Y)$ construit sur l'espace métrique $(Y, |\cdot|_Y)$. Celui-ci n'est pas nécessairement géodésique, mais c'est un espace de longueur.

Remarque 3.7. — Sans aucune hypothèse supplémentaire, il n'est a priori pas évident de montrer que \dot{X} est un espace géodésique (même si X l'est). Cependant \dot{X} est un espace de longueur, ce qui est amplement suffisant. Une autre manière de contourner cette difficulté consiste à remplacer X par un graphe défini ainsi : ses sommets sont les points de X et ses arêtes les paires de points à distance au plus une petite constante ε .

Le graphe ainsi obtenu est alors quasi-isométrique à l'espace d'origine, ce qui permet de préserver toutes les propriétés importantes de X . En particulier il est hyperbolique. En outre l'espace cône au-dessus du nouvel espace X se décompose comme un complexe simplicial de dimension 2 dont les faces sont toutes isomorphes à un triangle de \mathbf{H}^2 et recollées par isométries le long de leurs arêtes. Il résulte alors d'un théorème de M. BRIDSON [6, chapter I.7, proposition 7.19] que \dot{X} est géodésique. Pour simplifier notre propos on supposera toujours que \dot{X} est géodésique.

PROPOSITION 3.8 ([26, 15]). — *Il existe des constantes $\delta_0 > 0$, $\Delta_0 > 0$ et $\rho_0 > 0$ qui ne dépendent pas de X , G ou \mathcal{R} avec les propriétés suivantes. Si $\delta \leq \delta_0$, $\rho \geq \rho_0$ et $\Delta(\mathcal{R}, X) \leq \Delta_0$, alors l'espace cône \dot{X} est 900δ -hyperbolique, où δ est la constante d'hyperbolicité du plan hyperbolique \mathbf{H}^2 .*

Dans [26], M. GROMOV propose une estimation quantitative des constantes δ_0 , Δ_0 et ρ_0 . Nous esquissons ici un argument asymptotique qui ne fournit qu'un résultat qualitatif. L'idée derrière la preuve est simple. Sa mise en œuvre s'avère toutefois assez technique. Notons que ce résultat n'utilise pas du tout la structure de groupe de G ou de la famille \mathcal{R} . Il s'agit juste de recoller des cônes sur des parties quasi-convexes de X . Commençons par regarder un cas limite.

FAIT 3.9. — *Soient T un arbre réel et \mathcal{S} une famille de sous-arbres de T . On suppose que deux éléments distincts de \mathcal{S} ont au plus un point commun. Alors l'espace \dot{T} , obtenu en recollant pour tout $S \in \mathcal{S}$ le cône $C(S)$ sur T , est 2δ -hyperbolique.*

On peut voir ici \dot{T} comme l'union d'une collection \mathcal{P} de parties 2δ -hyperboliques de T : les cônes et les composantes connexes de $T \setminus \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$. Les éléments de \mathcal{P} sont arrangés selon une structure d'arbre. En outre, deux éléments distincts de \mathcal{P} ont au plus un point commun. Lorsqu'on attache en un point deux espaces 2δ -hyperboliques, le résultat reste 2δ -hyperbolique. Il en découle que \dot{T} est 2δ -hyperbolique. La décomposition de \dot{T} esquissé ci-dessus peut être formalisée en utilisant la notion d'espace *arbo-gradué* définie par M. SAPIR et C. DRUȚU [18]. La preuve du cas général repose sur le fait suivant.

FAIT 3.10. — *Il existe des constantes $\delta_0 > 0$, $\Delta_0 > 0$ et $\rho_0 > 0$ qui ne dépendent pas de X , G ou \mathcal{R} avec les propriétés suivantes. Si $\delta \leq \delta_0$, $\rho \geq \rho_0$ et $\Delta(\mathcal{R}, X) \leq \Delta_0$, alors toute boule de rayon $\rho/100$ de l'espace \dot{X} est 3δ -hyperbolique.*

Cet énoncé est une perturbation du fait précédent. On le démontre par l'absurde. Posons pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\delta_n = \Delta_n = 1/n$. Si le fait était faux on pourrait trouver pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ un espace δ_n -hyperbolique X_n , une famille \mathcal{R}_n avec $\Delta(\mathcal{R}_n, X_n) \leq \Delta_n$ et un point $x_n \in \dot{X}_n$ tels que la boule $B(x_n, \rho/100)$ n'est pas 3δ -hyperbolique. Notons que x_n est à distance au plus $3\rho/4$ de X_n . Dans le cas contraire il existerait $(H, Y) \in \mathcal{R}_n$ tel que $B(x_n, \rho/100)$ soit entièrement contenue dans le cône $C(Y)$. Or la métrique de $C(Y)$ et celle de \dot{X}_n coïncident près du sommet. Puisque $C(Y)$ est 2δ -hyperbolique, il en serait de même de $B(x_n, \rho/100)$. Ainsi il existe un point x_n^0 de X_n tel que $B(x_n, \rho/100)$ est contenu dans $B(x_n^0, \rho)$. L'idée est maintenant de « passer à la limite ». Pour cela

on fixe un ultra-filtre non principal ω . On appelle T la limite de la suite d'espaces métriques pointés (X_n, x_n^0) selon ω [16, 17]. Décrire précisément cette notion de limite prendrait trop de temps ici. Le point important est qu'elle se comporte bien vis-à-vis de l'hyperbolicité : puisque chaque X_n est un espace géodésique δ_n -hyperbolique, la limite T est un espace géodésique 0-hyperbolique, c'est-à-dire un arbre réel. De façon analogue on peut regarder la limite de \mathcal{R}_n^* (on oublie ici la structure de groupe). Cela fournit une famille \mathcal{S} de sous-arbres de T . Puisque $\Delta(\mathcal{R}_n, X_n)$ tend vers 0, deux de ces sous-arbres ont au plus un point commun. D'après le fait précédent, l'espace cône \dot{T} relativement à \mathcal{S} est 2δ -hyperbolique. Or $B(x_n^0, \rho)$ converge vers une boule de rayon ρ de \dot{T} . Il en découle que cette boule est également 2δ -hyperbolique. Par conséquent il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $B(x_n^0, \rho)$ – et donc $B(x_n, \rho/100)$ – est 3δ -hyperbolique. Contradiction.

Remarque 3.11. — L'argument énoncé ci-dessus fait l'impasse sur quelques points techniques. On utilise implicitement le fait que l'espace cône \dot{T} au-dessus de $T = \lim_{\omega} X_n$ est isométrique à la limite des espaces cônes \dot{X}_n au-dessus X_n . Ceci n'est pas vrai en général : l'espace \dot{T} est plus petit. Toutefois on a une isométrie sur les boules de rayon ρ dont le centre est dans T . Ce qui est suffisant pour la démonstration.

Vu l'ordre des quantificateurs dans le Fait 3.10, le rayon ρ utilisé pour construire l'espace cône \dot{X}_n n'est pas nécessairement le même pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. En particulier ρ peut tendre vers l'infini (il ne peut pas tendre vers 0 puisque $\rho \geq \rho_0$). L'espace cône \dot{T} à la limite est alors obtenu en recollant non pas des cônes mais des horoboules. Dans ce cas \dot{T} reste 2δ -hyperbolique. Le reste de la preuve est inchangé.

Un fois le Fait 3.10 établi, le théorème de CARTAN-HADAMARD-GROMOV permet à nouveau de conclure. Comme l'espace X est δ -hyperbolique, il est aussi 40δ -simplement connexe. Il est facile de montrer que $\dot{X}_\rho(\mathcal{Y})$ jouit de la même propriété. Si on choisit le paramètre ρ_0 très grand devant δ (par exemple $\rho_0 \geq 10^{100}\delta$) alors le théorème de CARTAN-HADAMARD-GROMOV assure que \dot{X} est 900δ -hyperbolique.

3.3. Une famille de rotations

Rappelons que \mathcal{R}^* est construit à partir de \mathcal{R} de la manière suivante :

$$\mathcal{R}^* = \{ (gHg^{-1}, gY) \mid (H, Y) \in \mathcal{R}, g \in G \}.$$

Il en découle que \mathcal{R}^* est invariant sous l'action du groupe G (action par conjugaison sur le premier terme et par translation sur le second). On peut donc étendre par homogénéité l'action de G sur X en une action sur \dot{X} . Soit $g \in G$. Soient $(H, Y) \in \mathcal{R}^*$ et $x = (y, r)$ un point du cône $C(Y)$. Son image par g est le point du cône $C(gY)$ défini par $gx = (gy, r)$. De cette façon le groupe G agit par isométries sur \dot{X} . Pour tout $(H, Y) \in \mathcal{R}^*$ on note c le sommet du cône $C(Y)$. On note alors \mathcal{F} l'ensemble des paires (H, c) ainsi obtenues.

Notons δ_0 , Δ_0 et ρ_0 les constantes données par la proposition 3.8. On suppose que $\delta \leq \delta_0$, $\rho \geq \rho_0$ et $\Delta(\mathcal{R}, X) \leq \Delta_0$. Ainsi, \dot{X} est 900δ -hyperbolique. La famille \mathcal{R}^* a été construite pour être invariante sous l'action de G . Il en est donc de même pour \mathcal{F} . Plus précisément, pour tout $(H, c) \in \mathcal{F}$, pour tout $g \in G$, (gHg^{-1}, gc) appartient à \mathcal{F} . Les

cônes attachés sur X pour former \dot{X} sont de rayon ρ , il en découle que deux sommets distincts sont à distance au moins 2ρ . Pour finir supposons que $\text{inj}(\mathcal{R}, X) \geq 2\pi \text{sh } \rho$. Soient $(H, Y) \in \mathcal{R}^*$ et c le sommet du cône $C(Y)$. Par construction tous les éléments de H fixent c . Soient $x = (y, r)$ et $x' = (y, r)$ deux points de $B(c, 40\delta) \setminus B(c, 20\delta)$ et $h \in H \setminus \{1\}$. Rappelons que les distances de $C(Y)$ et \dot{X} coïncident sur $B(c, \rho/3)$. Si $|x - x'| < |x - c| + |x' - c| - 20\delta$, alors c n'est pas sur la géodésique $[x, x']$. Il en découle que, dans X , $|y - y'| < \pi \text{sh } \rho$. Par hypothèse h translate tous les points de X d'au moins $2\pi \text{sh } \rho$. Donc $|y - hy'| \geq \pi \text{sh } \rho$. Ainsi toute géodésique entre x et hx' passe par c . On vient de passer en revue tous les axiomes des familles de rotations. On a donc démontré le résultat suivant.

PROPOSITION 3.12. — *Il existe des constantes $\delta_0 > 0$, $\Delta_0 > 0$ et $\rho_0 > 0$ qui ne dépendent pas de X , G ou \mathcal{R} avec les propriétés suivantes. Supposons que $\delta \leq \delta_0$, et $\rho \geq \rho_0$. Si en outre $\Delta(\mathcal{R}, X) \leq \Delta_0$ et $\text{inj}(\mathcal{R}, X) \geq 2\pi \text{sh } \rho$, alors l'espace cône $\dot{X}_\rho(\mathcal{R})$ est 900δ -hyperbolique. En outre la famille \mathcal{F} construite à partir de \mathcal{R} est une famille de rotations de paramètre 2ρ .*

On est maintenant en mesure d'exploiter tous les résultats de la section 2. Il n'y a plus qu'à ajuster les constantes.

Esquisse de preuve du théorème 1.3. — Notons δ_0 , Δ_0 et ρ_0 les constantes données par la proposition 3.12. Quitte à augmenter ρ_0 on peut toujours supposer que $2\rho_0 \geq 10^{1000}\delta$. Soit $D \geq 0$. On choisit $\rho \geq \max\{\rho_0, D\delta_0\}$. On pose alors

$$A = \frac{2\pi \text{sh } \rho}{\delta_0} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{\Delta_0}{2\pi \text{sh } \rho}.$$

Soient X un espace géodésique δ -hyperbolique et G un groupe agissant par isométries sur X . On se donne une famille \mathcal{R} satisfaisant la condition $C(A, \lambda)$. Comme précédemment K est le sous-groupe distingué engendré par $\{H \mid (H, Y) \in \mathcal{R}\}$ et \bar{G} le quotient G/K . On définit un paramètre sans dimension a comme suit

$$a = \min \left\{ \frac{\delta_0}{\delta}, \frac{\Delta_0}{\Delta(\mathcal{R}, X)} \right\}.$$

Au lieu de travailler avec X , on regarde l'action de G sur l'espace renormalisé aX . On construit alors $\dot{X}_\rho(\mathcal{R})$ l'espace cône de rayon ρ au-dessus de aX relativement à \mathcal{R} . On appelle \bar{X} le quotient $\dot{X}_\rho(\mathcal{R})/K$. Comme expliqué auparavant, on transforme \mathcal{R} en une famille de groupes d'isotropies

$$\mathcal{F} = \{(H, c) \mid (H, Y) \in \mathcal{R}^*, c \text{ sommet de } C(Y)\}.$$

Par construction aX est δ_0 -hyperbolique. En outre la famille \mathcal{R} y vérifie $\Delta(\mathcal{R}, aX) \leq \Delta_0$. Penchons-nous maintenant sur $\text{inj}(\mathcal{R}, aX)$. Puisque \mathcal{R} satisfait la condition $C(A, \lambda)$ on a dans X

$$\text{inj}(\mathcal{R}, X) \geq \max \left\{ A\delta, \frac{\Delta(\mathcal{R}, aX)}{\lambda} \right\}.$$

Après renormalisation on obtient dans l'espace aX

$$\text{inj}(\mathcal{R}, aX) \geq a \max \left\{ A\delta, \frac{\Delta(\mathcal{R}, aX)}{\lambda} \right\} \geq \max \left\{ A\delta_0, \frac{\Delta_0}{\lambda} \right\} \geq 2\pi \text{sh } \rho.$$

Ainsi aX , G et \mathcal{R} vérifient les hypothèses de la proposition 3.12. En particulier $\dot{X}_\rho(\mathcal{R})$ est 900δ -hyperbolique et \mathcal{F} une famille de rotations de paramètre 2ρ . Rappelons que $2\rho \geq 2\rho_0 \geq 10^{1000}\delta$. On peut ainsi appliquer tous les résultats sur les familles de rotations présentées dans la section précédente :

- (i) Il existe une partie \mathcal{R}_0^* de \mathcal{R}^* telle que K est isomorphe au produit libre $*_{(H,Y) \in \mathcal{R}_0^*} H$ (Théorème 2.2)
- (ii) Soit $(H, Y) \in \mathcal{R}$. Si c est le sommet de $C(Y)$, alors $\text{Stab}(c)/H$ se plonge dans \bar{G} (Proposition 2.5). Or $\text{Stab}(c)$ est par construction le stabilisateur de Y . Aussi $\text{Stab}(Y)/H$ se plonge dans \bar{G} .
- (iii) Soit $g \in K \setminus \{1\}$. D'après le théorème 2.2 deux cas sont possibles. Soit il existe $(H, Y) \in \mathcal{F}$ tel que $g \in H \setminus \{1\}$, soit la longueur de translation de g dans \dot{X} est au moins ρ . Rappelons que pour tout $h \in H \setminus \{1\}$, $[h] \geq \text{inj}(\mathcal{R}, aX) \geq \pi \text{sh } \rho$. Par ailleurs, l'application $aX \rightarrow \dot{X}$ est 1-lipschitzienne. Ainsi dans les deux cas $[g] \geq \rho > D\delta_0$. Supposons maintenant que dans X , $[g] \leq D\delta$. Après renormalisation $[g]$ est majorée par $D\delta_0$, son image dans \bar{G} ne peut donc être triviale.
- (iv) L'espace \bar{X} est hyperbolique (Théorème 2.7). □

REMERCIEMENTS — Je voudrais remercier F. DAHMANI, V. GUIARDEL, D. OSIN, S. CANTAT et S. LAMY pour leur aide précieuse et les différentes discussions sur leurs travaux. Cet exposé s'inspire notamment des notes de V. GUIARDEL au PCMI [30]. Merci aussi à A. VALETTE et L. CIOBANU dont les remarques m'ont permis d'améliorer la présentation.

RÉFÉRENCES

- [1] G. N. Arzhantseva & T. Delzant – Examples of random groups, novembre 2008.
- [2] M. Bestvina & M. Feighn – A hyperbolic $\text{Out}(F_n)$ -complex, *Groups, Geometry, and Dynamics* 4 (2010), 31–58.
- [3] M. Bestvina & M. Feighn – Hyperbolicity of the complex of free factors, *Adv. Math.* 256 (2014), 104–155.
- [4] M. Bestvina & K. Fujiwara – Bounded cohomology of subgroups of mapping class groups, *Geom. Topol.* 6 (2002), 69–89 (electronic).
- [5] B. H. Bowditch – Tight geodesics in the curve complex, *Inv. Math.* 171 (2008), 281–300.

- [6] M. R. Bridson & A. Haefliger – *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundle Math. Wiss.*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [7] S. Cantat – Sur les groupes de transformations birationnelles des surfaces, *Ann. of Math., second series* 174 (2011), 299–340.
- [8] S. Cantat & J. Blanc – Dynamical degrees of birational transformations of projective surfaces, *arXiv.org* : 1307.0361, 2013.
- [9] S. Cantat & S. Lamy – Normal subgroups in the Cremona group, *Acta Math.* 210 (2013), 31–94.
- [10] C. Champetier – Petite simplification dans les groupes hyperboliques, *Ann. Math. (Toulouse), série 6*, 3 (1994), 161–221.
- [11] M. Coornaert, T. Delzant & A. Papadopoulos – *Géométrie et théorie des groupes*, volume 1441 of *Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [12] R. Coulon – On the geometry of Burnside quotients of torsion free hyperbolic groups, *Internat. J. Algebra Comput.* 24 (2014), 251–345.
- [13] F. Dahmani, V. Guirardel & D. V. Osin – Hyperbolically embedded subgroups and rotating families in groups acting on hyperbolic spaces, *arXiv.org* : 1111.7048, novembre 2011.
- [14] T. Delzant – Sous-groupes distingués et quotients des groupes hyperboliques, *Duke Math. J.* 83 (1996), 661–682.
- [15] T. Delzant & M. Gromov – Courbure mésoscopique et théorie de la toute petite simplification, *J. Topol.* 1 (2008), 804–836.
- [16] C. Druţu – Cônes asymptotiques et invariants de quasi-isométrie pour des espaces métriques hyperboliques, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 51 (2001), 81–97.
- [17] C. Druţu – Quasi-isometry invariants and asymptotic cones, *Internat. J. Algebra Comput.* 12 (2002), 99–135.
- [18] C. Druţu & M. V. Sapir – Tree-graded spaces and asymptotic cones of groups, *Topology. An International Journal of Mathematics* 44 (2005), 959–1058.
- [19] B. Farb – Some problems on mapping class groups and moduli space, in *Problems on mapping class groups and related topics*, pages 11–55. Amer. Math. Soc., Providence, RI, Providence, Rhode Island, 2006.
- [20] J.-P. Furter & S. Lamy – Normal subgroup generated by a plane polynomial automorphism, *Transformation Groups* 15 (2010), 577–610.
- [21] É. Ghys – Groupes aléatoires (d’après Misha Gromov,...), *Sém. Bourbaki* (2002/03), exp. n° 916, *Astérisque* 294 (2004), 173–204.
- [22] É. Ghys & P. de la Harpe – *Sur les groupes hyperboliques d’après Mikhael Gromov*, volume 83 of *Progress in Math.*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990.
- [23] M. Greendlinger – Dehn’s algorithm for the word problem, *Comm. Pure Appl. Math.* 13 (1960), 67–83.

- [24] M. Greendlinger – On Dehn’s algorithms for the conjugacy and word problems, with applications, *Comm. Pure Appl. Math.* 13 (1960), 641–677.
- [25] M. Gromov – Hyperbolic groups, in *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 75–263, Springer, New York, 1987.
- [26] M. Gromov – *Mesoscopic curvature and hyperbolicity*, volume 288 of *Contemp. Math.*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2001.
- [27] M. Gromov – CAT(κ)-spaces : construction and concentration, *Rossiĭskaya Akademiya Nauk. Sankt-Peterburgskoe Otdelenie. Matematicheskiĭ Institut im. V. A. Steklova. Zapiski Nauchnykh Seminarov (POMI)* 280 (2001) (Geom. i Topol. 7), 100–140, 299–300; traduction anglaise : *J. Math. Sci. (N.Y.)* 119 (2004), 178–200.
- [28] M. Gromov – Random walk in random groups, *Geom. Funct. Anal.* 13 (2003), 73–146.
- [29] D. Groves & J. Manning – Dehn filling in relatively hyperbolic groups, *Israel J. Math.* 168 (2008), 317–429.
- [30] V. Guirardel – Geometric small cancellation, *IAS - Park City Mathematics Series* 21, 2012.
- [31] U. Hamenstädt – Bounded cohomology and isometry groups of hyperbolic spaces, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 10 (2008), 315–349.
- [32] M. Handel & L. Mosher – The free splitting complex of a free group, I : hyperbolicity, *Geom. Topol.* 17 (2013), 1581–1672.
- [33] M. Handel & L. Mosher – The free splitting complex of a free group II : Loxodromic outer automorphisms, *arXiv.org* : 1402.1886, février 2014.
- [34] W. J. Harvey – Boundary structure of the modular group, in *Riemann surfaces and related topics : Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1978)*, pages 245–251. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1981.
- [35] A. Hilion & C. Horbez – The hyperbolicity of the sphere complex via surgery paths, *arXiv.org* : 1210.6183, octobre 2012.
- [36] R. C. Lyndon & P. E. Schupp – *Combinatorial group theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [37] R. C. Lyndon & P. E. Schupp – *Combinatorial group theory*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [38] H. A. Masur & Y. N. Minsky – Geometry of the complex of curves. I. Hyperbolicity, *Invent. Math.* 138 (1999), 103–149.
- [39] A. Minasyan & D. V. Osin – Acylindrical hyperbolicity of groups acting on trees, *arXiv.org* : 1310.6289, octobre 2013.
- [40] P. S. Novikov & S. I. Adian – Infinite periodic groups, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 32 (1968), 709–731.

- [41] A. Y. Ol’shanskiĭ – The Novikov-Adyan theorem, *Mat. Sb. (N.S.)* 118 (160) (1982), 203–235, 287.
- [42] A. Y. Ol’shanskiĭ – Almost every group is hyperbolic, *Internat. J. Algebra Comput.* 2 (1992), 1–17.
- [43] D. V. Osin – Small cancellations over relatively hyperbolic groups and embedding theorems, *Ann. of Math, second series* 172 (2010), 1–39.
- [44] D. V. Osin – Acylindrically hyperbolic groups, *arXiv.org* : 1304.1246, avril 2013.
- [45] E. Rips – Subgroups of small cancellation groups, *Bull. London Math. Soc.* 14 (1982), 45–47.
- [46] Z. Sela – Acylindrical accessibility for groups, *Invent. Math.* 129 ((1997), 527–565.
- [47] A. Sisto – Contracting elements and random walks, *arXiv.org* : 1112.2666, décembre 2011.
- [48] V. A. Tartakovskiĭv – Solution of the word problem for groups with a k -reduced basis for $k > 6$, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 13 (1949), 483–494.
- [49] W. P. Thurston – On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces, *Bull. Amer. Math. Soc. New Series* 19 (1988), 417–431.

Rémi COULON

IRMAR

Campus de Beaulieu, bâtiments 22 et 23
263 avenue du Général Leclerc, CS 74205
35042 RENNES Cédex, France

E-mail : remi.coulon@univ-rennes1.fr