Séminaire BOURBAKI Janvier 2015
67ème année, 2014-2015, n$^{\text{o}}$ 1096

ZÉRO-CYCLES ET POINTS RATIONNELS SUR LES FIBRATIONS EN VARIÉTÉS RATIONNELLEMENT CONNEXES [d'après Harpaz et Wittenberg]

par **David HARARI**

INTRODUCTION

Soit k un corps de nombres, c'est-à-dire une extension finie du corps $\mathbf{Q}$. Soit X une variété algébrique sur k, définie par exemple dans l'espace affine $\mathbf{A}_k^n$ par un système d'équations polynomiales à coefficients dans k :

(1) $$P_i(x_1, ..., x_n) = 0, \quad 1 \leq i \leq r$$

ou encore dans l'espace projectif $\mathbf{P}_k^n$ par un système d'équations polynomiales homogènes

(2) $$P_i(x_0, ..., x_n) = 0, \quad 1 \leq i \leq r.$$

C'est un problème très ancien de déterminer si l'ensemble $X(k)$ des points rationnels de X est non vide, autrement dit de savoir si le système (1) possède une solution (resp. le système (2) possède une solution non triviale) à coefficients dans k. La question est a priori très difficile, et il n'est pas impossible qu'elle soit indécidable en général (c'est le cas de la question analogue pour les points entiers, d'après les travaux de Davis, Putnam, Robinson et Matiasevic dans les années soixante, cf. [Azr]).

Il est néanmoins possible de dégager des conditions nécessaires pour avoir $X(k) \neq \emptyset$. Considérons les diverses complétions k_v de k, où v décrit l'ensemble Ω des *places* (:= classes d'équivalence de valeurs absolues non triviales) du corps k. Par exemple si $k = \mathbf{Q}$, ces complétés sont les corps p-adiques $\mathbf{Q}_p$ pour p premier et le complété archimédien $\mathbf{R}$. Une condition nécessaire évidente pour avoir $X(k) \neq \emptyset$ est d'avoir $X(k_v) \neq \emptyset$ pour toute place v. Or ces conditions sur les différents k_v (dites *locales*) sont nettement plus faciles à vérifier via le lemme de Hensel (analogue p-adique de la méthode de Newton, cf. [Se70], chapitre II, théorème 1), en particulier quand la variété X est supposée lisse (pour une variété X définie par un système d'équations polynomiales comme ci-dessus, la condition de lissité correspond au fait que la matrice jacobienne associée aux polynômes P_i est partout de rang maximal), hypothèse que nous ferons toujours dans la suite. Lorsque ces conditions locales sont suffisantes pour que $X(k) \neq \emptyset$, on dit que le *principe de Hasse* est vérifié. C'est par exemple le cas si la variété X est une quadrique projective, i.e. si elle est définie par une seule équation polynomiale homogène de degré 2 : c'est le célèbre théorème de Hasse-Minkowski (1924), cf. [Se70], chapitre IV, théorème 8. D'autres exemples dus à Hasse sont certaines équations normiques : soit k' une extension finie de k, notons $N_{k'/k} : k'^* \to k^*$ l'application norme. Considérons la variété affine X définie par

$$N_{k'/k}(x_1\omega_1 + ... + x_r\omega_r) = a \tag{3}$$

où $a \in k^*$ est une constante, les $x_1, ..., x_r$ sont les variables, et $(\omega_1, ..., \omega_r)$ est une base fixée de k' sur k. Alors le principe de Hasse vaut quand k' est une extension galoisienne de k de groupe de Galois *cyclique*. Notons que dans les deux situations précédentes, si on a $X(k) \neq \emptyset$, la propriété d'*approximation faible* vaut aussi, c'est-à-dire que $X(k)$ est dense dans le produit des $X(k_v)$ pour la topologie produit des topologies v-adiques.

Malheureusement, le principe de Hasse (de même que l'approximation faible) est souvent en défaut. Cela avait déjà été observé par Hasse pour certaines équations normiques lorsque l'extension k'/k n'est plus cyclique, mais biquadratique (ex. $k = \mathbf{Q}$, $k' = \mathbf{Q}(\sqrt{13}, \sqrt{17})$, $a = -1$). Des contre-exemples existent aussi pour les surfaces rationnelles telles que les surfaces cubiques dans $\mathbf{P}^3_k$ ([Swd62]), ou encore les intersections de deux quadriques projectives ([Isk]).

Pour expliquer ces divers contre-exemples, Manin [Man] a défini en 1970 une obstruction cohomologique au principe de Hasse, utilisant le *groupe de Brauer* $\mathrm{Br}\, X$ de la variété X ; une version similaire de cette obstruction pour l'approximation faible fut ensuite définie par Colliot-Thélène et Sansuc. Colliot-Thélène a conjecturé que cette obstruction, dite de *Brauer-Manin*, était la seule (aussi bien pour le principe de Hasse que pour l'approximation faible) pour les variétés projectives, lisses, qui sont géométriquement *rationnellement connexes* ; cette dernière condition signifie que pour tout corps algébriquement clos L contenant k, deux points quelconques de $X_L := X \times_k L$ peuvent être reliés par une courbe rationnelle tracée sur X_L (pour plus de détails, on pourra consulter [Wi10]). Dans la suite, on abrégera « géométriquement rationnellement connexe » en « rationnellement connexe ». Toute variété lisse unirationnelle sur une clôture algébrique $\bar{k}$ de k (par exemple une hypersurface cubique, ou encore un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe) est rationnellement connexe.

Si on ne fait pas cette hypothèse de connexité rationnelle, on connaît maintenant de nombreux exemples où l'obstruction de Brauer-Manin ne suffit pas à expliquer le défaut de principe de Hasse (ni d'approximation faible), le premier ayant été donné en 1997 par Skorobogatov [Sko]. Bien qu'on soit loin de savoir démontrer la conjecture de Colliot-Thélène en général, certains cas particuliers importants sont connus comme les surfaces de Châtelet (Colliot-Thélène/Sansuc/Swinnerton-Dyer, 1987 [CSS]) ou encore les compactifications d'espaces homogènes de groupes linéaires à stabilisateurs connexes (Borovoi, 1996 [Bor]).

Il se trouve qu'il est souvent possible d'obtenir davantage de résultats si on accepte d'étendre un peu la notion de point rationnel en la remplaçant par celle de zéro-cycle de degré 1. Soit X une k-variété projective et lisse. Un *zéro-cycle* z sur X est une combinaison linéaire formelle $z = \sum_{P \in X_{(0)}} n_P P$, où P décrit l'ensemble $X_{(0)}$ des points fermés de X et (n_P) est une famille presque nulle d'entiers. Ici, *point fermé* est à prendre au sens de la géométrie algébrique. Si on préfère, un point fermé P est un point de X défini sur une extension finie $k(P)$ de k, la plus petite de ces extensions étant appelée le corps résiduel de P ; par exemple pour $X = \mathbf{P}^1_k$, les points fermés correspondent au point à l'infini (dont le corps résiduel est k) et aux polynômes irréductibles P de $k[t]$, le corps résiduel étant alors $k[t]/P$. Un point rationnel n'est pas autre chose qu'un point fermé de corps résiduel k. Le *degré* d'un zéro-cycle $z = \sum_P n_P P$ est l'entier $\deg z := \sum_P n_P [k(P) : k]$. Ainsi, X possède un zéro-cycle de degré 1 si et seulement si elle possède des points dans des extensions finies de k de degrés premiers entre eux dans leur ensemble. On peut alors définir une obstruction de Brauer-Manin à l'existence d'un zéro-cycle de degré 1 ; l'obstruction à l'approximation faible admet aussi un pendant pour les zéro-cycles, la *conjecture (E)*, qui possède d'ailleurs plusieurs variantes (nous donnerons dans la section 1 les définitions précises de l'obstruction de Brauer-Manin et de la conjecture (E)).

Les travaux d'Harpaz/Wittenberg [HW] dont nous allons parler dans cet exposé sont relatifs à la *méthode des fibrations*, qui est un outil puissant pour attaquer les conjectures ci-dessus. L'idée (qui remonte à la preuve par Hasse du théorème de Hasse-Minkowski, pour passer du cas relativement élémentaire de trois variables au cas de quatre variables, qui est le plus difficile) consiste à considérer des variétés fibrées $X \to \mathbf{P}^1_k$ au-dessus de la droite projective (ou, dans certains cas, au-dessus d'une courbe de genre quelconque ou encore de l'espace projectif $\mathbf{P}^n_k$) et d'essayer de montrer que la validité de la conjecture (dans sa version point rationnels ou zéro-cycles) pour « beaucoup de fibres » implique la conjecture pour X elle-même, pourvu que ces fibres vérifient des hypothèses géométriques raisonnables (typiquement : la connexité rationnelle). De nombreux progrès ont été faits depuis trente ans avec cette méthode, via (entre autres) des travaux de Colliot-Thélène/Sansuc/Swinnerton-Dyer [CSS], Salberger [Sal], Harari [Ha94], Colliot-Thélène/Skorobogatov/Swinnerton-Dyer [CSkS], Frossard [Fro], van Hamel [vH], Wittenberg [Wi12], Liang [Lia], Browning/Matthiesen/Skorobogatov [BMS], et Harpaz/Skorobogatov/Wittenberg [HSW]. Toutefois, dans tous ces travaux il était nécessaire de mettre des hypothèses géométriques restrictives sur les mauvaises (=non géométriquement intègres) fibres, en l'occurrence une condition d'abélianité des extensions finies de k apparaissant dans le corps des fonctions des fibres. La plupart des énoncés obtenus supposaient aussi la validité du principe de Hasse dans les fibres (ou au moins la trivialité de leur groupe de Brauer), ou sinon des hypothèses encore plus fortes sur les mauvaises fibres (au maximum une fibre non géométriquement intègre au-dessus de $\mathbf{P}^1_k$). Ces restrictions avaient bien entendu pour effet de limiter le nombre d'exemples pouvant être traités par cette méthode : en effet d'une part construire des fibrations possédant des mauvaises fibres suffisamment sympathiques n'est pas toujours chose aisée, d'autre part peu de classes de variétés vérifient le principe de Hasse ; au contraire les variétés vérifiant les conjectures relatives à l'obstruction de Brauer-Manin sont légion.

La nouveauté essentielle de l'article de Harpaz-Wittenberg réside dans le fait que du côté des zéro-cycles (conjecture (E)), les deux hypothèses déplaisantes sus-mentionnées sont complètement supprimées : en gros, le théorème principal est que pour une fibration $X \to \mathbf{P}^1_k$ en variétés rationnellement connexes, la conjecture (E) pour beaucoup (au sens des ensembles hilbertiens) de fibres implique la conjecture (E) pour X. Des variantes de cet énoncé sont également formulées au-dessus d'une courbe de genre quelconque, ou encore d'une variété k-rationnelle (c'est-à-dire dont le corps des fonctions est isomorphe à $k(t_1, ..., t_n)$).

Pour illustrer la puissance de ce théorème, il est intéressant de considérer l'exemple classique des hypersurfaces affines V définies par l'équation

$$N_{k'/k}(x_1\omega_1 + ... + x_r\omega_r) = P(t), \tag{4}$$

où $P(t)$ est un polynôme non nul et le terme de gauche est défini comme dans l'équation (3). Soit X un modèle (i.e. une variété admettant le même corps des fonctions) projectif et lisse de V (un tel modèle existe toujours d'après le théorème de résolutions des singularités d'Hironaka). Avant les travaux d'Harpaz/Wittenberg, la conjecture (E) pour X n'était connue que dans des cas très particuliers (k'/k cyclique, de degré premier ou produit de deux nombres premiers distincts, ou encore sous des restrictions importantes sur le polynôme $P(t)$). Elle découle maintenant immédiatement de leur théorème principal, sans aucune hypothèse sur k' ni $P(t)$. On peut même remplacer l'extension «constante» k' de k par une extension finie arbitraire de $k(t)$. Le point est qu'on peut regarder la variété V comme fibrée via le paramètre t, d'où l'existence d'un modèle projectif et lisse X de V équipé d'un morphisme $X \to \mathbf{P}^1_k$, dont la fibre générique est birationnelle à un espace principal homogène d'un tore algébrique ; elle est en particulier rationnellement connexe, et même rationnelle sur $\bar{k}$. De plus ce type de variétés sur un corps de nombres satisfait la conjecture (E) via les travaux de Borovoi [Bor] et Liang [Lia], ce qui permet d'appliquer le théorème principal.

Concernant les points rationnels, les méthodes d'Harpaz-Wittenberg permettent aussi de démontrer la conjecture de Colliot-Thélène pour des variétés fibrées $X \to \mathbf{P}^1_k$, à condition d'avoir $k = \mathbf{Q}$ et que les mauvaises fibres soient toutes au-dessus de $\mathbf{Q}$-points de $\mathbf{P}^1_k$. Par exemple, ceci s'applique à l'équation (4) pour $k = \mathbf{Q}$ si le polynôme $P(t)$ est produit de facteurs linéaires (cas qui avait été traité récemment par Browning et Matthiesen [BM]). Ces hypothèses restrictives sur le corps de base et sur les mauvaises fibres viennent de ce qu'il est nécessaire d'utiliser des méthodes de combinatoire additive à la Green-Tao-Ziegler, et en particulier un théorème récent de Matthiesen [Mat] pour traiter le cas des points rationnels, comme il était déjà apparu dans l'article [BMS], qui fut le premier à mettre en lumière l'utilité de ces méthodes pour les questions liées au principe de Hasse. Dans l'état actuel des connaissances en théorie additive des nombres, il semble difficile de faire mieux. Néanmoins, Harpaz et Wittenberg proposent aussi une version conjecturale de leur théorème sur les points rationnels, qui permettrait de traiter le cas général. Leur énoncé conditionnel repose sur une variante de l'«hypothèse de Schinzel» qui semble peut-être un peu moins hors d'atteinte que ladite hypothèse.

Le plan de cet article est le suivant. Dans la section 1, nous donnons les définitions précises des conjectures mentionnées ci-dessus et énonçons en détails les résultats principaux de Harpaz/Wittenberg. La section 2 est consacrée à la preuve du théorème principal sur les zéro-cycles, que nous avons décomposée en cinq grandes étapes. Enfin, dans la section 3, on explique les idées de la preuve du théorème principal sur les points rationnels.

1. OBSTRUCTION DE BRAUER-MANIN ET CONJECTURE (E) SUR LES ZÉRO-CYCLES

1.1. Groupe de Brauer, obstructions au principe de Hasse et à l'approximation faible

Nous rappelons dans ce paragraphe les obstructions à l'existence d'un point rationnel et à l'approximation faible fournies par le groupe de Brauer. On pourra aussi consulter l'exposé Bourbaki d'E. Peyre [Pey] sur le sujet.

Soit k un corps de nombres et soit X une variété algébrique (i.e. un schéma séparé et de type fini) sur k, que nous supposerons toujours pour simplifier propre (par exemple projective), lisse, et géométriquement intègre. Le *groupe de Brauer* $\operatorname{Br} X$ de X (appelé groupe de Brauer cohomologique dans les textes de référence [Gro2], [Gro3]) est le deuxième groupe de cohomologie étale $H^2(X, \mathbf{G}_m)$. Cette notion étend celle, classique, de groupe de Brauer $\operatorname{Br} K$ d'un corps K, groupe qui peut être défini en termes d'algèbres simples centrales ou par le biais de la cohomologie galoisienne de K ([Se], chapitre X). En particulier $\operatorname{Br} X$ est un sous-groupe du groupe de Brauer $\operatorname{Br}(k(X))$ du corps des fonctions de X, et c'est un groupe de torsion. C'est un invariant birationnel très utile, bien que parfois difficile à calculer. Quand X est rationnellement connexe, le quotient $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k$ est un groupe fini, dont le groupe de cohomologie galoisienne $H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{X})$ est un sous-groupe d'indice fini. Par exemple $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k$ est nul si X est k-rationnelle, mais peut déjà être non trivial pour des surfaces rationnelles telles que les surfaces cubiques ou les surfaces fibrées en coniques au-dessus de $\mathbf{P}^1_k$. Enfin, on définit de manière similaire le groupe de Brauer d'un schéma quelconque Z, qui pour un schéma intègre et régulier se plonge dans le groupe de Brauer de son corps des fonctions. Par exemple le groupe de Brauer de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_v$ d'un complété k_v de k en une place finie est nul via [Mil] Cor. IV.2.13 et [Se], chapitre X, §7, exemple a).

Le calcul du groupe de Brauer d'un corps de nombres k est un des résultats essentiels de la théorie du corps de classes. Pour tout complété k_v, on dispose d'un invariant local injectif $\operatorname{inv}_v : \operatorname{Br} k_v \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, qui est un isomorphisme si v est finie, l'inclusion de $\mathbf{Z}/2$ dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ si v est réelle, et l'application nulle si v est complexe. On a alors une suite exacte (Brauer-Hasse-Noether, cf. [NSW], VIII, Th. 8.1.17)

$$0 \to \operatorname{Br} k \to \bigoplus_{v\in\Omega} \operatorname{Br} k_v \stackrel{\sum \operatorname{inv}_v}{\to} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0.$$

Il en résulte que si une famille de points locaux $(P_v) \in \prod_{v\in\Omega} X(k_v)$ provient d'un point rationnel, on doit avoir

$$\sum_{v\in\Omega} \operatorname{inv}_v(\alpha(P_v)) = 0 \tag{5}$$

pour tout élément $\alpha \in \operatorname{Br} X$; ici l'évaluation $\alpha(P_v)$ est dans $\operatorname{Br} k_v$, et la somme est finie a priori grâce à l'hypothèse que X est propre, par un argument de bonne réduction et le fait que $\operatorname{Br} \mathcal{O}_v = 0$. Notons aussi que cette somme ne dépend que de la classe de α dans $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k$.

On en déduit (par continuité des évaluations locales, cf. [BD], lemme 6.2) qu'une famille $(P_v) \in \prod_{v\in\Omega} X(k_v)$ de points locaux, pour laquelle il existe $\alpha \in \operatorname{Br} X$ tel que l'égalité (5) ne soit pas vérifiée, ne peut pas être dans l'adhérence de $X(k)$: c'est l'*obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible*. Si un tel α existe pour toute famille (P_v), il ne peut même pas y avoir de point rationnel : c'est l'*obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse*. On dit que *l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule* si l'ensemble $X(k)$ des points rationnels est dense dans l'ensemble $X(\mathbf{A}_k)^{\operatorname{Br}}$ constitué des familles $(P_v) \in \prod_{v\in\Omega} X(k_v)$ qui vérifient (5) pour tout $\alpha \in \operatorname{Br} X$.

Exemples. a) Soit X une compactification lisse d'un groupe algébrique linéaire connexe G. Alors, l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible est la seule pour X (resp. l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse est la seule pour une compactification lisse d'un espace principal homogène de G), résultat dû à Sansuc [San]. Ceci a été généralisé par Borovoi [Bor] aux quotients G/H avec G linéaire connexe et H sous-groupe algébrique connexe de G (resp. aux espaces homogènes de G à stabilisateurs connexes).

b) Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer [CSS] ont démontré que l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible était la seule pour les surfaces de Châtelet, qui sont par définition les modèles projectifs lisses des surfaces affines d'équation $y^2 - ax^2 = P(t)$ avec $a \in k^*$ et P polynôme de degré 4. Ils ont également obtenu de nombreux résultats dans ce sens pour les intersections de deux quadriques.

Colliot-Thélène a proposé la conjecture suivante (qu'il avait déjà formulée auparavant avec Sansuc pour les surfaces rationnelles) :

Conjecture 1.1. — *Soit X une k-variété propre, lisse, rationnellement connexe. Alors l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule pour X. Autrement dit, $X(k)$ est dense dans $X(\mathbf{A}_k)^{\operatorname{Br}}$.*

Le cas des surfaces cubiques est par exemple encore ouvert. Comme on va le voir dans le prochain paragraphe, il existe des versions de cette conjecture pour les zéro-cycles, qui permettent d'obtenir davantage de résultats.

1.2. La conjecture (E) sur les zéro-cycles

Soit X une variété propre et lisse sur un corps de nombres k. Notons Ω_f l'ensemble des places finies de k et Ω_∞ l'ensemble de ses places archimédiennes. On dispose du groupe de Chow $CH_0(X)$, quotient du groupe des zéro-cycles $Z_0(X)$ par l'équivalence rationnelle. Par exemple si X est une courbe, le groupe $CH_0(X)$ est simplement le groupe de Picard $\operatorname{Pic} X$ des diviseurs modulo équivalence linéaire. Pour toute place v de k, posons $X_v := X \times_k k_v$; on peut alors considérer le groupe $CH_0(X_v)$, et pour v archimédienne le quotient $CH'_0(X_v) = CH_0(X_v)/N_{\bar{k}_v/k_v}(CH_0(X \times_k \bar{k}_v))$ de $CH_0(X_v)$ par les normes. Posons

$$CH_{0,\mathbf{A}}(X) = \prod_{v \in \Omega_f} CH_0(X_v) \times \prod_{v \in \Omega_\infty} CH'_0(X_v).$$

On dispose des accouplements locaux

$$\langle , \rangle_v : \operatorname{Br} X_v \times CH_0(X_v) \to \operatorname{Br} k_v \hookrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

(dans lesquels on peut remplacer $CH_0(X_v)$ par $CH'_0(X_v)$ pour $v \in \Omega_\infty$), caractérisés par la propriété que si P est un point fermé de X_v et $\alpha \in \operatorname{Br} X_v$, alors $\langle \alpha, P \rangle_v$ est l'invariant local de $\alpha(P) \in \operatorname{Br}(k_v(P))$ (en effet la corestriction $\operatorname{Br}(k_v(P)) \to \operatorname{Br} k_v$ induit l'identité sur $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ après passage aux invariants locaux, comme il résulte de [Se], chapitre VII, Prop. 6 et chapitre XIII, Prop. 7). On en déduit un *accouplement de Brauer-Manin*

$$\operatorname{Br} X \times CH_{0,\mathbf{A}}(X) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}, \quad (\alpha, (z_v)) \mapsto \sum_{v \in \Omega} \langle \alpha, z_v \rangle_v, \tag{6}$$

d'où une flèche $BM^* : CH_{0,\mathbf{A}}(X) \to \operatorname{Hom}(\operatorname{Br} X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ qui s'étend à $CH_{0,\mathbf{A}}(X)^\wedge$. Ici $M^\wedge := \varprojlim_{n \geq 1} M/nM$ désigne la «complétion» d'un groupe abélien M.

La loi de réciprocité du corps de classes global et la continuité des accouplements locaux donnent alors le résultat suivant, qui étend aux zéro-cycles globaux la formule (5), satisfaite par les points rationnels et leur adhérence dans $\prod_{v \in \Omega} X(k_v)$:

Proposition 1.2. — *On a un complexe de groupes abéliens*

$$CH_0(X)^\wedge \to CH_{0,\mathbf{A}}(X)^\wedge \xrightarrow{BM^*} \operatorname{Hom}(\operatorname{Br} X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}). \tag{7}$$

L'analogue de la conjecture 1.1 peut alors (suivant van Hamel [vH], d'après des conjectures faites initialement par Colliot-Thélène, Sansuc, Kato, et Saito) être formulé comme suit :

Conjecture 1.3 (Conjecture (E)). — *Le complexe (7) est exact pour toute variété propre, lisse, géométriquement intègre sur un corps de nombres k.*

Remarque 1.4. — • Pour v archimédienne, l'évaluation $\langle \alpha, z_v \rangle_v$ ne dépend que de la classe de z_v modulo les normes, d'où le remplacement de $CH_0(X_v)$ par $CH'_0(X_v)$.

• L'introduction des complétions pour les deux premiers termes du complexe (7) correspond au fait qu'un bon analogue pour les zéro-cycles de l'approximation faible consiste à pouvoir trouver, pour une famille (z_v) de zéro-cycles locaux et un entier $n > 0$ donnés, un zéro-cycle global dont la classe coïncide avec celle de (z_v) dans les $CH_0(X_v)$ à un terme divisible par n près.

• Une version plus faible de la conjecture (E) est la conjecture (E_1), qui prédit que s'il existe une famille de zéro-cycles locaux de degré 1 orthogonale à $\mathrm{Br}\, X$ pour l'accouplement de Brauer-Manin, alors il existe un zéro-cycle de degré 1 global sur X. La conjecture (E) implique (E_1) ([Wi12], Remarques 1.1 (iii)).

Voici quelques cas connus de la conjecture (E) :

-Une courbe propre et lisse de jacobienne J, telle que le groupe de Tate-Shafarevich de J est fini (ce qui est conjecturalement toujours le cas), vérifie la conjecture (E) : Saito [Sai], voir aussi [Wi12], Remarques 1.1 (iv).

-Une compactification lisse d'un espace homogène d'un groupe linéaire connexe à stabilisateurs connexes vérifie la conjecture (E), via les résultats de Borovoi [Bor] et Liang [Lia].

-Plus généralement, Liang (loc. cit.) a démontré que si X est une variété rationnellement connexe telle que $X_{k'} := X \times_k k'$ vérifie la conjecture 1.1 pour toute extension finie k' de k (ceci s'applique par exemple si X est une surface de Châtelet), alors X vérifie la conjecture (E). A ma connaissance, on ne dispose pas de résultats généraux pour l'implication inverse, ce qui tend à montrer que les zéro-cycles sont, en un certain sens, plus «maniables» que les points rationnels, comme il va d'ailleurs apparaître dans la suite de cet article.

1.3. Les résultats principaux de Harpaz/Wittenberg

La situation considérée par Harpaz et Wittenberg est celle d'une variété fibrée $f : X \to B$, où B est une variété k-rationnelle (ou encore le produit d'une courbe par une variété k-rationnelle), par exemple la droite projective. Voici leur résultat principal ([HW], Th. 1.3 et Th. 8.3), qui ramène essentiellement la conjecture (E) pour X à la même conjecture pour les fibres :

Théorème 1.5 (Harpaz/Wittenberg). — *Soit X une variété propre, lisse, et géométriquement intègre sur un corps de nombres k. On suppose que X est équipée d'un k-morphisme dominant $f : X \to C$, dont la fibre générique X_η est rationnellement connexe, où C est une courbe propre et lisse vérifiant la conjecture (E) (par exemple $C = \mathbf{P}^1_k$). Si les fibres lisses de f vérifient la conjecture (E), alors il en va de même de X.*

Soit $\overline{k(C)}$ la clôture algébrique du corps des fonctions $k(C)$ de la courbe C. Soit $X_{\bar{\eta}}$ la fibre générique géométrique de f, c'est une variété sur le corps $\overline{k(C)}$. Soit L une clôture algébrique du corps des fonctions de $X_{\bar{\eta}}$. Notons $A_0(X_L)$ le groupe de Chow des zéro-cycles de degré zéro sur $X_L := X_{\bar{\eta}} \times L$. Harpaz et Wittenberg démontrent en fait une version plus forte de l'énoncé ci-dessus, qui le raffine sur les points suivants :

-On peut remplacer la courbe C par toute variété Y qui est k-birationnelle à un produit $\mathbf{P}^n_k \times C$, où C est une courbe dont le groupe de Tate-Shafarevich est fini ; en particulier la base de la fibration peut être n'importe quelle variété k-rationnelle. Il faut noter que les énoncés de fibration connus auparavant n'avaient pas cette souplesse, à cause des conditions géométriques restrictives qu'ils imposaient sur les mauvaises fibres.

-Il est suffisant de supposer qu'il existe un sous-ensemble hilbertien (par exemple un ouvert de Zariski non vide) de la base Y tel que les fibres au-dessus des points fermés de ce sous-ensemble vérifient (E).

-On peut supposer soit que les fibres vérifient la conjecture 1.1 au lieu de la conjecture (E), soit que la fibre générique géométrique $X_{\bar{\eta}}$ vérifie seulement les propriétés

$$A_0(X_L) = 0; \quad H^1(X_{\bar{\eta}}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = 0, \tag{8}$$

qui sont toujours vérifiées par les variétés rationnellement connexes.

Comme on l'a vu dans l'introduction, le fait de ne pas avoir besoin d'hypothèses supplémentaires sur les mauvaises fibres de f permet bien entendu d'obtenir de nouveaux cas de la conjecture (E) qui étaient jusqu'ici inaccessibles : équations normiques du type (4), fibrations en surfaces de Châtelet ou leurs analogues de dimension p introduits dans [VAV] (en particulier le théorème répond positivement à la question posée à la fin de la remarque 3.3. de [CT10], qui était a priori très difficile), fibrations en surfaces de del Pezzo de degré 6. On peut notamment dégager le corollaire suivant :

Corollaire 1.6 ([HW], Cor 8.5). — *Soient k un corps de nombres et X une k-variété propre, lisse, géométriquement intègre. Soit Y une k-variété intègre, birationnellement équivalente à $\mathbf{P}^n_k$, ou encore à un produit $C \times \mathbf{P}^n_k$ où C est une courbe vérifiant la conjecture (E). Suppposons que X est équipée d'un morphisme dominant $f : X \to Y$, dont la fibre générique est birationnellement équivalente à un espace homogène à stabilisateurs connexes d'un groupe algébrique linéaire connexe. Alors X vérifie la conjecture (E).*

Le deuxième résultat majeur d'Harpaz et Wittenberg concerne la conjecture 1.1 sur les points rationnels. Pour obtenir un théorème inconditionnel, il est ici nécessaire de faire des hypothèses plus restrictives sur le lieu des mauvaises fibres, ce qui donne l'énoncé suivant ([HW], Th. 1.5 et Th. 9.28) :

Théorème 1.7. — *Soit X une variété propre, lisse, géométriquement intègre sur le corps $\mathbf{Q}$. On suppose que X est équipée d'un $\mathbf{Q}$-morphisme dominant $f : X \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$, dont la fibre générique est rationnellement connexe. On suppose de plus que toutes les fibres non scindées de f sont au-dessus de points $\mathbf{Q}$-rationnels de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$. Alors, si les fibres* *lisses de f au-dessus des points $\mathbf{Q}$-rationnels de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$ vérifient la conjecture 1.1, il en va de même de X.*

Rappelons qu'une variété sur un corps k est *scindée* si elle contient un ouvert de Zariski géométriquement intègre (ou, si l'on préfère, si elle contient une composante irréductible de multiplicité 1 qui est géométriquement irréductible). Là encore, on peut ne supposer la conjecture 1.1 que pour les fibres au-dessus des $\mathbf{Q}$-points d'un sous-ensemble hilbertien de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$. Par exemple le théorème 1.7 donne une réponse positive à la conjecture 1.1 pour les équations (4) quand $k = \mathbf{Q}$ et le polynôme P est scindé. Il fournit également un pendant du Cor. 1.6 pour la conjecture 1.1, quand le but de f est $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$ et les fibres non scindées de f sont toutes au-dessus de $\mathbf{Q}$-points de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$.

Par ailleurs, Colliot-Thélène et Sansuc [CSa] ont remarqué il y a plus de trente ans que la validité de l'*hypothèse de Schinzel* (généralisation spéculative du théorème de la progression arithmétique de Dirichlet, voir par exemple l'hypothèse H_1 de [CSw]) permettait d'obtenir plus de résultats concernant le principe de Hasse et l'approximation faible, idée qu'on voit par exemple apparaître dans le cours au Collège de France de Serre 1991-1992, ainsi que dans les articles [CSw] et [CSkS]. Pour démontrer le théorème 1.7, Harpaz et Wittenberg passent par une version conditionnelle reposant sur une conjecture qui est une variante (peut-être un peu plus accessible) de l'hypothèse de Schinzel ; il se trouve que les progrès récents en théorie additive des nombres, notamment les résultats de Browning-Matthiesen [BM] et Matthiesen [Mat] (cf. [HW], Th. 9.14) permettent de démontrer un cas particulier de leur conjecture, suffisant pour le théorème 1.7.

2. PREUVE DU THÉORÈME PRINCIPAL SUR LES ZÉRO-CYCLES

2.1. Stratégie de la preuve

Gardons les notations du théorème 1.5. Soit $C^0 \subset C$ un ouvert de Zariski au-dessus duquel toutes les fibres de f sont lisses et géométriquement intègres. Soit $K = k(C)$ le corps des fonctions de C. Posons $X^0 = f^{-1}(C^0)$. Pour tout point fermé h de C, notons X_h la fibre de f en h ; on notera aussi pour simplifier $\mathrm{Br}\, X_h/\mathrm{Br}\, h$ le quotient de $\mathrm{Br}\, X_h$ par l'image de $\mathrm{Br}\,(k(h))$, où $k(h)$ est le corps résiduel de h, et de même $\mathrm{Br}\, X_\eta/\mathrm{Br}\, K$ pour le quotient de $\mathrm{Br}\, X_\eta$ par l'image de $\mathrm{Br}\, K$. Dans toute la suite, un *sous-ensemble hilbertien* H de C est un sous-ensemble de C tel qu'il existe un ouvert non vide U de C, un entier $n \geq 1$, et des U-schémas finis étales $W_1, ..., W_n$ tels que H soit l'ensemble des points de U au-dessus desquels la fibre de W_i est irréductible pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. On notera bien qu'ici (contrairement à certains usages), on ne se restreint pas aux points rationnels pour les éléments de H (certains auteurs, comme Liang [Lia], appellent sous-ensemble hilbertien généralisé ce que nous appelons ici sous-ensemble hilbertien).

On sera amené à travailler avec des k-variétés lisses V (comme X^0) qui ne sont pas forcément propres. Soient S un ensemble fini de places de k et $\mathcal{O}_S \subset k$ l'anneau des

S-entiers. On appellera dans ce texte *modèle* de V sur $\mathcal{O}_S$ un morphisme lisse et de type fini $\mathcal{V} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_S$ dont la fibre générique est V. On note $Z_{0,\mathbf{A}}(V)$ l'ensemble des *zéro-cycles adéliques* sur V, constitué des familles $(z_v) \in \prod_{v\in\Omega} Z_0(V \times_k k_v)$ telles que si $\mathcal{V} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_S$ est un modèle de X au-dessus de $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_S)$ (pour un certain S), alors l'adhérence de Zariski du support $\operatorname{Supp}(z_v)$ dans $\mathcal{V} \times_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_v$ est finie sur $\mathcal{O}_v$ pour presque toute place v de k ; cette condition ne dépend pas du modèle choisi, et correspond pour une famille de zéro-cycles à être «entière en dehors de S». Un zéro-cycle adélique sera dit effectif si tous les z_v le sont. On a un accouplement de Brauer-Manin pour les zéro-cycles adéliques

$$\operatorname{Br} V \times Z_{0,\mathbf{A}}(V) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \tag{9}$$

défini comme dans le cas où V est propre. Supposons de plus donné un morphisme f de V vers une courbe propre et lisse C. On notera alors $Z_0^{\text{eff,red}}(V)$ l'ensemble des zéro-cycles effectifs z sur V tels que le diviseur f_*z soit réduit (i.e. ait tous ses coefficients égaux à 0 ou 1). On pose aussi

$$Z_{0,\mathbf{A}}^{\text{eff,red}}(V) = Z_{0,\mathbf{A}}(V) \cap \prod_{v\in\Omega} Z_0^{\text{eff,red}}(V \times_k k_v).$$

Si de plus on se donne $y \in \operatorname{Pic} C$, on note $Z_0^{\text{eff,red},y}(V \times_k k_v)$ le sous-ensemble de $Z_0^{\text{eff,red}}(V \times_k k_v)$ constitué des z_v tels que $f_*z_v = y$ dans $\operatorname{Pic}(C \times_k k_v)$, et $Z_{0,\mathbf{A}}^{\text{eff,red},y}(V)$ l'image réciproque de y par $f_* : Z_{0,\mathbf{A}}^{\text{eff,red}}(V) \to \operatorname{Pic}_{\mathbf{A}}(C)$. Ici, par analogie avec la notation $CH_{0,\mathbf{A}}(X)$, on a posé

$$\operatorname{Pic}_{\mathbf{A}}(C) = \prod_{v\in\Omega_f} \operatorname{Pic}(C \times_k k_v) \times \prod_{v\in\Omega_\infty} \operatorname{Pic}(C \times_k k_v)/N_{\bar{k}_v/k_v}(\operatorname{Pic}(C \times_k \bar{k}_v)).$$

Autrement dit, la condition qu'une famille $(z_v) \in Z_{0,\mathbf{A}}^{\text{eff,red}}(V)$ est dans $Z_{0,\mathbf{A}}^{\text{eff,red},y}(V)$ signifie qu'en toute place finie v, on a $f_*z_v = y$ à équivalence rationnelle sur $C \times_k k_v$ près, et qu'en toute place infinie cette condition est réalisée modulo les normes. Insistons aussi sur le fait que dans le cas où $V = X^0 = f^{-1}(C^0)$ comme ci-dessus, c'est bien l'équivalence rationnelle sur la courbe propre C qui intervient, et pas celle sur l'ouvert C^0.

On peut grosso modo diviser la preuve du théorème 1.5 en cinq étapes, numérotées de a) à e), que nous décrivons ci-dessous.

Étape a). Quitte à restreindre C^0, on peut, grâce à l'hypothèse que la fibre générique X_η est rationnellement connexe (ce qui implique en particulier $\operatorname{Br} X_\eta/\operatorname{Br} K$ fini), trouver un sous-groupe fini B de $\operatorname{Br} X^0$ qui se surjecte sur $\operatorname{Br} X_\eta/\operatorname{Br} K$. On dispose alors (grâce au fait que le groupe de Picard géométrique de X_η est sans torsion et son groupe de Brauer géométrique fini) d'un théorème de spécialisation du groupe de Brauer (analogue à celui de [Ha97], Th. 2.3.1) qui assure qu'il existe un sous-ensemble hilbertien H de C, tel que pour tout point $h \in H$, la flèche de spécialisation $B \to \operatorname{Br} X_h/\operatorname{Br} h$ soit surjective.

Soit $y \in \operatorname{Pic} C$ de degré suffisamment grand (dépendant du genre de C et du nombre de mauvaises fibres). Soit S un sous-ensemble fini de Ω_f. Considérons $f : X^0 \to C$ (noter que X^0 n'est pas forcément propre mais C l'est). On va d'abord travailler, dans les étapes de b) à d), avec un zéro-cycle adélique $(z_v)_{v\in\Omega} \in Z_{0,\mathbf{A}}^{\mathrm{eff,red},y}(X^0)$ supposé orthogonal à $\operatorname{Br} X$ pour l'accouplement (9). Le but va être d'approximer (z_v) (pour $v \in S$) par un zéro-cycle adélique (z'_v) tel que tous les z'_v soient au-dessus d'un même point fermé $h \in C^0$, et le zéro-cycle adélique (z'_v) de X_h soit orthogonal à $\operatorname{Br} X_h$, ce qui permettra d'appliquer la conjecture (E) à X_h. On pourra en fait même imposer que (z'_v) est effectif en utilisant notamment le fait que toutes les fibres de f ont une composante de multiplicité 1 : ce dernier point vient de ce que la fibre générique admet un point sur le corps des fonctions $\bar{k}(C)$ de $C \times_k \bar{k}$, via le théorème de Graber-Harris-Starr [GHS]. La condition $f_*(z'_v) = h$ implique alors que chaque z'_v est juste un k_v-point de la fibre X_h.

Dans une dernière étape e), on verra enfin comment passer d'un élément de $CH_{0,\mathbf{A}}(X)^\wedge$ (orthogonal à $\operatorname{Br} X$) à un tel (z_v).

Étape b). On montre qu'on peut modifier (z_v) en un (z'_v), coïncidant avec z_v pour $v \in S$, qui vérifie maintenant la propriété plus forte d'être orthogonal à B (noter que les éléments de $\operatorname{Br} X_\eta$ peuvent très bien être ramifiés en certaines fibres, donc partir d'une famille (z_v) orthogonale à $\operatorname{Br} X$ ne permet pas a priori de savoir si elle est orthogonale à B).

Cette étape repose sur une variante relative (et adaptée aux zéro-cycles) du «lemme formel» ([Ha94], Cor. 2.6.1), dont l'ingrédient supplémentaire est un lemme de déplacement (combiné aux estimées de Lang-Weil et au lemme de Hensel) qui figurait déjà dans [Wi12] (lemme 4.2 et lemme 4.3). On peut donc se ramener au cas où (z_v) est orthogonal à B, ce que nous supposerons désormais. Noter que dans la conclusion de cette étape b), on peut remplacer B par tout sous-groupe fini B_1 de $\operatorname{Br} X^0$ contenant B, ce qui va s'avérer crucial dans l'étape c).

Avant de trouver une famille (z'_v) comme plus haut qui est de plus au-dessus d'un même point fermé de C (ce qui sera accompli dans l'étape d)), il va dans un premier temps s'agir dans l'étape c) de se ramener à des z'_v tels que $f_* z'_v = c$ pour un même zéro-cycle effectif global c de C.

Supposons dans la suite pour simplifier le corps k totalement imaginaire (s'il y a des places réelles, il faut s'arranger pour imposer une condition supplémentaire aux z_v en ces places, ce qui introduit quelques complications techniques). On peut aussi se ramener facilement au cas où X est projective (via le lemme de Chow et la résolution des singularités d'Hironaka), ce que nous supposerons désormais.

Étape c). On en vient maintenant à l'étape la plus difficile de la démonstration, qui est celle nécessitant le plus d'idées nouvelles. Pour toute k-variété quasi-projective V, notons $\operatorname{Sym}_{V/k}$ l'union disjointe des produits symétriques $\operatorname{Sym}^d_{V/k}$ pour $d \geq 1$ (l'hypothèse V quasi-projective assure que $\operatorname{Sym}_{V/k}$ est bien un schéma). Il s'agit de démontrer que si on se donne un voisinage $\mathcal{U}$ (au sens des topologies v-adiques, i.e.

dans $\prod_{v\in S} \mathrm{Sym}_{X^0/k}(k_v)$) de $(z_v)_{v\in S}$, alors on peut modifier (z_v) en un zéro-cycle adélique effectif (z'_v) sur X^0 vérifiant les trois propriétés suivantes :

-La famille $(z'_v)_{v\in\Omega}$ reste orthogonale à B pour (9).

-On a $(z'_v)_{v\in S} \in \mathcal{U}$, autrement dit z'_v est proche de z_v pour $v \in S$.

-Il existe un zéro-cycle effectif global c (dont la classe dans $\mathrm{Pic}\, C$ est y) tel que $f_*z'_v = c$ (dans $\mathrm{Div}\,(C^0 \times_k k_v)$) pour toute place v de k.

On dispose des données suivantes : la courbe C, l'ensemble fini $M := C - C^0$, et pour chaque $m \in M$ une extension finie galoisienne de corps $L_m/k(m)$; cette dernière est définie via les résidus des éléments de $B \subset \mathrm{Br}\, X^0$ le long des mauvaises fibres de f (celles qui sont au-dessus de M). Harpaz et Wittenberg définissent alors un sous-groupe $\mathrm{Br}_+(C)$ de $\mathrm{Br}\, C^0$, constitué des éléments dont le résidu $r_m \in H^1(k(m), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ s'annule par restriction à $H^1(L_m, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ pour tout $m \in M$. On voit facilement que le groupe $\mathrm{Br}_+(C)/\mathrm{Br}\, C$ est fini, ce qui permet, en en choisissant un système de représentants fini Λ et en obtenant la conclusion de l'étape b) pour $B_1 := B + \Lambda$, de se ramener au cas où la famille (z_v) est orthogonale à $B + f^*\mathrm{Br}_+(C)$ (noter que (z_v) est automatiquement orthogonale à $\mathrm{Br}\, C$ via la condition que $f_*z_v = y$ dans $\mathrm{Pic}\, C$). On dispose aussi d'un groupe $\mathrm{Pic}_+(C)$ qui raffine $\mathrm{Pic}\, C$, associé aux données ci-dessus. On détermine alors dans un premier temps la classe $\gamma \in \mathrm{Pic}_+(C)$ du diviseur c cherché, via un énoncé de type Poitou-Tate.

Si un tel diviseur c est proche des f_*z_v pour $v \in S$, on peut alors utiliser un argument de type fonctions implicites pour approximer $(z_v)_{v\in S}$ par une famille de zéro-cycles $(z'_v)_{v\in S}$ vérifiant $f_*(z'_v) = c$ dans $\mathrm{Div}\,(C^0 \times_k k_v)$. Ce qui paraissait jusque-là insurmontable, à part avec des conditions très restrictives sur les mauvaises fibres, était de compléter ensuite la famille $(z'_v)_{v\in S}$ en une famille $(z'_v)_{v\in\Omega}$ qui reste orthogonale à B, tout en vérifiant $f_*(z'_v) = c$ en toute place v. C'est précisément la condition supplémentaire que (z_v) est orthogonale à $f^*\mathrm{Br}_+(C)$, jointe à un astucieux lemme d'approximation forte dégagé par Harpaz et Wittenberg, qui permet de choisir le zéro-cycle c dans la classe $\gamma \in \mathrm{Pic}_+(C)$ fixée plus haut pour qu'une telle construction soit possible.

Étape d). On dispose d'un sous-ensemble hilbertien H de C donné par l'étape a). Il s'agit maintenant de remplacer le diviseur effectif c (donné par l'étape c)) par un point fermé h de H. Ceci est assuré par une variante du théorème d'irréductibilité de Hilbert. On en conclut alors que sur la fibre X_h, le zéro-cycle (z'_v) est bien orthogonal à $\mathrm{Br}\, X_h$ grâce au choix de B dans l'étape a), et il suffit d'appliquer la conjecture (E) à la fibre X_h pour conclure que la classe de (z'_v) dans $CH_{0,\mathbf{A}}(X_h)^\wedge$ est dans l'image de $CH_0(X_h)^\wedge$, et donc a fortiori que la classe de (z'_v) dans $CH_{0,\mathbf{A}}(X)^\wedge$ est dans l'image de $CH_0(X)^\wedge$.

Étape e). Pour terminer la preuve, il faut, partant d'un élément $\hat{z}_{\mathbf{A}}$ de $CH_{0,\mathbf{A}}(X)^\wedge$ orthogonal à $\mathrm{Br}\, X$ pour (6), produire une classe de diviseur $y \in \mathrm{Pic}\, C$ et un élément $z_{\mathbf{A}}^{\mathrm{eff}} = (z_v) \in Z_{0,\mathbf{A}}^{\mathrm{eff},\mathrm{red},y}(X^0)$ tels que :

-La différence $\hat{z} = \hat{z}_{\mathbf{A}} - z_{\mathbf{A}}^{\mathrm{eff}}$ soit «globale», i.e. dans $CH_0(X)^\wedge$, ce qui assure en particulier que $z_{\mathbf{A}}^{\mathrm{eff}}$ reste orthogonal à $\mathrm{Br}\, X$ pour (9).

-Toute famille $(z'_v) \in Z_{0,\mathbf{A}}^{\mathrm{eff,red},y}(X^0)$ suffisamment proche de (z_v) pour $v \in S$ (donc par exemple la famille (z'_v) obtenue à partir de $z_{\mathbf{A}}^{\mathrm{eff}} = (z_v)$ comme dans la conclusion de l'étape d)) possède la même classe que $z_{\mathbf{A}}^{\mathrm{eff}}$ dans $CH_{0,\mathbf{A}}(X)$.

C'est seulement dans cette dernière étape qu'on utilise l'hypothèse que la courbe C vérifie la conjecture (E), afin de trouver la classe $y \in \mathrm{Pic}\, C$. La construction de $z_{\mathbf{A}}^{\mathrm{eff}}$ (et notamment l'obtention de la deuxième propriété) utilise fortement les propriétés (8). Elle repose notamment sur le théorème 2.1. de [Wi12], dont la preuve combine un argument de décomposition de la diagonale avec des théorèmes de Kato-Saito et Saito-Sato sur le groupe de Chow des zéro-cycles.

Une fois obtenue la famille $(z_v)_{v\in\Omega}$ comme ci-dessus, on lui applique le résultat de l'étape d) pour obtenir une famille $(z'_v)_{v\in\Omega}$, proche de (z_v) pour $v \in S$, et dont la classe dans $CH_{0,\mathbf{A}}(X)$ coïncide donc avec la classe $\hat{z}_{\mathbf{A}}$ qu'on s'était donnée au départ. On termine en appliquant la conclusion de l'étape d) à (z'_v).

On va maintenant donner quelques détails sur chaque étape de la démonstration.

2.2. Étape a) : spécialisation du groupe de Brauer

Le résultat suivant remonte à [Ha97] (Th. 2.3.1, voir aussi [Ha94], §3 pour un énoncé un peu moins général) quand $C = \mathbf{P}^1_k$. Les mêmes arguments fonctionnent en fait pour toute courbe :

Proposition 2.1. — *Soit C une courbe lisse et irréductible de corps des fonctions K. Soit $f : X \to C$ un morphisme propre dont la fibre générique X_η est lisse et rationnellement connexe. Soient $C^0 \subset C$ un ouvert de Zariski non vide et $X^0 = f^{-1}(C^0)$. Soit $B \subset \mathrm{Br}\, X^0$ un sous-groupe qui se surjecte sur $\mathrm{Br}\, X_\eta / \mathrm{Br}\, K$ par restriction. Alors il existe un sous-ensemble hilbertien $H \subset C^0$ tel que pour tout $h \in H$, la spécialisation $B \to \mathrm{Br}\, X_h / \mathrm{Br}\, h$ soit surjective.*

Preuve (esquisse) — Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, posons $X_{\bar\eta} = X_\eta \times_K \overline{K}$. L'hypothèse que X_η est rationnellement connexe (qui implique $\mathrm{Br}\, X_{\bar\eta}$ fini et $\mathrm{Pic}\, X_{\bar\eta}$ sans torsion) permet, via la suite spectrale de Hochschild-Serre et la nullité du groupe de cohomologie galoisienne $H^3(K, \overline{K}^*)$, d'obtenir une suite exacte

$$0 \to H^1(K, \mathrm{Pic}\, X_{\bar\eta}) \to \mathrm{Br}\, X_\eta / \mathrm{Br}\, K \to H^0(K, \mathrm{Br}\, X_{\bar\eta}) \to H^2(K, \mathrm{Pic}\, X_{\bar\eta}).$$

On a une suite exacte analogue sur la fibre X_h :

$$0 \to H^1(k(h), \mathrm{Pic}\, \overline{X}_h) \to \mathrm{Br}\, X_h / \mathrm{Br}\, (k(h)) \to H^0(k(h), \mathrm{Br}\, \overline{X}_h) \to H^2(k(h), \mathrm{Pic}\, \overline{X}_h).$$

D'autre part on a des flèches de spécialisation $\mathrm{Pic}\, X_{\bar\eta} \to \mathrm{Pic}\, \overline{X}_h$ et $\mathrm{Br}\, X_{\bar\eta} \to \mathrm{Br}\, \overline{X}_h$ qui sont des isomorphismes via le fait que $H^i(X_\eta, \mathcal{O}_{X_\eta}) = 0$ pour $i = 1, 2$ (cela résulte notamment des résultats de Grothendieck sur le relèvement des faisceaux inversibles et du théorème de changement de base lisse en cohomologie étale, cf. [Ha97], §2).

L'ensemble hilbertien H est alors obtenu en choisissant un quotient fini $G = \mathrm{Gal}\,(K_1/K)$ de $\mathrm{Gal}\,(\overline{K}/K)$ qui agit trivialement sur $\mathrm{Pic}\, X_{\bar\eta}$ et $\mathrm{Br}\, X_{\bar\eta}$, et en considérant un revêtement galoisien $D \to C$ de groupe G. $\square$

Remarque 2.2. — Les hypothèses $\mathrm{Br}\, X_{\bar\eta}$ fini et $\mathrm{Pic}\, X_{\bar\eta}$ sans torsion sont suffisantes, on n'a pas besoin de supposer X_η rationnellement connexe. Par ailleurs, l'argument ci-dessus est celui de [Ha97], une preuve complète plus rapide est donnée dans [HW], §4.

Noter aussi que ces hypothèses impliquent que $\mathrm{Br}\, X_\eta/\mathrm{Br}\, K$ est fini, d'où on déduit facilement, si l'on suppose de plus que toutes les fibres ont une composante de multiplicité 1, que $\mathrm{Br}\, X/\mathrm{Br}\, k$ est fini ([Wi12], lemme 3.2).

2.3. Étape b) : le lemme formel relatif pour les zéro-cycles adéliques

Soit $f : X \to C$ comme dans le théorème 1.5, notons g le genre de C. Soit $C^0 \subset C$ un ouvert de Zariski non vide au-dessus duquel toutes les fibres de f sont lisses et géométriquement intègres. Soit $X^0 = f^{-1}(C^0)$. Soit $y \in \mathrm{Pic}\, C$ une classe de diviseur de degré $> 2g+1$. On a alors

PROPOSITION 2.3 ([HW], Prop. 3.1). — *Soit B_1 un sous-groupe fini de $\mathrm{Br}\, X^0$. Soit $(z_v)_{v\in\Omega}$ un zéro-cycle adélique dans $Z_{0,\mathbf{A}}^{\mathrm{eff,red},y}(X^0)$, supposé orthogonal à $B_1 \cap \mathrm{Br}\, X$ pour (9). Soit S un ensemble fini de places de k. Alors il existe un zéro-cycle adélique $(z'_v) \in Z_{0,\mathbf{A}}^{\mathrm{eff,red},y}(X^0)$ avec $z'_v = z_v$ pour $v \in S$, et tel que (z'_v) soit orthogonal à B_1.*

Ce résultat se déduit du lemme suivant, par un argument formel, analogue à celui de [Ha94], Cor. 2.6.1 :

LEMME 2.4. — *Soit $\beta \in \mathrm{Br}\, X^0$. Si $\beta \notin \mathrm{Br}\, X$, alors l'application d'évaluation $Z_0^{\mathrm{eff,red},y}(X^0 \times_k k_v) \to \mathrm{Br}\, k_v$, $z_v \mapsto \beta(z_v)$ est non nulle pour une infinité de places v de k.*

La preuve de ce lemme repose sur deux ingrédients : tout d'abord, l'hypothèse $\beta \notin \mathrm{Br}\, X$ implique (par [Ha94], Th. 2.1.1) que pour une infinité de places v, l'application d'évaluation $X^0(k_v) \to \mathrm{Br}\, k_v$, $a_v \mapsto \beta(a_v)$ est non constante. Pour passer ensuite au résultat analogue sur $Z_0^{\mathrm{eff,red},y}(X^0 \times_k k_v)$ au lieu des k_v-points de X^0, on utilise un lemme de déplacement similaire à [Wi12], lemme 4.3.

Remarque 2.5. — Noter que par rapport au lemme formel classique ([Ha94], Cor. 2.6.1), qui concerne une famille de k_v-points de X^0, on peut ici imposer en plus que tous les zéro-cycles z'_v aient pour image dans $\mathrm{Pic}\, C$ une même classe de diviseurs y (alors que cette condition n'a pas de bon analogue quand on travaille avec des points rationnels au lieu de zéro-cycles). On voit ici à quel point les zéro-cycles sont en un sens plus «maniables» que les points rationnels.

2.4. Étape c) : ramener un zéro-cycle adélique au-dessus d'un seul zéro-cycle effectif

On garde les notations du paragraphe précédent (en particulier $f : X \to C$ est comme dans le théorème 1.5), et on fixe un sous-groupe fini $B \subset \operatorname{Br} X^0$ (qu'on prendra par la suite comme dans la Prop. 2.1). On suppose aussi désormais que X est projective, ce qui assure que X^0 est une k-variété quasi-projective. On fixe une classe de zéro-cycles $y \in \operatorname{Pic} C$ de degré $\geq \deg M + 2g + 2$, où $M = C - C^0$ est le diviseur correspondant aux mauvaises fibres. Fixons un zéro-cycle adélique $(z_v)_{v\in\Omega}$ dans $Z_{0,\mathbf{A}}^{\mathrm{eff,red},y}(X^0)$, orthogonal à $\operatorname{Br} X$. Pour simplifier, supposons aussi le corps k totalement imaginaire. On a alors le théorème suivant, qui est le pas décisif dans la démonstration du théorème 1.5 :

Théorème 2.6 ([HW], Th. 5.1). — *Soit $S \subset \Omega_f$ un ensemble fini de places de k et soit $\mathcal{U}$ un voisinage de $(z_v)_{v\in S}$ dans $\prod_{v\in S} \operatorname{Sym}_{X^0/k}(k_v)$. Alors il existe un diviseur effectif $c \in \operatorname{Div} C^0$, dont la classe dans $\operatorname{Pic} C$ est y, et un zéro-cycle adélique effectif $(z'_v) \in Z_{0,\mathbf{A}}(X^0)$ tels que :*

(1) *Pour toute place v de k, on a $f_* z'_v = c$ dans $\operatorname{Div}(C^0 \times_k k_v)$.*

(2) *Le zéro-cycle adélique (z'_v) est orthogonal à B pour* (9).

(3) *La famille $(z'_v)_{v\in S}$ est dans $\mathcal{U}$.*

Ainsi, partant d'un zéro-cycle adélique $(z_v) \in Z_{0,\mathbf{A}}^{\mathrm{eff,red},y}(X^0)$ orthogonal à $\operatorname{Br} X$, on peut l'approcher pour $v \in S$ par un autre zéro-cycle adélique effectif (z'_v) qui est orthogonal à B *et tel que tous les z'_v soient au-dessus d'un même diviseur effectif c*. C'est l'obtention de cette dernière condition qui est la difficulté principale, et va nécessiter plusieurs arguments nouveaux, que nous allons maintenant un peu détailler.

Remarque 2.7. — Le résultat prouvé dans [HW] est en fait un peu plus général ; en particulier, il traite aussi le cas où les mauvaises fibres n'ont pas forcément de composante irréductible de multiplicité 1, mais seulement où le pgcd des multiplicités des composantes est 1 dans chaque fibre (on perd dans ce cas le fait que les z'_v sont effectifs pour v non dans S). Comme nous n'aurons besoin du théorème 2.6 que dans les conditions du théorème 1.5, nous pouvons supposer X_η rationnellement connexe, ce qui implique comme on l'a déjà vu (via [GHS]) que f admet une $\bar{k}$-section, et donc que toutes les fibres ont une composante irréductible de multiplicité 1. Par ailleurs, le Th. 5.1 de [HW] tient aussi compte des éventuelles places réelles, en rajoutant une condition (4) concernant ces places dans la conclusion du théorème 2.6.

Le groupe $\operatorname{Br}_+(C)$. On considère l'ensemble fini $M = C - C^0$ des points de C correspondant aux mauvaises fibres. Si $m \in M$ et $\beta \in \operatorname{Br} X^0$, on dispose pour toute composante irréductible Z de la fibre X_m du *résidu* $\partial_Z(\beta) \in H^1(k(Z), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, où $k(Z)$ est le corps des fonctions de Z. Le théorème de pureté dit précisément que $\beta \in \operatorname{Br} X$ si et seulement si tous ces résidus sont nuls, cf. [CT95], §3.3. et 3.4.

Pour chaque point $m \in M$, on peut choisir une composante $X_{m,1}$ de multiplicité 1 de X_m. On fixe alors une extension finie $E_{m,1}$ du corps des fonctions $k(X_{m,1})$ de $X_{m,1}$, telle que tous les éléments β de $B \subset \operatorname{Br} X^0$ aient leur résidu $\partial_{X_{m,1}}(\beta)$ dans le sous-groupe de $H^1(k(X_{m,1}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ constitué des éléments dont la restriction à $H^1(E_{m,1}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est nulle. Soit alors $L_{m,1}$ la fermeture algébrique de $k(m)$ dans $E_{m,1}$, on fixe une extension finie galoisienne L_m de $k(m)$ qui contient $L_{m,1}$.

On définit alors le sous-groupe $\operatorname{Br}_+(C) \subset \operatorname{Br} C^0$ constitué des éléments dont le résidu en tout $m \in M$ appartient au sous-groupe fini $H^1(\operatorname{Gal}(L_m/k(m)), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ de $H^1(k(m), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Le quotient $\operatorname{Br}_+(C)/\operatorname{Br} C$ est fini car par pureté, un élément de $\operatorname{Br} C^0$ est dans $\operatorname{Br} C$ dès lors que ses résidus aux points de M sont tous nuls. On en déduit :

Lemme 2.8. — *Sous les hypothèses du théorème 2.6, il existe un zéro-cycle adélique effectif $(z_v^1) \in Z_{0,\mathbf{A}}^{\mathrm{eff,red},y}(X^0)$, orthogonal à $B + f^*\operatorname{Br}_+(C)$ pour l'accouplement (9), et vérifiant $z_v^1 = z_v$ pour $v \in (S \cup \Omega_\infty)$.*

Ce lemme se montre en choisissant un sous-groupe fini $\Lambda \subset \operatorname{Br}_+(C)$ tel que $\operatorname{Br}_+(C) = \Lambda + \operatorname{Br}(C)$, et en appliquant la Prop. 2.3 à $B_1 := B + f^*\Lambda \subset \operatorname{Br} X^0$. En effet tout élément de $Z_{0,\mathbf{A}}^{\mathrm{eff,red},y}(X^0)$ est automatiquement orthogonal à $f^*\operatorname{Br} C$ par fonctorialité de l'accouplement (9), vu que la classe globale $y \in \operatorname{Pic} C$ est orthogonale à $\operatorname{Br} C$. Noter aussi que comme $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k$ est fini, on peut assurer (en choisissant S assez grand au départ) que (z_v^1) reste orthogonal à $\operatorname{Br} X$. On déduit alors du lemme que pour montrer le théorème 2.6, on peut supposer (ce que nous ferons désormais) que (z_v) est orthogonal à $B + f^*\operatorname{Br}_+(C)$.

La construction du diviseur c. On sait que $f_*z_v = y$ dans $\operatorname{Pic}(C \times_k k_v)$, mais cette information n'est pas assez précise pour construire le zéro-cycle c satisfaisant les propriétés voulues. Pour cette raison, Harpaz et Wittenberg introduisent, parallèlement au groupe $\operatorname{Br}_+(C)$ vu plus haut, un groupe $\operatorname{Pic}_+(C)$ (déjà considéré dans [Wi12]) qui est par définition le quotient de $\operatorname{Div} C^0$ par les diviseurs principaux $\operatorname{div} g$ qui ont de plus la propriété que pour tout $m \in M$, la fonction g est inversible en m et $g(m) \in k(m)^*$ est une norme de l'extension $L_m/k(m)$. Ils définissent de même un groupe adélique $\operatorname{Pic}_{+,\mathbf{A}}(C)$ comme un produit restreint (par rapport à des $\operatorname{Pic}_+(C \times \mathcal{O}_v)$ définis via un modèle entier de C) des $\operatorname{Pic}_+(C \times_k k_v)$ (quotienté par les normes aux places archimédiennes, comme dans la définition de $CH_{0,\mathbf{A}}(X)$). Alors, l'orthogonalité de (z_v) à $f^*\operatorname{Br}_+(C)$ implique que (f_*z_v) est orthogonal à $\operatorname{Br}_+ C$ pour l'accouplement

$$\operatorname{Br}_+(C) \times \operatorname{Pic}_{+,\mathbf{A}}(C) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

défini de manière similaire à celui de Brauer-Manin ([HW], § 2.2). Un théorème de dualité dû à Wittenberg ([Wi12], Cor. 5.7), proche du théorème de dualité de Poitou-Tate, implique alors qu'il existe un diviseur $c_1 \in \operatorname{Div} C^0$ (de classe y dans $\operatorname{Pic} C$), et dont la classe dans $\operatorname{Pic}_{+,\mathbf{A}}(C)$ coïncide avec $(f_*(z_v))_{v\in\Omega}$. On cherche alors c comme un diviseur dont la classe dans $\operatorname{Pic}_+(C)$ (et pas seulement dans $\operatorname{Pic} C$) est celle de c_1.

On commence par agrandir S pour y mettre toutes les places de mauvaise réduction de la situation. En particulier on suppose que f s'étend en un morphisme plat $\mathcal{X} \to \mathcal{C}$ d'$\mathcal{O}_S$-schémas propres et lisses. Pour tout $m \in M$, on note $\tilde{m}$ la clôture de Zariski de m

dans $\mathcal{C}$. Les points fermés de $\tilde{m}$ correspondent alors aux places finies de $k(m)$ qui ne sont pas au-dessus d'une place de S. De même, si c est un diviseur sur C, notons $\tilde{c}$ le diviseur horizontal correspondant sur $\mathcal{C}$. On a alors la proposition cruciale suivante :

PROPOSITION 2.9 ([HW], lemma 5.7). — *On peut trouver un diviseur effectif* $c \in \operatorname{Div} C^0$, *de classe* c_1 *dans* $\operatorname{Pic}_+(C)$, *arbitrairement proche des* $f_* z_v$ *pour* $v \in S$, *et vérifiant : pour tout* $m \in M$ *et tout point fermé* $w \in \tilde{m}$, *la condition* $w \in \operatorname{Supp} \tilde{c}$ *implique que la place* w *est totalement décomposée dans l'extension* $L_m/k(m)$.

Rappelons que si L/k est une extension finie de corps de nombres et v est une place de k, on dira que cette extension est *décomposée en* v si L possède une place de degré 1 au-dessus de v, et *totalement décomposée en* v si toutes les places de L au-dessus de v sont de degré 1. Les deux conditions sont équivalentes si l'extension L/k est galoisienne.

Il faut comprendre la condition $w \in \operatorname{Supp} \tilde{c}$ comme une propriété de mauvaise réduction du cycle c en la place v de k que divise w : cela signifie que certains points du support de c se réduisent comme un point $m \in M$, au-dessus duquel il y a des composantes de X_m le long desquelles les éléments de B peuvent avoir des résidus non triviaux, ce qui complique la construction des z'_v en ces places.

La proposition 2.9 s'obtient en deux temps : on a d'abord l'astucieux lemme suivant (reposant sur le fait qu'un ouvert de l'espace affine dont le complémentaire est de codimension au moins 2 vérifie l'approximation forte) :

LEMME 2.10 ([HW], lemma 5.2). — *Soit* L/k *une extension finie de corps de nombres. Soit* S *un ensemble fini de places de* k. *Soit* $t_v \in k_v^*$ *pour* $v \in S$, *tel que* t_v *soit une norme de* $(L \otimes_k k_v)^*$ *pour tout* $v \in S$. *Alors il existe* $t \in k^*$, *arbitrairement proche des* t_v *pour* $v \in S$, *et tel que pour toute place finie* $v \notin S$, *on ait :* $t \in \mathcal{O}_v^*$ *si* L *n'est pas décomposée en* v.

On applique alors ce lemme pour chaque $m \in M$ et $v \in S$ aux extensions $L_m/k(m)$ et aux $t_v = h_v(m)$, où h_v est une fonction rationnelle sur C telle que $\operatorname{div} h_v = f_* z_v - c_1$. Noter que c'est bien l'égalité des classes de c_1 et $f_* z_v$ dans $\operatorname{Pic}_+(C \times_k k_v)$ qui permet de trouver de tels h_v pour que les t_v vérifient les hypothèses du lemme 2.10. Le diviseur c s'obtient alors par approximation forte des h_v dans un espace affine (lequel est donné par un argument de type Riemann-Roch), en dehors d'une place $v_0 \notin S$ qu'on a choisie totalement décomposée en les L_m via le théorème de Cebotarev.

La construction des z'_v. Pour $v \in S$, on obtient les z'_v, vérifiant $f_* z'_v = c$ et proches des z_v (donc en particulier tels que $(z'_v)_{v \in S} \in \mathcal{U}$) via un argument classique de fonctions implicites. On peut en particulier (par un argument de continuité, cf. [Wi12], lemme 1.8) demander que pour tout $\beta \in B$, on ait $\beta(z'_v) = \beta(z_v)$ pour $v \in (S \cup \Omega_\infty)$ (rappelons qu'on a supposé que k n'avait pas de places réelles ; sinon on a besoin d'une condition supplémentaire sur c, fournie par le lemme 5.5. de [HW]). On peut aussi (en ayant bien choisi S au départ) supposer qu'on avait $\beta(z_v) = 0$ pour $v \notin S$ car (z_v) est un zéro-cycle adélique sur X^0. Il reste alors à construire des z'_v pour $v \notin (S \cup \Omega_\infty)$, vérifiant $f_* z'_v = c$

et $\beta(z'_v) = 0$: en effet, le fait que $(z_v)_{v\in\Omega}$ soit orthogonal à B donnera bien alors que $(z'_v)_{v\in\Omega}$ l'est aussi.

Soit $v \notin (S \cup \Omega_\infty)$. Si v est une place de «bonne réduction» (i.e. pour laquelle on n'a pas un couple (m, w) comme dans la Prop. 2.9 avec w divisant v), on utilise d'abord un argument de type Lang-Weil pour obtenir des points modulo v dans les fibres au-dessus de C^0 (qui sont géométriquement intègres), puis on applique le lemme de Hensel pour construire un zéro-cycle effectif z'_v vérifiant $f_* z'_v = c$. La condition $\beta(z'_v) = 0$ pour $\beta \in B$ est facile à réaliser en une telle place (en prenant S assez grand au départ), via la propriété $B \subset \operatorname{Br} X^0$.

Si maintenant v est une place de mauvaise réduction, les couples (m, w) qui lui sont associés comme dans la Prop. 2.9 correspondent à des extensions $k(m)/k$ qui sont décomposées en v. En particulier la composante $X_{m,1}$ (qui est de multiplicité 1, donc contient un ouvert dense géométriquement intègre sur la fermeture algébrique $k_{m,1}$ de $k(m)$ dans son corps des fonctions) possède des points modulo v grâce à la conclusion de la Prop. 2.9 et à Lang-Weil. En appliquant à nouveau le lemme de Hensel, cela permet de construire z'_v vérifiant $f_* z'_v = c$. La possibilité de choisir de plus z'_v tel que $\beta(z'_v) = 0$ s'obtient alors via la propriété que $L_m/k(m)$ est totalement décomposée en v, donnée encore par la Prop. 2.9 : on a en quelque sorte «neutralisé» la ramification des éléments de B le long des $X_{m,1}$, en imposant que les mauvaises places soient totalement décomposées pour $L_m/k(m)$. C'est cette idée qui est complètement nouvelle par rapport aux techniques connues précédemment, et qui permet en particulier de s'affranchir totalement d'hypothèses d'abélianité sur les extensions $L_{m,1}/k(m)$, tout en gardant la possibilité d'avoir un nombre arbitraire de mauvaises fibres (on a en effet aussi neutralisé l'extension $k_{m,1}/k(m)$ aux mauvaises places).

2.5. Étape d) : Du zéro-cycle effectif c à un point fermé

On garde $f : X \to C$ comme dans le théorème 1.5, ainsi que C^0 et $X^0 = f^{-1}(C^0)$ comme dans le paragraphe 2.3. Le groupe $\operatorname{Br} X_\eta / \operatorname{Br} K$ est fini vu que X_η est rationnellement connexe. Ainsi, quitte à restreindre C^0, on peut trouver un sous-groupe fini $B \subset \operatorname{Br} X^0$ comme dans la Prop. 2.1. Cette proposition fournit alors un sous-ensemble hilbertien H de C^0, tel que pour tout $h \in H$, la spécialisation $B \to \operatorname{Br} X_h / \operatorname{Br} h$ soit surjective. Soient $M = C - C^0$ et $y \in \operatorname{Pic} C$ de degré au moins $\deg M + 2g + 2$, fixons un zéro-cycle adélique $(z_v) \in Z_{0,\mathbf{A}}^{\mathrm{eff},\mathrm{red},y}(X^0)$ orthogonal à $\operatorname{Br} X$. On peut alors renforcer le théorème 2.6 en :

Théorème 2.11. — *La conclusion du théorème 2.6 vaut encore en imposant que le diviseur effectif $c \in \operatorname{Div} C^0$ soit un point fermé de C qui appartient à H.*

Ce résultat se déduit assez facilement du lemme suivant, variante d'un résultat observé par Swinnerton-Dyer (cf. [Sme], Prop. 6.1.) quand h est un point rationnel, et qui se démontre par un argument de type Cebotarev :

Lemme 2.12 ([HW], lemma 6.1). — *Soit V une k-variété normale et quasi-projective. Soit $H \subset V$ un sous-ensemble hilbertien. Soit $h \in H$. Soit S un ensemble fini de places de k. Alors il existe un ensemble fini T de places de k, disjoint de S, et un voisinage $\mathcal{V} \subset \prod_{v \in T} \mathrm{Sym}_{V/k}(k_v)$ de h, tel que tout zéro-cycle effectif de V qui est dans $\mathcal{V}$ est en fait un point fermé de V appartenant à H.*

La conclusion des étapes de a) à d) est donc : partant d'un zéro-cycle adélique $(z_v) \in Z_{0,\mathbf{A}}^{\mathrm{eff,red},y}(X^0)$ orthogonal à $\mathrm{Br}\, X$, on a approximé (z_v) aux places de S par un zéro-cycle adélique $(z'_v) \in Z_{0,\mathbf{A}}(X^0)$ vérifiant :

i) Il existe un point fermé $h \in H$ tel que $f_* z'_v = h$ pour toute place v de k.

ii) Le zéro-cycle adélique (z'_v) de X_h est orthogonal à $\mathrm{Br}\, X_h$.

Noter qu'on a même pu ici demander que (z'_v) soit effectif (avec l'hypothèse que X_η est rationnellement connexe), ce qui impose que (z'_v) est en fait un point adélique de la fibre X_h, laquelle est une variété sur le corps de nombres $k(h)$.

2.6. Étape e) : des groupes de Chow complétés aux zéro-cycles

Soit $f : X \to C$ comme dans le théorème 1.5. Partant d'un élément de $CH_{0,\mathbf{A}}(X)^\wedge$ orthogonal à $\mathrm{Br}\, X$ pour (6), il s'agit maintenant de se ramener à un zéro-cycle adélique $(z_v) \in Z_{0,\mathbf{A}}(X^0)$ comme ci-dessus, afin de pouvoir lui appliquer la conclusion de l'étape d), c'est-à-dire les propriétés i) et ii). Formellement, ceci se fait à l'aide de la proposition suivante :

Proposition 2.13. — *Soit $\hat{z}_\mathbf{A} \in CH_{0,\mathbf{A}}(X)^\wedge$, orthogonal à $\mathrm{Br}\, X$ pour l'accouplement (6). Alors il existe $\hat{z} \in CH_0(X)^\wedge$, un point fermé $h \in C$ (tel que la fibre X_h soit lisse et géométriquement intègre), et un point adélique $z'_\mathbf{A} \in X_h(\mathbf{A}_{k(h)})$ vérifiant : $\hat{z}_\mathbf{A} = z'_\mathbf{A} + \hat{z}$ dans $CH_{0,\mathbf{A}}(X)^\wedge$ et $z'_\mathbf{A}$ est orthogonal à $\mathrm{Br}\, X_h$ pour l'accouplement de Brauer-Manin sur X_h.*

La preuve montrera qu'on peut en plus imposer que h soit dans un sous-ensemble hilbertien de C^0 fixé au départ.

Preuve — On peut trouver (cf. début de l'étape d)) un ouvert non vide C^0 de C tel que si l'on pose $X^0 = f^{-1}(C^0)$, il existe un sous-groupe fini $B \subset \mathrm{Br}\, X^0$ et un sous-ensemble hilbertien H de C^0 comme dans la conclusion de la Prop. 2.1. Supposons de plus X projective. La Prop. 2.13 va alors découler de l'énoncé suivant :

Proposition 2.14 ([HW], Th. 7.1). — *Avec les hypothèses et notations ci-dessus, il existe : $y \in \mathrm{Pic}\, C$, $\hat{z} \in CH_0(X)^\wedge$, $z_\mathbf{A}^{\mathrm{eff}} = (z_v) \in Z_{0,\mathbf{A}}^{\mathrm{eff,red},y}(X^0)$, un ensemble fini $S \subset \Omega_f$, et un voisinage $\mathcal{U} \subset \prod_{v \in S} \mathrm{Sym}_{X^0/k}(k_v)$ de $(z_v)_{v \in S}$, vérifiant :*

- *$\hat{z}_\mathbf{A} = z_\mathbf{A}^{\mathrm{eff}} + \hat{z}$ dans $CH_{0,\mathbf{A}}(X)^\wedge$.*
- *Pour tout $z'_\mathbf{A} = (z'_v) \in Z_{0,\mathbf{A}}^{\mathrm{eff,red},y}(X^0)$, la condition $(z'_v)_{v \in S} \in \mathcal{U}$ implique $z_\mathbf{A}^{\mathrm{eff}} = z'_\mathbf{A}$ dans $CH_{0,\mathbf{A}}(X)$.*

Supposons pour l'instant la Prop. 2.14 prouvée, et montrons comment on en déduit la Prop. 2.13. On se ramène aisément au cas où f est projectif par le lemme de Chow et la résolution des singularités d'Hironaka. On observe alors que $z_{\mathbf{A}}^{\mathrm{eff}}$ est orthogonal à $\operatorname{Br} X$ pour l'accouplement (9), car $\hat{z}_{\mathbf{A}}$ l'est par hypothèse et $\hat{z}$ est global. Nous pouvons donc appliquer la conclusion de l'étape d) en partant de $z_{\mathbf{A}}^{\mathrm{eff}} = (z_v)$. On obtient ainsi un point fermé $h \in H$ et un zéro-cycle adélique effectif $z'_{\mathbf{A}} = (z'_v) \in Z_{0,\mathbf{A}}^{\mathrm{eff,red},y}(X^0)$, vérifiant $f_* z'_v = h$ pour toute place v, orthogonal à $\operatorname{Br} X_h$ pour l'accouplement de Brauer-Manin sur X_h, et tel que $(z'_v)_{v \in S}$ soit dans $\mathcal{U}$. On a alors $z_{\mathbf{A}}^{\mathrm{eff}} = z'_{\mathbf{A}}$ dans $CH_{0,\mathbf{A}}(X)$ par la Prop. 2.14, et donc $\hat{z}_{\mathbf{A}} = z'_{\mathbf{A}} + \hat{z}$ comme on voulait. Noter que comme l'intersection de deux sous-ensembles hilbertiens de C^0 en est encore un, on peut de plus demander que h soit dans un ensemble hilbertien donné au départ.

Preuve de la Prop. 2.14 (esquisse) — La démonstration utilise d'abord le fait que la courbe C vérifie la conjecture (E) (qu'on applique à $f_* \hat{z}_{\mathbf{A}} \in \operatorname{Pic}_{\mathbf{A}}(C)^{\wedge}$ pour trouver la classe $y \in \operatorname{Pic} C$). On utilise ensuite les propriétés cohomologiques (8), satisfaites par les variétés rationnellement connexes, via le théorème suivant, dont la preuve combine un argument de décomposition de la diagonale avec des théorèmes de Kato-Saito et Saito-Sato sur le groupe de Chow des zéro-cycles.

Théorème 2.15 (Wittenberg [Wi12], Th. 2.1). — *Soit C une courbe projective, lisse et géométriquement intègre sur un corps de nombres k. Soit X une k-variété projective, lisse et géométriquement intègre, équipée d'un k-morphisme dominant $f : X \to C$ dont la fibre générique X_η est géométriquement intègre et vérifie les conditions (8). Alors, il existe un ensemble fini $S \subset \Omega_f$, tel que la flèche*

$$f_* : CH_0(X \times_k k_v) \to \operatorname{Pic}(C \times_k k_v)$$

soit un isomorphisme pour toute place $v \notin (S \cup \Omega_\infty)$.

Une fois qu'on s'est ramené (ce qui est assez formel, voir la Prop. 7.2. de [HW]) à partir de $\hat{z}_{\mathbf{A}}$ à un zéro-cycle adélique $(z_v^0) \in CH_{0,\mathbf{A}}(X)$, orthogonal à $\operatorname{Br} X$, et qu'on veut transformer en un zéro-cycle adélique *effectif* $z_{\mathbf{A}}^{\mathrm{eff}}$, le théorème 2.15 permet, en plus de s'autoriser à ajouter un zéro-cycle global, de modifier les z_v^0 comme on veut en dehors de S (rappelons qu'on a supposé pour simplifier k totalement imaginaire ; s'il y a des places réelles, on les traite comme les places de S à l'aide des courbes Z_v ci-dessous). Si on ajoute aux z_v^0 un multiple $N.x$ d'un point fermé $x \in X$, la difficulté est que ces $z_v^0 + N.x$ soient équivalents à des zéro-cycles effectifs. Ceci est assuré par une technique remontant à [Wi12] : on choisit, pour chaque place v de S, une courbe Z_v dans X_v contenant x et le support de z_v^0 (c'est ici qu'on a besoin de l'hypothèse que X est projective, qui jusque-là n'avait servi que pour assurer que les $\operatorname{Sym}_{X^0/k}$ soient bien des schémas). Ensuite si N est assez grand par rapport aux genres des courbes Z_v pour $v \in S$, les $z_v^0 + N.x$ sont très amples sur Z_v par Riemann-Roch, donc vont bien être équivalents à des zéro-cycles effectifs. □

Fin de la preuve du théorème 1.5. Partons d'un $\hat{z}_{\mathbf{A}} \in CH_{0,\mathbf{A}}(X)^\wedge$, orthogonal à $\operatorname{Br} X$ pour l'accouplement (6), et appliquons-lui la Prop. 2.13. Comme le point adélique $z'_{\mathbf{A}}$ de X_h est orthogonal à $\operatorname{Br} X_h$, on peut lui appliquer la conjecture (E) pour X_h, et l'écrire comme image d'un $z_h \in CH_0(X_h)^\wedge$. Ainsi $z'_{\mathbf{A}}$, vu comme élément de $CH_{0,\mathbf{A}}(X)^\wedge$, provient de $CH_0(X)^\wedge$ et on conclut avec l'égalité $\hat{z}_{\mathbf{A}} = z'_{\mathbf{A}} + \hat{z}$ dans $CH_{0,\mathbf{A}}(X)^\wedge$. □

Remarque 2.16. — -Comme $z'_{\mathbf{A}}$ a pu être pris comme un point adélique de X_h, il suffit en fait de savoir que les fibres lisses vérifient la conjecture 1.1 sur les points rationnels au lieu de la conjecture (E), via un lemme ([HW], lemma 8.2) reposant sur le fait que pour V propre, lisse, et rationnellement connexe, le groupe $A_0(V \times_k k_v)$ est d'exposant fini et est nul pour presque toute place v (cf. [Wi12], lemme 2.3).

-On peut également ne faire ce type d'hypothèses que sur les fibres de f au-dessus d'un sous-ensemble hilbertien de C (cf. remarque après l'énoncé de la Prop. 2.13).

-Si on suppose seulement que les fibres lisses de f (au-dessus d'un sous-ensemble hilbertien) vérifient la conjecture (E_1), on peut conclure que l'existence d'une famille $(z_v) \in Z_{0,\mathbf{A}}(X)$ orthogonale à $\operatorname{Br} X$, et vérifiant $\deg z_v = 1$ pour toute place v, implique l'existence d'un zéro-cycle de degré 1 sur X. En effet, en considérant $z'_{\mathbf{A}}$ comme une famille de zéro-cycles de degré 1 sur X_h, on obtient un zéro-cycle z' de degré 1 sur la $k(h)$-variété X_h, i.e. de degré $[k(h) : k]$ sur X. De l'égalité $z_{\mathbf{A}} = z'_{\mathbf{A}} + \hat{z}$, on déduit alors $\deg_X \hat{z} = 1 - [k(h) : k]$, ou encore $\deg_X(z' + \hat{z}) = 1$. Le résultat découle alors de [Wi12], lemme 1.11.

-Harpaz et Wittenberg démontrent aussi une généralisation du théorème 1.5 où l'on remplace C par une base k-birationnelle à $C \times \mathbf{P}^n_k$, par un procédé de récurrence sur n ([HW], Cor. 8.4).

3. PREUVE DU THÉORÈME PRINCIPAL SUR LES POINTS RATIONNELS

3.1. Une conjecture sur les valeurs locales d'une famille de polynômes

Pour faire fonctionner la méthode des fibrations dans le cadre des points rationnels, le lemme 2.10 n'est en général pas suffisant. Harpaz et Wittenberg proposent, pour le remplacer, la conjecture suivante :

Conjecture 3.1. — *Soit k un corps de nombres. Soient $n \geq 1$ et $P_1, ..., P_n \in k[t]$ des polynômes irréductibles unitaires deux à deux distincts. On pose $k_i = k[t]/P_i$ et on note a_i la classe de t dans k_i (de sorte que $k_i = k(a_i)$). On se donne, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, une extension finie L_i/k_i et $b_i \in k_i^*$. Soit S un ensemble fini de places, contenant les places réelles et les places finies au-dessus desquelles l'un des b_i n'est pas une unité ou l'une des extensions L_i/k_i est ramifiée.*

Pour chaque $v \in S$, on fixe un $t_v \in k_v$ et on suppose que pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, l'élément $b_i(t_v - a_i) \in k_i \otimes_k k_v$ peut s'écrire comme norme d'un élément de $(L_i \otimes_k k_v)^*$. Alors, il existe $t_0 \in k$, arbitrairement proche des t_v pour $v \in S$, et vérifiant :

Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ et toute place finie w de k_i telle que $w(t_0 - a_i) > 0$, alors soit w est au-dessus d'une place de S, soit L_i/k_i est décomposée en w.

Notons que pour $n = 1$, $\deg P_1 = 1$ et $b_1 = 1$, cette conjecture est juste une version un peu plus faible du lemme 2.10 (on ne demande pas d'intégralité de t_0 en dehors de S). On peut aussi donner une version moins forte de la conjecture aux places réelles ([HW], Conj. 9.2), suffisante dans les applications si on s'intéresse juste aux questions d'existence d'un point rationnel ou à l'approximation faible modifiée aux places archimédiennes (pour laquelle on demande juste en ces places que l'on reste dans la même composante connexe).

Voici quelques cas connus de la conjecture 3.1 :

i) La conjecture 3.1 est impliquée par l'hypothèse de Schinzel si les extensions L_i/k_i sont abéliennes ([HW], Th. 9.6). En fait une version «homogène» un peu plus faible (l'hypothèse (HH_1), explicitée dans [HW], p.32) de l'hypothèse de Schinzel suffit, ce qui permet par exemple d'en déduire, via des travaux de Heath-Brown et Moroz, que la conjecture 3.1 est vraie si $n = 1, k = \mathbf{Q}, [k_1 : \mathbf{Q}] = 3$ et L_1/k_1 est abélienne.

ii) La conjecture est vraie si $\sum_{i=1}^n [k_i : k] \leq 2$, ou encore si $\sum_{i=1}^n [k_i : k] = 3$ et $[L_i : k_i] = 2$ pour tout i. Ce fait est démontré par Harpaz et Wittenberg ([HW], Th. 9.11) en reliant la conjecture à une propriété d'approximation forte pour une variété quasi-affine explicite (dépendant des k_i, L_i, a_i, et b_i, *loc. cit.*, Cor. 9.10).

Le résultat principal connu à ce jour concernant la conjecture 3.1 est le théorème suivant :

Théorème 3.2 ([Mat], [HW] Th. 9.14). — *La conjecture 3.1 est vraie si $k = k_1 = ... = k_n = \mathbf{Q}$.*

Preuve — On va utiliser le théorème suivant, dû à L. Matthiesen, qu'on va appliquer dans le cas $s = 2$:

Théorème 3.3 ([Mat], Th. 1.1). — *Soient $L_1, ..., L_n$ des extensions finies de $\mathbf{Q}$ de degré au moins 2. Soient $f_1, ..., f_n \in \mathbf{Z}[u_1, ..., u_s]$ des formes linéaires deux à deux non proportionnelles. Soit S_f un ensemble fini de nombre premiers de $\mathbf{Q}$, contenant tous les premiers $\leq C$, où C est une constante (dépendant seulement des L_i et des f_i). Soit $u \in \mathbf{Z}^s$ tel que les $f_i(u)$ soient des normes entières locales (depuis les L_i) non nulles en toute place de S_f, et des normes locales non nulles en ∞. Alors il existe $u' \in \mathbf{Z}^s$, arbitrairement proche de u aux places de S_f, dans tout cône convexe ouvert donné de $\mathbf{R}^s$ contenant u, et vérifiant pour tout $i \in \{1, ...n\}$:*

(i) *Si p est un nombre premier, la condition $v_p(f_i(u')) \geq 2$ implique $p \in S_f$.*

(ii)*) $f_i(u')$ est une norme d'un élément entier de L_i.*

Pour démontrer le théorème 3.2, on se ramène d'abord au cas où les a_i sont des unités en dehors de S, via une translation sur t_0 et le fait qu'on peut toujours ajouter un nombre fini de places à S pour démontrer la conjecture 3.1 ([HW], Rem. 9.3). Soient N un entier positif et r le produit des premiers dans S_f. Quitte à multiplier a_i, b_i, t_v par r^N (plus généralement la conjecture 3.1 est compatible au changement de coordonnées dans $\mathbf{P}^1$, [HW], lemme 9.13), on peut supposer (en prenant N suffisamment multiple de $\prod_{i=1}^n [L_i : \mathbf{Q}]$) qu'on a les propriétés suivantes :

-Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, on a $a_i, b_i \in \mathbf{Z}$.

-On a $v(t_v) \geq 0$ pour tout $v \in S_f$.

-Les $b_i(t_v - a_i)$ sont des normes d'éléments (qu'on peut de plus demander entiers pour $v \neq \infty$) de $L_i \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_v$ pour toute place $v \in S$.

-L'ensemble S est assez grand au sens de la constante C du théorème 3.3.

Soit alors $t_2 = \lambda_2/\mu_2 \in \mathbf{Q}$, arbitrairement proche de t_v pour $v \in S$, avec $\lambda_2, \mu_2 \in \mathbf{Z}$. Par approximation forte sur la droite affine, on peut trouver $\alpha \in \mathbf{Q}$, proche de $1/\mu_2$ aux places de S_f, entier en dehors de S, et tel que $\alpha\mu_2 > 0$. Alors l'élément $(\lambda_1, \mu_1) := (\alpha\lambda_2, \alpha\mu_2)$ de $\mathbf{Z}^2$ est proche de $(t_v, 1)$ aux places de S_f. De plus λ_1/μ_1 est proche de t_v pour $v = \infty$, et les $b_i(\lambda_1 - a_i\mu_1)$ sont des normes locales entières de L_i aux places de S_f (et des normes locales de L_i en ∞). On applique alors le théorème 3.3 aux formes linéaires $f_i(\lambda, \mu) := b_i(\lambda - a_i\mu)$ et à l'élément (λ_1, μ_1) ; on obtient un élément $(\lambda_0, \mu_0) \in \mathbf{Z}^2$, proche de (λ_1, μ_1) aux places de S_f, et tel que $t_0 := \lambda_0/\mu_0$ soit proche de λ_1/μ_1 en ∞. On sait de plus que chaque $b_i(\lambda_0 - a_i\mu_0)$ est la norme d'un élément entier de L_i et est de valuation ≤ 1 en les places non dans S.

Si maintenant $v \notin S$ est une place telle que $v(t_0 - a_i) > 0$, les propriétés $v(b_i) = 0$ et $v(\mu_0) \geq 0$ impliquent $v(b_i(\lambda_0 - a_i\mu_0)) = 1$; comme $L_i/\mathbf{Q}$ n'est pas ramifiée en v et $b_i(\lambda_0 - a_i\mu_0)$ est une norme locale entière en S, ceci implique bien que $L_i/\mathbf{Q}$ est décomposée en v comme on voulait. □

3.2. Le théorème de fibration sur les points rationnels

Le théorème principal concernant les points rationnels sur les fibrations démontré par Harpaz et Wittenberg est l'énoncé suivant, qui est le Th. 9.17 de [HW]. Il est conditionnel à la conjecture 3.1, mais le théorème 3.2 permettra ensuite d'en déduire le théorème inconditionnel 1.7.

Théorème 3.4. — *Soit X une variété propre, lisse, géométriquement intègre sur un corps de nombres k. On suppose que toutes les fibres de f possèdent une composante de multiplicité* 1. *Soit U un ouvert de Zariski non vide de $\mathbf{P}^1_k$, contenant le point à l'infini ∞, et au-dessus duquel toutes les fibres de f sont scindées. Soit B un sous-groupe fini de* $\mathrm{Br}\,(f^{-1}(U))$. *Soit $(x_v) \in X(\mathbf{A}_k)$ un point adélique orthogonal à $(B + f_\eta^* \mathrm{Br}\,\eta) \cap \mathrm{Br}\,X$ pour l'accouplement de Brauer-Manin où $f_\eta^* : X_\eta \to \eta \in \mathbf{P}^1_k$ est la fibre générique de f.*

Soit alors M' un sous-ensemble non vide de $\mathbf{P}^1_k - U$, contenant tous les points au-dessus desquels la fibre de f n'est pas scindée, et suffisamment grand pour qu'on ait, pour tout $m \in M'' := (\mathbf{P}^1_k - U) - M'$, que l'application résidu :

$$\mathrm{Br}\,(\mathbf{P}^1_k - (M' \cup \{m\})) \to H^1(k(m), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \tag{10}$$

est surjective. Soient $P_1, ..., P_n$ les polynômes unitaires irréductibles correspondant aux points de M'. On suppose la conjecture 3.1 vérifiée pour $P_1, ..., P_n$. Soit H un sous-ensemble hilbertien de U.

Alors il existe un point rationnel $c \in (H \cap U(k))$, et un point adélique $(x'_v) \in X_c(\mathbf{A}_k)$ tel que la fibre X_c soit lisse, avec (x'_v) arbitrairement proche de (x_v) dans $X(\mathbf{A}_k)$ et orthogonal à B pour l'accouplement de Brauer-Manin.

La formulation de ce théorème est compliquée, notamment à cause du fait qu'on est obligé, pour les applications inconditionnelles, de prendre M'' non vide dans le cas où certains éléments de $\mathrm{Br}\,X_\eta$ ont des résidus non nuls en des fibres scindées (mais qui peuvent ne pas être géométriquement intègres), afin de garder un contrôle sur les polynômes auxquels on applique la conjecture 3.1 ; ainsi on a intérêt à prendre M' le plus petit possible dans les applications.

La preuve du théorème 3.4 suit en gros le même schéma que dans le cas où on supposait toutes les fibres scindées, cf. [Ha07], Th. 1 ; en particulier le fait que M'' puisse être non vide oblige à utiliser des argument similaires à ceux de la pénible Prop. 1 de loc. cit. L'ingrédient supplémentaire principal est le remplacement de la condition qu'il y ait au maximum une mauvaise fibre par l'application de la conjecture 3.1 pour trouver des points locaux dans les fibres ; pour satisfaire les conditions locales «normiques» de cette conjecture, on utilise aussi le théorème de dualité entre $\mathrm{Br}_+(\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}})$ et $\mathrm{Pic}_+(\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}})$, qui était déjà apparu dans la preuve du théorème 1.5. Nous n'en dirons pas plus ici, et allons nous contenter d'expliquer pour finir comment on déduit le théorème principal 1.7 sur les points rationnels du théorème 3.4 :

Preuve du théorème 1.7 à partir du théorème 3.4 — On peut supposer la fibre à l'infini scindée, quitte à faire un changement de coordonnées. Comme la fibre générique X_η est supposée rationnellement connexe, on peut (Th. 2.1) choisir B dans le théorème 3.4 et un sous-ensemble hilbertien H de $\mathbf{P}^1_k$ tel que pour tout $c \in H$, la spécialisation $B \to \mathrm{Br}\,X_c/\mathrm{Br}\,(k(c))$ soit surjective. On sait aussi que toutes les fibres ont une composante de multiplicité 1 par [GHS]. L'hypothèse que les fibres non scindées de f sont toutes au-dessus de $\mathbf{Q}$-points permet de prendre M' constitué seulement de $\mathbf{Q}$-points, et non vide quitte à rétrécir U ; en effet l'hypothèse de surjectivité de l'application (10) est automatique dès que M' possède un point rationnel via la suite de Faddeev (cf. [CSw], §1.2). Maintenant, la conjecture 3.1 est satisfaite pour les polynômes P_i d'après le théorème 3.2. Il en résulte que si on s'est donné $(x_v) \in X(\mathbf{A}_k)$ orthogonal à $\mathrm{Br}\,X$ et un ensemble fini S de places de k, on peut trouver un point rationnel $c \in (H \cap U(k))$ et un point adélique (x'_v) sur la fibre lisse X_c, proche des x_v pour $v \in S$, et orthogonal à B, donc aussi à $\operatorname{Br} X_c$ d'après le choix de B et H. On applique alors la conjecture 1.1 à la fibre X_c pour conclure. □

On obtient en corollaire, en utilisant le théorème de Borovoi ([Bor], Cor. 2.5), le résultat général suivant (Cor. 9.29 de [HW]) sur les fibrations en espaces homogènes :

COROLLAIRE 3.5. — *Soit X une variété propre, lisse, géométriquement intègre sur $\mathbf{Q}$. Suppposons X équipée d'un morphisme dominant $f : X \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$, dont la fibre générique est birationnellement équivalente à un espace homogène à stabilisateurs connexes d'un groupe algébrique linéaire connexe. On suppose que toutes les fibres non scindées de f sont au-dessus de $\mathbf{Q}$-points de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$. Alors X vérifie la conjecture de Colliot-Thélène 1.1.*

En particulier, quand $k = \mathbf{Q}$ et le polynôme P est scindé sur $\mathbf{Q}$, les variétés correspondant aux équations normiques (4) satisfont la conjecture de Colliot-Thélène.

Remerciements. — Je remercie O. Wittenberg pour les précisions qu'il m'a apportées pendant la préparation de ce texte et pour sa lecture minutieuse de la version préliminaire.

RÉFÉRENCES

[Azr] J-P. AZRA – *Relations diophantiennes et la solution négative du 10è problème de Hilbert (d'après M. Davis, H. Putnam, J. Robinson et I. Matiasevitch)*, Sém. Bourbaki 1970/1971, Exp. n° 383, Lect. Notes in Math. **244**, 11–28, Springer-Verlag 1971.

[Bor] M.V. BOROVOI – *The Brauer-Manin obstructions for homogeneous spaces with connected or abelian stabilizer*, J. reine angew. Math. **473** (1996), 181-194.

[BD] M.V. BOROVOI, C. DEMARCHE – *Manin obstruction to strong approximation for homogeneous spaces*, Commentarii Mathematici Helvetici **88** (2013), no. 1, 1–54.

[BM] T. BROWNING, L. MATTHIESEN – *Norm forms for arbitrary number fields as products of linear polynomials*, prépublication 2013, arXiv :1307.7641.

[BMS] T. BROWNING, L. MATTHIESEN, A.N. SKOROBOGATOV – *Rational points on pencils of conics and quadrics with many degenerate fibers*, Ann. of Math. (2) **180** (2014), no. 1, 381-402.

[CT95] J-L. COLLIOT-THÉLÈNE – *Birational invariants, purity and the Gersten conjecture*, in *K-Theory and Algebraic Geometry : Connections with Quadratic Forms and Division Algebras*, AMS Summer Research Institute, Santa Barbara 1992, ed. W. Jacob and A. Rosenberg, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **58**, Part I (1995) 1–64.

[CT10] J-L. COLLIOT-THÉLÈNE, – *Zéro-cycles de degré 1 sur les solides de Poonen*, Bull. Soc. math. France. **138** (2010), no. 2, 249–257.

[CSa] J-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J-J. SANSUC – *Sur le principe de Hasse et l'approximation faible, et sur une hypothèse de Schinzel*, Acta Arithmetica **XLI** (1982), 33–53.

[CSS] J-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J-J. SANSUC, P. SWINNERTON-DYER – *Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces* I., J. reine angew. Math. **373** (1987), 37-107 ; II., J. reine angew. Math. **374** (1987), 72–168.

[CSkS] J-L. COLLIOT-THÉLÈNE, A.N. SKOROBOGATOV, P. SWINNERTON-DYER – *Rational points and zero-cycles on fibred varieties : Schinzel's hypothesis and Salberger's device*, J. reine angew. Math. **495** (1998), 1–28.

[CSw] J-L. COLLIOT-THÉLÈNE, P. SWINNERTON-DYER – *Hasse principle and weak approximation for pencils of Severi-Brauer and similar varieties*, J. reine angew. Math. **453** (1994) 49–112.

[Fro] E. FROSSARD – *Obstruction de Brauer-Manin pour les zéro-cycles sur des fibrations en variétés de Severi-Brauer*, J. reine angew. Math. **557** (2003), 81–101.

[GHS] T. GRABER, J. HARRIS, J. STARR – *Families of rationally connected varieties*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 1, 57–67.

[Gro2] A. GROTHENDIECK – *Le groupe de Brauer, II. Théorie cohomologique*, dans *Dix Exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland, Amsterdam ; Masson, Paris 1968, 67–87.

[Gro3] A. GROTHENDIECK – *Le groupe de Brauer, III. Exemples et compléments*, dans *Dix Exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland, Amsterdam ; Masson, Paris 1968, 88–188.

[Ha94] D. HARARI – *Méthode des fibrations et obstruction de Manin*, Duke Math. J. **75** (1994), no. 1, 221-260.

[Ha97] D. HARARI – *Flèches de spécialisation en cohomologie étale et applications arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France **125** (1997), 143–166.

[Ha07] D. HARARI – *Spécialisation des conditions de Manin pour les variétés fibrées au-dessus de l'espace projectif*, Compositio Math. **143**, no. 3 (2007), 603–617.

[HW] Y. HARPAZ, O. WITTENBERG – *On the fibration method for zero-cycles and rational points*, prépublication 2014, arXiv :1409.0993.

[HSW] Y. HARPAZ, O. WITTENBERG, A.N. SKOROBOGATOV – *The Hardy-Littlewood conjecture and rational points*, Compositio Math. **150**, no. 12 (2014), 2095–2111.

[Isk] V.A. ISKOVSKIH – *A counterexample to the Hasse principle for systems of two quadratic forms in five variables*, Mat. Zametki **10** (1971) 253-257 ; traduction anglaise dans Math. Notes **10** (1971), 575-577.

[Lia] Y. LIANG – *Arithmetic of 0-cycles on varieties defined over number fields*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **46** (2013), no. 1, 35-56.

[Mat] L. MATTHIESEN – *On the squarefree representation function of a norm form and nilsequences*, prépublication 2014, arXiv :1409.5028.

[Man] Y.I. MANIN – *Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne*, Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1, 401-411. Gauthier-Villars, Paris, 1971.

[Mil] J.S. MILNE – *Étale Cohomology*, Princeton Mathematical Series **33**, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.

[NSW] J. NEUKIRCH, A. SCHMIDT, K. WINGBERG – *Cohomology of number fields*, Second edition, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **323**, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[Pey] E. PEYRE – *Obstructions au principe de Hasse et à l'approximation faible*, Sém. Bourbaki 2003/2004, Exp. n° 931, Astérisque **299** (2005), 165–193.

[Sai] S. SAITO – *Some observations on motivic cohomology of arithmetic schemes*, Invent. Math. **98** (1989), no. 2, 371-404.

[Sal] P. SALBERGER – *Zero-cycles on rational surfaces over number fields*, Invent. Math. **91** (1988), no. 3, 505-524.

[San] J-J. SANSUC – *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. reine angew. Math. **327** (1981), 12-80.

[Se] J-P. SERRE – *Corps locaux*, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII, Hermann, Paris, 1968.

[Se70] J-P. SERRE – *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France, Paris, 1970.

[Sko] A.N. SKOROBOGATOV – *Beyond the Manin obstruction*, Invent. Math. **135** (1999), no. 2, 399-424.

[Sme] A. SMEETS – *Principes locaux-globaux pour certaines fibrations en torseurs sous un tore*, à paraître dans Math. Proc. of the Cambridge Philosophical Society.

[Swd62] P. SWINNERTON-DYER – *Two special cubic surfaces*, Mathematika **9** (1962), 54-56.

[vH] J. van HAMEL – *The Brauer-Manin obstruction for zero-cycles on Severi-Brauer fibrations over curves*, J. London Math. Soc. (2) **68** (2003), no. 2, 317-337.

[VAV] A. VARILLY-ALVARADO, B. VIRAY – *Higher dimensional analogues of Châtelet surfaces*, Bulletin of the London Mathematical Society **44** (2012), no. 1, 125–135.

[Wi10] O. WITTENBERG – *La connexité rationnelle en arithmétique*, in *Variétés rationnellement connexes : aspects géométriques et arithmétiques*, Panoramas & Synthèses **31**, Société Mathématique de France, 2010, 61–114.

[Wi12] O. WITTENBERG – *Zéro-cycles sur les fibrations au-dessus d'une courbe de genre quelconque*, Duke Math. J. **161** (2012), no. 11, 2113-2166.

David HARARI

Université Paris-Sud
UMR 8628 du CNRS
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
F–91405 Orsay
E-mail : `David.Harari@math.u-psud.fr`