

**VARIÉTÉS LORENTZIENNES PLATES  
VUES COMME LIMITES DE VARIÉTÉS ANTI-DE SITTER**  
[d'après Danciger, Guéritaud et Kassel]

par **Jean-Marc SCHLENKER**

**INTRODUCTION**

Les travaux de Danciger, Guéritaud et Kassel [DGK13, DGK14] développent de manière féconde les liens entre trois directions de recherche :

- les variétés lorentziennes plates complètes de dimension 3, en relation avec la conjecture de Margulis qui les concerne,
- les variétés anti-de Sitter complètes de dimension 3,
- les applications contractantes entre surfaces hyperboliques, ou plus généralement les applications contractantes équivariantes du plan hyperbolique dans lui-même, et leurs versions infinitésimales, les champs de vecteurs contractants sur les surfaces hyperboliques.

Nous allons présenter rapidement quelques résultats obtenus par Danciger, Guéritaud et Kassel dans ces différents domaines, en commençant par les énoncés sur les surfaces avant de passer à la dimension 3. Nous verrons alors comment les résultats concernant les surfaces ont des interprétations naturelles en termes de variété de dimension 3.

Il n'est pas question ici de donner une présentation exhaustive des preuves, d'autant que les références [DGK13, DGK14] sont remarquablement bien écrites. On va tenter de présenter de manière assez synthétique les principaux résultats, et de mettre en évidence l'articulation entre eux, ainsi que leur contexte. On se concentrera en particulier sur

- la notion de *géométrie transitionnelle*, qui offre un pont entre les géométries hyperbolique, Minkowski et anti-de Sitter, que les auteurs utilisent pour donner des preuves simples de résultats importants sur les variétés lorentziennes plates à partir de résultats correspondants en géométrie anti-de Sitter, dans le §4,
- la relation entre feuilletages par des géodésiques de type temps et difféomorphismes contractants (resp. champs de vecteurs contractants), dans le §5,
- la relation entre déformations en bandelettes (resp. déformations infinitésimales en bandelettes) de surfaces hyperboliques et domaines fondamentaux bordés par des plans croches, dans le §6.

*Notations.* — On notera  $S$  une surface, homéomorphe à l'intérieur d'une surface compacte à bord, munie d'une métrique hyperbolique convexe co-compacte (c'est-à-dire dont tous les bouts sont d'aire infinie). On appellera  $\mathcal{T}_S$  l'espace de Teichmüller de  $S$ ,

vu comme espace des métriques hyperboliques convexes co-compactes sur  $S$  considérées à isotopie près.

## 1. LE COMPLEXE DES ARCS ET LES DÉFORMATIONS PAR BANDELETTES

On s'intéresse ici à l'espace des métriques hyperboliques complètes sur une surface  $S$  homéomorphe à l'intérieur d'une surface compacte à bord. Plus spécifiquement, on peut se poser la question suivante : comment peut-on passer de manière « géométrique » d'une métrique hyperbolique  $h$  fixée à une autre métrique hyperbolique  $h'$  ?

Si on se place du point de vue des structures conformes sur  $S$ , une réponse est donnée par la théorie « de Teichmüller » des applications quasi-conformes optimales entre surfaces de Riemann.

Du point de vue des surfaces hyperboliques, lorsque  $S$  est fermée (compacte sans bord) une autre réponse possible est donnée par les coordonnées de Fenchel-Nielsen (voir par exemple [FN03]) qui ont l'inconvénient de dépendre du choix d'une décomposition en pantalons. Si on veut éviter un tel choix, on peut utiliser le théorème de tremblement de terre de Thurston (démontré dans [Ker83]) qui affirme qu'il existe un unique tremblement de terre qui relie  $h$  à  $h'$  — les tremblements de terre sont des extensions aux laminations mesurées des twists de Dehn fractionnels le long de multicourbes pondérées. Il est d'ailleurs intéressant de constater que la preuve la plus simple du théorème de tremblement de terre de Thurston, obtenue par Mess [Mes07, ABB<sup>+</sup>07], utilisait déjà la géométrie anti-de Sitter.

Une autre alternative possible, pour les surfaces fermées, est fournie par l'application de grafting, qui associe à une métrique hyperbolique  $h$  et à une lamination mesurée  $l$  une autre métrique hyperbolique  $gr(m, l) \in \mathcal{T}$  sur  $S$ . Lorsque  $l$  est une courbe fermée  $c$  munie d'un poids  $w > 0$ , la structure conforme sous-jacente à  $gr(m, l)$  est obtenue en coupant  $m$  le long de  $c$  et en y introduisant une bande plate de largeur  $w$ . Dumas et Wolf [DW08] ont montré que, si  $m$  est fixée, l'application  $l \mapsto gr(m, l)$  est un homéomorphisme, fournissant ainsi une autre paramétrisation de  $\mathcal{T}_S$ .

Le théorème des tremblements de terre s'étend aux surfaces hyperboliques complètes [BKS11], mais le résultat de Danciger, Guéritaud et Kassel permet de paramétrer spécifiquement les déformations *expansives* par rapport à une représentation  $\rho$  donnée. Ils définissent une forme particulière de déformation des surfaces hyperboliques qui, par construction, augmentent la longueur de toutes les courbes fermées.

### 1.1. Déformations par bandelette

On considère une surface hyperbolique complète  $S$ , homéomorphe à l'intérieur d'une surface compacte à bord  $\bar{S}$ . On supposera que tous les bouts de  $S$  sont d'aire infinie, et ne sont donc pas des cusps,  $S$  est alors dite *convexe co-compacte*.

DÉFINITION 1.1. — *Un arc géodésique de  $S$  est une géodésique complète dont chaque bout sort de tout compact de  $S$ .*

Alternativement, on considérera la notion topologique correspondante, et on appellera arc sur  $S$  une classe d'homotopie de courbe tracée sur  $\bar{S}$ , dont les extrémités se trouvent sur le bord. Néanmoins un arc géodésique de  $S$  n'est pas déterminé uniquement par l'arc (topologique) correspondant, puisqu'on peut déplacer ses extrémités sur le bord à l'infini de  $S$  sans changer d'arc topologique.

DÉFINITION 1.2. — *On appellera bandelette hyperbolique la région du plan hyperbolique bordée par deux géodésiques ultraparallèles, c'est-à-dire qui ne se rencontrent ni dans le plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ , ni dans son bord idéal. La taille d'une bandelette hyperbolique est le segment géodésique qui joint ses deux composantes de bord en étant orthogonal à chacune. La largeur d'une bandelette est la longueur de sa taille.*

On notera qu'une bandelette hyperbolique est uniquement déterminée, à isométrie près, par sa largeur.

DÉFINITION 1.3. — *Une déformation par bandelette de  $S$  le long de l'arc géodésique  $\alpha$  est la surface hyperbolique complète obtenue en coupant  $S$  le long de  $\alpha$  et en y recollant une bandelette hyperbolique  $b$ , de manière que les deux extrémités de la taille de  $b$  soient identifiés au même point de  $\alpha$ .*

On note qu'une déformation par bandelette est uniquement déterminée si, en plus de  $S$  et de  $\alpha$ , on se donne la largeur  $w_\alpha$  de la bandelette qu'on recolle, et le point  $p_\alpha$  de  $\alpha$  où se trouveront les extrémités de cette taille.

Si  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  sont des arcs géodésiques disjoints, on dira qu'une déformation par bandelette de  $S$  le long de  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  est une surface hyperbolique complète obtenue en faisant successivement des déformations par bandelette le long de  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ . (Ces opérations commutent puisque les arcs géodésiques sont disjoints.)

## 1.2. Déformations expansives et complexe des arcs

Soit  $\rho : \pi_1 S \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$  la représentation d'holonomie de  $S$ , dont on suppose qu'elle est convexe co-compacte. Pour tout  $\gamma \in \pi_1 S$ , on appelle  $\lambda_\gamma(\rho)$  la longueur de translation hyperbolique de  $\rho(\gamma)$ .

DÉFINITION 1.4. — *Soit  $j : \pi_1 S \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$  une autre représentation. On dit que  $j$  est uniformément plus grande que  $\rho$  s'il existe  $\epsilon > 0$  tel que, pour tout  $\gamma \in \pi_1 S \setminus \{e\}$ ,  $\lambda_\gamma(j) \geq (1 + \epsilon)\lambda_\gamma(\rho)$ .*

DÉFINITION 1.5. — *On note  $\text{Adm}^+(\rho)$  l'espace des représentations de  $j : \pi_1 S \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$  (considérées à conjugaison près) convexe co-compactes qui sont « uniformément plus grandes » que  $\rho$ .*

Cet espace de représentations « plus grandes » que  $\rho$  admet une paramétrisation simple en termes de déformations par bandelettes. Cette paramétrisation utilise le complexe des arcs, qui est l'un des complexes simpliciaux qu'on peut associer à une surface compacte à bord (non vide).

**DÉFINITION 1.6.** — *Le complexe des arcs de  $S$  est le complexe simplicial  $\bar{X}$  dont les  $k$ -faces sont déterminées par les ensembles de  $k + 1$  arcs (topologiques) homotopiquement disjoints de  $S$ . On note  $X$  le sous-complexe constitué des faces pour lesquelles le complémentaire des arcs est une réunion disjointe de disques.*

Ainsi, si un point  $t$  du complexe des courbes est contenu dans une face de dimension  $k$  correspondant à des arcs  $\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{k+1}$  homotopiquement disjoints, alors  $t$  correspond à des poids  $(t_1, \dots, t_{k+1})$  positifs ou nuls, de somme égale à 1, sur les  $k + 1$  arcs. Ces faces simpliciales sont recollées de la manière naturelle.

Il est aussi nécessaire de considérer le cône  $CX$  sur  $X$ , c'est-à-dire qu'on considère des poids dont la somme n'est pas nécessairement égale à 1.

On choisit pour chaque arc topologique  $\bar{\alpha}$  sur  $S$  un représentant géodésique  $\alpha$ , de manière que ces représentants s'intersectent de manière minimale (c'est possible), ainsi qu'un point  $p_\alpha \in \alpha$  et une largeur  $w_\alpha > 0$ . On peut maintenant énoncer le résultat suivant [DGK14, Theorem 1.8].

**THÉORÈME 1.7.** — *L'application de  $CX$  dans  $\text{Adm}^+(\rho)$  qui à une famille de poids  $t_{\alpha_i}$  sur des arcs homotopiquement disjoints  $\bar{\alpha}_i$ ,  $i = 1, \dots, k + 1$  associe l'image de  $\rho$  par la déformation en bandelettes associées aux représentants géodésiques  $\alpha_i$ , aux points  $p_{\alpha_i}$  et aux poids  $t_{\alpha_i} w_{\alpha_i}$ , est un homéomorphisme.*

Notons qu'on pourrait supprimer la dépendance aux  $w_{\alpha_i}$ , quitte à prendre une paramétrisation légèrement différente. La dépendance par rapport aux représentants géodésiques des arcs et aux points  $p_\alpha$  est par contre bien réelle.

### 1.3. Déformations par bandelettes infinitésimales

On peut définir de même une version infinitésimale des déformations par bandelettes.

**DÉFINITION 1.8.** — *Soit  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  un ensemble d'arcs géodésiques disjoints, munis de points  $p_{\alpha_1} \in \alpha_1, \dots, p_{\alpha_k} \in \alpha_k$  et de largeurs  $w_{\alpha_1}, \dots, w_{\alpha_k}$ . Pour  $t > 0$ , on note  $\rho_t$  la déformation par bandelettes de  $\rho$  associée aux poids  $tw_{\alpha_1}, \dots, tw_{\alpha_k}$  sur les arcs géodésiques  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  avec points marqués  $p_1, \dots, p_k$ . La déformation par bandelette infinitésimale associée à ces données est  $(d\rho_t/dt)|_{t=0}$ , vu comme un vecteur tangent à l'espace des représentations de  $\pi_1 S$  dans  $PSL(2, \mathbb{R})$ .*

Comme pour les déformations « macroscopiques », ces déformations par bandelette infinitésimale ne décroissent infinitésimalement la longueur géodésique d'aucune courbe fermée. Notons  $\text{adm}^+(\rho)$  le cône des déformations infinitésimales « expansives ». Une fois choisis pour chaque arc (topologique)  $\bar{\alpha}$  un représentant géodésique  $\alpha$ , un point

$p_\alpha \in \alpha$ , et un poids  $w_\alpha > 0$ , on a une application  $f$  du complexe des arcs  $\bar{X}$  dans  $\text{adm}^+(\rho)$ . On a alors la paramétrisation suivante [DGK14, Theorem 1.3].

**THÉORÈME 1.9.** — *L'application  $f$ , composée avec la projectivisation  $P : \text{adm}^+(\rho) \rightarrow \text{adm}^+(\rho)/\mathbb{R}_{>0}$ , définit un homéomorphisme entre  $X$  et  $\text{adm}^+(\rho)/\mathbb{R}_{>0}$ .*

## 2. VARIÉTÉS LORENTZIENNES PLATES DE DIMENSION 3

On va maintenant brièvement décrire quelques résultats concernant les espaces-temps de Margulis, qui sont des variétés lorentziennes plates complètes dont le groupe fondamental est un groupe libre (non-abélien).

### 2.1. Contexte : la conjecture d'Auslander et les espaces-temps de Margulis

Un théorème classique de Bieberbach (voir par exemple [Aus65]) décrit les groupes fondamentaux des variétés compactes munies de métriques euclidiennes : ce sont des groupes discrets contenant un sous-groupe commutatif d'indice fini.

Il est naturel de se demander dans quelle mesure on peut étendre cet énoncé d'une part à des structures géométriques moins riches que des structures euclidiennes, et d'autre part à des variétés qui ne sont pas nécessairement compactes. Un *groupe cristallographique affine* est un groupe discret agissant proprement discontinuement par transformations affines sur  $\mathbb{R}^n$  avec quotient compact. On peut souhaiter généraliser le théorème de Bieberbach et décrire ces groupes cristallographiques affines, voire les variétés munies de structures affines complètes.

La conjecture d'Auslander, connue jusqu'en dimension 6 [AMS12], affirme que le groupe fondamental d'une variété affine compacte complète est virtuellement polycyclique. Pour les variétés seulement complètes, la situation est plus riche. En 1977, Milnor [Mil77] avait demandé si un groupe libre non-abélien pouvait agir proprement discontinuement par transformation affines sur  $\mathbb{R}^n$ , et suggéré de considérer un groupe libre agissant sur l'espace de Minkowski de dimension 3,  $\mathbb{R}^{2,1}$ . Un peu plus tard, en 1983, Fried et Goldman [FG83] montraient que parmi les variétés affines complètes de dimension 3, seules ces variétés lorentziennes plates peuvent avoir un groupe fondamental qui n'est pas virtuellement résoluble.

Enfin, toujours en 1983, Margulis [Mar83, Mar84] construisit des actions proprement libres de groupes libres non-abéliens sur  $\mathbb{R}^{2,1}$ , répondant ainsi à la question de Milnor. On va voir ci-dessous comment caractériser les actions de ce type.

### 2.2. Le groupe d'isométries de $\mathbb{R}^{2,1}$

Le groupe des isométries de  $\mathbb{R}^{2,1}$  est le produit semi-direct  $O(2, 1) \ltimes \mathbb{R}^{2,1}$ , où  $O(2, 1)$  agit en préservant l'origine, alors que  $\mathbb{R}^{2,1}$  agit par translation.

Soit maintenant  $\Gamma$  le groupe fondamental d'une surface, et soit  $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{R}^{2,1})$ . Alors la composée  $j$  de  $\rho$  avec la projection  $O(2, 1) \ltimes \mathbb{R}^{2,1}$  sur le premier facteur, appelée

partie linéaire de  $\rho$ , est un morphisme de  $\Gamma$  dans  $O(2, 1)$ . On va considérer des morphismes dont la partie linéaire est à valeur dans la composante de l'identité de  $O(2, 1)$ , qu'on identifie avec  $PSL(2, \mathbb{R})$ .

Par contre, si on note  $\tau : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$  la composée de  $\rho$  avec la projection sur le second facteur,  $\tau$  est un 1-cocycle pour  $j$ , c'est-à-dire qu'il satisfait la propriété d'équivariance suivante :

$$\forall \gamma, \gamma' \in \Gamma, \tau(\gamma.\gamma') = \tau(\gamma) + Ad(j(\gamma))\tau(\gamma') .$$

### 2.3. La partie translation des cocycles comme une déformation

Comme  $\tau$  est un 1-cocycle pour  $j$ , on peut l'interpréter comme une déformation infinitésimale de  $j$ , c'est-à-dire comme un vecteur tangent à l'espace des homéomorphismes de  $\Gamma$  dans  $PSL(2, \mathbb{R})$ .

Or Fried et Goldman [FG83] ont montré que si  $(j, \tau)$  est une action propre sur  $\mathbb{R}^{2,1}$  d'un groupe non virtuellement résoluble, alors  $j(\gamma)$  doit être virtuellement un groupe de surface. Mais  $j(\Gamma)$  ne peut pas être co-compact.

Pour trouver des groupes agissant proprement sur  $\mathbb{R}^{2,1}$  non virtuellement résolubles, on est donc conduit à considérer une surface hyperbolique  $S$  complète non compacte, munie d'une déformation infinitésimale  $\tau$  de la métrique (ou de manière équivalente de sa représentation d'holonomie).

### 2.4. La conjecture de Margulis

Dans ce contexte, Margulis [Mar83] avait défini pour chaque élément  $\gamma \in \Gamma$  un invariant  $\alpha_\tau(\gamma)$  (dépendant de  $j$  et de  $\tau$ ) et conjecturé que la positivité (ou négativité) de cet invariant pour tous les éléments de  $\Gamma$  assure la propreté de l'action sur  $\mathbb{R}^{2,1}$ .

Goldman et Margulis [GM00] ont ensuite donné une interprétation simple de cet invariant : c'est la variation infinitésimale, sous la déformation  $\tau$ , de la longueur hyperbolique de la géodésique fermée qui réalise  $\gamma$ . Le critère de Margulis est donc que, quitte à remplacer  $\tau$  par  $-\tau$ ,  $\tau$  fait décroître infinitésimalement la longueur de toutes les géodésiques fermées sur  $S$ .

Goldman, Labourie et Margulis [GLM09] ont ensuite démontré une version légèrement précisée de cette conjecture : l'action  $(j, \tau)$  de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{R}^{2,1}$  est propre si et seulement si, quitte à remplacer  $\tau$  par  $-\tau$ , la déformation infinitésimale associée à  $\tau$  décroît uniformément la longueur de toutes les géodésiques fermées sur  $S$ , c'est-à-dire si et seulement si il existe  $\epsilon > 0$  tel que, pour tout  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\gamma \neq 1$ , on a

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\lambda(e^{t\tau} j(\gamma))}{\lambda(j(\gamma))} \right) \Big|_{t=0} \leq -\epsilon ,$$

où  $\lambda$  désigne la longueur de translation.

## 2.5. Actions propres et champs de vecteurs contractants

Danciger, Guéritaud et Kassel [DGK13, Theorem 1.1 (1)] donnent un autre critère, équivalent, pour la propriété de l'action  $(j, \tau)$ .

Soit  $v$  un champ de vecteurs sur le plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ . On dira que  $v$  est  $(j, \tau)$ -équivariant si :

$$\forall \gamma \in \Gamma, \forall x \in \mathbb{H}^2, v(j(\gamma)(x)) = (j(\gamma))_*(v(x)) + \tau(\gamma)(j(\gamma)(x)) .$$

Ici  $j(\gamma) \in PSL(2, \mathbb{R})$  est considéré comme une isométrie de  $\mathbb{H}^2$ , alors que  $\tau(\gamma) \in sl(2, \mathbb{R})$  est vu comme un champ de Killing sur  $\mathbb{H}^2$ . Un champ de vecteurs  $(j, \tau)$ -équivariant induit donc  $\tau$  comme variation de la représentation  $j$ .

On dira par ailleurs qu'un champ de vecteurs est  $\epsilon$ -contractant si, lorsqu'on note  $h$  la métrique hyperbolique sur  $\mathbb{H}^2$ , sa dérivée de Lie vérifie

$$\mathcal{L}_v h \leq -\epsilon h ,$$

c'est-à-dire que le flot de  $v$  fait décroître uniformément les longueurs des vecteurs tangents.

Danciger, Guéritaud et Kassel [DGK13, Theorem 1.1] démontrent la version suivante de la conjecture de Margulis.

**THÉORÈME 2.1.** — *Soient  $\Gamma$  un groupe discret, et  $(j, \tau) : \Gamma \rightarrow PSL(2, \mathbb{R}) \ltimes sl(2, \mathbb{R})$  un morphisme dont la partie linéaire  $j$  est convexe co-compacte. L'action de  $(j, \tau)$  sur  $\mathbb{R}^{2,1}$  est proprement discontinue si et seulement si, quitte à remplacer  $\tau$  par  $-\tau$ , il existe un champ de vecteurs  $\epsilon$ -contractant et  $(j, \tau)$ -équivariant de  $\mathbb{H}^2$ .*

## 2.6. La topologie des quotients

L'approche suivie par Danciger, Guéritaud et Kassel permet aussi de comprendre la topologie des espaces-temps Minkowski qui peuvent être obtenus. En conséquence, ils montrent un résultat de *sagesse* conjecturé par Drumm et Goldman [DG99] : ces variétés sont homéomorphes à l'intérieur de variétés compactes à bord.

**THÉORÈME 2.2** ([DGK13]). — *Soit  $\Gamma$  un groupe discret sans torsion, et soit  $j \in \text{Hom}(\Gamma, PSL(2, \mathbb{R}))$  une représentation convexe co-compacte dont le quotient est une surface  $S$ . Soit  $\tau$  un cocycle de déformation de  $j$  tel que  $(j, \tau)$  agit proprement sur  $\mathbb{R}^{2,1}$ . Alors la variété quotient est un fibré en droite sur  $S$ , avec pour fibres des géodésiques de type temps. En conséquence, cette variété quotient est homéomorphe à l'intérieur d'un corps à anse.*

On peut noter qu'une autre démonstration de la conjecture de sagesse a été annoncée par Choi et Goldman, voir [CG12].

On verra dans la section 5 un lien entre applications contractantes et feuilletages par des géodésiques de type temps, qui permet de mieux comprendre cet énoncé.

## 2.7. Domaines fondamentaux et plans croches

Les plans croches ont été introduits par Drumm [DG90] pour construire des actions propres de groupes libres sur  $\mathbb{R}^{2,1}$  en construisant directement des domaines fondamentaux pour des actions dont la partie linéaire est la représentation d’holonomie d’une surface hyperbolique complète.

Un plan croche dans  $\mathbb{R}^{2,1}$  est centré en un point  $c$ , et composé de trois parties :

- une partie centrale, qui est l’intersection du cône de lumière de  $c$  avec un plan de type temps passant par  $c$ ,
- deux demi-plans isotropes (de type lumière) dont les bords sont recollés avec les deux droites qui constituent le bord de la partie centrale.

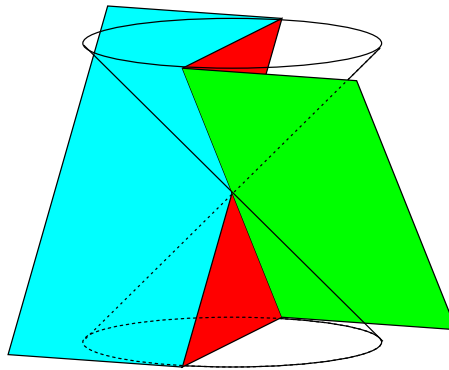


FIGURE 1. Un plan croche

Il existe deux types de plan croche, les « gauches » et les « droits », mais pour construire des domaines fondamentaux, on n’utilise que l’un des deux types, par exemple seulement des plans croches gauches.

Un plan croche gauche de  $\mathbb{R}^{2,1}$  est uniquement déterminé par sa partie centrale, qui correspond, à translation près, à une géodésique dans  $\mathbb{H}^2$ . Si on se donne une famille de géodésiques disjointes dans  $\mathbb{H}^2$  (par exemple invariante sous une action convexe co-compacte de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}^2$ ), on peut donc associer un plan croche défini à translation près à chaque géodésique, mais la position du centre doit être déterminée par la composante translation  $\tau$  de l’action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{R}^{2,1}$ . L’une des raisons pour lesquelles les plans croches sont intéressants et utiles est qu’on peut déterminer précisément les conditions sur les positions des centres sous lesquelles deux plans croches gauches sont disjoints, ce qui a permis à Drumm d’obtenir les résultats mentionnés plus haut.

Ces constructions ont conduit Drumm et Goldman à conjecturer que les espaces-temps de Margulis admettent toujours un domaine fondamental délimité par des plans croches, conjecture démontrée par Charette, Drumm et Goldman pour les groupes libres de rang 2 [CDG10, CDG14].

Danciger, Guéritaud et Kassel démontrent cette conjecture dans le cas général [DGK14, Theorem 1.7].



**THÉORÈME 2.3.** — *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $\text{Isom}(\mathbb{R}^{2,1})$  agissant proprement discontinuement et librement sur  $\mathbb{R}^{2,1}$  avec pour partie linéaire une représentation convexe co-compacte. Alors l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{R}^{2,1}$  admet un domaine fondamental bordé par un nombre fini de plans croches.*

On peut déjà noter à ce stade que leur preuve est une conséquence assez directe de la paramétrisation des déformations expansives par les déformations en bandelettes infinitésimales — on développera ce point dans le §6.

### 3. ESPACE-TEMPS ANTI-DE SITTER

On passe maintenant de l'espace de Minkowski à l'espace anti-de Sitter, dont on va rappeler rapidement la définition et quelques propriétés essentielles.

#### 3.1. L'espace anti-de Sitter et $PSL(2, \mathbb{R})$

On note  $\mathbb{R}^{2,2}$  l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^4$  muni de la forme bilinéaire symétrique de signature  $(2, 2)$  :

$$\langle x, x' \rangle_{2,2} = x_1 x'_1 + x_2 x'_2 - x_3 x'_3 - x_4 x'_4 .$$

L'espace anti-de Sitter de dimension 3 peut se définir comme la quadrique :

$$AdS_3 = \{x \in \mathbb{R}^{2,2} \mid \langle x, x \rangle = -1\} ,$$

munie de la métrique induite. Il apparaît ainsi comme un analogue lorentzien de l'espace hyperbolique de dimension 3 : sa courbure sectionnelle est constante égale à  $-1$ , et ses plans totalement géodésiques de type espace sont isométriques au plan hyperbolique. On note que les plans totalement géodésiques de  $AdS_3$  sont les intersections avec  $AdS_3$ , vu comme une quadrique de  $\mathbb{R}^{2,2}$ , des hyperplans contenant 0.

On peut aussi identifier  $AdS_3$  avec  $PSL(2, \mathbb{R})$  muni de sa métrique de Killing bi-invariante. On a une action naturelle de  $PSL(2, \mathbb{R}) \times PSL(2, \mathbb{R})$  sur  $AdS_3$ , les deux facteurs agissant par multiplication respectivement à gauche et à droite. Vu ainsi,  $AdS_3$  rappelle la sphère  $S^3$ , qu'on peut identifier avec  $SU(2)$  muni de sa métrique de Killing bi-invariante et dont le groupe d'isométrie s'identifie (à indice fini près) avec  $O(3) \times O(3)$ .<sup>(1)</sup>

Enfin on peut voir  $AdS_3$  comme l'espace total du fibré unitaire tangent au plan hyperbolique, muni de sa métrique lorentzienne naturelle. On voit ainsi qu'il existe beaucoup de variétés AdS fermées de dimension 3 : les fibrés tangents unitaires des surfaces hyperboliques fermées. On peut vérifier que les représentations d'holonomie de ces variétés s'écrivent, dans la décomposition  $\text{Isom}_0(AdS_3) = PSL(2, \mathbb{R}) \times PSL(2, \mathbb{R})$ , sous la forme  $(\rho, 1)$ , où  $\rho$  est la représentation d'holonomie de la surface hyperbolique sous-jacente et 1 est la représentation triviale.

On dispose d'un modèle projectif de  $AdS_3$ , ou plus précisément d'un hémisphère  $AdS_{3,+}$  de  $AdS_3$ , c'est-à-dire d'un domaine fondamental pour l'action de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  qui

1. Certaines des identifications ci-dessous devront aussi s'entendre à indice 2 près.

envoie un point  $x \in AdS_3$  sur  $-x$ , dans la définition ci-dessus où  $AdS_3$  est identifié à une quadrique de  $\mathbb{R}^{2,2}$ . Ce modèle est projectif au sens où il envoie  $AdS_{3,+}$  sur l'intérieur d'un hyperboloïde à une nappe dans  $\mathbb{R}^3$ , et envoie les géodésiques de  $AdS_{3,+}$  sur les segments de droite.

Il est analogue au modèle de Klein de l'espace hyperbolique, et obtenu de la même manière : on note  $H_0$  le plan d'équation  $x_3 = 1$ , tangent à  $AdS_3$  en  $(0, 0, 1, 0)$ , et on projette tous les points de  $AdS_3$  pour lesquels  $x_3 > 0$  sur  $H_0$  dans la direction de l'origine. Ainsi  $AdS_{3,+}$  est envoyé sur l'intérieur d'un hyperboloïde à une nappe. On peut enrichir ce modèle en le voyant non pas dans  $\mathbb{R}^3$  mais dans  $\mathbb{R}P^3$  — on obtient ainsi un modèle projectif de  $AdS_3/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  — ou dans son revêtement à deux feuillets  $S^3$  — on a alors un modèle projectif de tout  $AdS_3$ .

On utilisera aussi plus bas une notion de dualité entre plans orientés de type espace et points dans  $AdS_3$ . Soit  $H \subset AdS_3$  un plan de type espace, alors  $H = AdS_3 \cap H_0$ , où  $H_0 \subset \mathbb{R}^{2,2}$  est un hyperplan dont la métrique induite est de signature  $(2, 1)$ . Si  $H$  est orienté, on en déduit une orientation de  $H_0$ . Le point  $H^*$  dual de  $H$  est défini comme la normale unitaire orientée à  $H_0$ , qui est bien dans  $AdS_3$ . On vérifie facilement que  $H^*$  est contenu dans toutes les géodésiques orthogonales à  $H$ , et qu'il se trouve à distance  $\pi/2$  de  $H$  le long de chacune de ces géodésiques.

### 3.2. Actions propres sur $AdS_3$

On comprend maintenant bien les variétés AdS fermées de dimension 3, ou du moins leurs représentations d'holonomie.

Kulkarni et Raymond [KR85] avaient montré que si  $(j, \rho)$  agit proprement discontinuement sur  $AdS_3$  sans torsion, alors (à échange des deux facteurs près)  $j$  est injective et discrète. Plus récemment, ce résultat a été précisé par Kassel, et on a le :

**THÉORÈME 3.1 (Kassel).** — *Si  $j$  est convexe co-compacte,  $(j, \rho)$  agit proprement si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes est vérifiée :*

- *il existe une application  $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$   $(j, \rho)$ -équivariante qui est  $k$ -Lipschitz pour un  $k < 1$ ,*
- *les longueurs de translation des éléments de  $\Gamma$  sont uniformément plus courtes pour  $\rho$  que pour  $j$ , au sens où*

$$\sup_{\gamma \in \Gamma, \lambda(j(\gamma)) > 0} \frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(j(\gamma))} < 1 .$$

On peut voir cet énoncé comme l'analogue du théorème 2.1 ci-dessus.

### 3.3. Topologie et sagesse des variétés anti-de Sitter

Comme pour le cas lorentzien plat décrit ci-dessus, Danciger, Guéritaud et Kassel décrivent la topologie des variétés anti-de Sitter complètes basées sur une représentation  $j$  convexe co-compacte, voir [DGK14, Theorem 1.2 (1)].

**THÉORÈME 3.2.** — *Soit  $\Gamma$  un groupe discret sans torsion, et soit  $j$  une représentation convexe co-compacte de  $\Gamma$  dans  $PSL(2, \mathbb{R})$  dont on note  $S$  la surface quotient. Soit  $\rho$  une autre représentation de  $\Gamma$  dans  $PSL(2, \mathbb{R})$  telle que  $(j, \rho)$  agit proprement sur  $AdS_3$ . Alors le quotient est un fibré en cercle dont les fibres sont des géodésiques de type temps.*

On en déduit que ces variétés anti-de Sitter sont des fibrés de Seifert sur un orbifold hyperbolique.

De plus, Danciger, Guéritaud et Kassel [DGK14, Theorem 1.9] montrent que les variétés AdS complètes obtenues à partir de deux représentations convexe co-compactes admettent un « bon » domaine fondamental, comme on l’a vu dans le théorème 2.3 pour le cas Minkowski.

La notion de plan croche dans  $AdS_3$  est similaire à celle vue plus haut dans l’espace de Minkowski. Un plan croche est donc constitué de trois parties :

- la partie centrale, qui est l’intersection du cône de lumière d’un point  $c$  avec un plan de type temps contenant  $c$ ,
- deux demi-plans de type lumière dont les bords coïncident avec les deux composantes connexes du bord de la partie centrale privée de  $c$ .

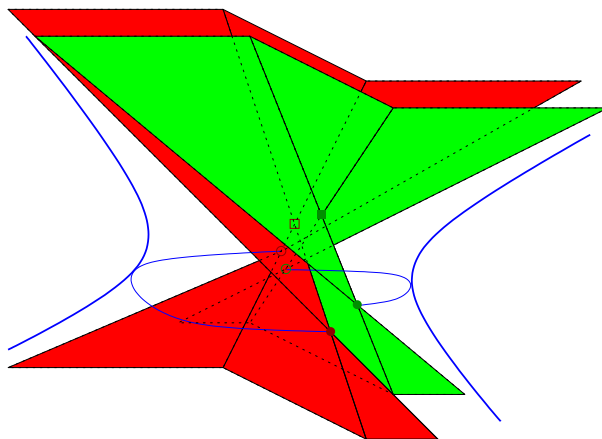


FIGURE 2. Deux plans croches disjoints dans  $AdS_3$

On a le résultat suivant [DGK14, Theorem 1.9].

**THÉORÈME 3.3** (Danciger, Guéritaud et Kassel). — *Soient  $\rho$  et  $j$  les représentations d’holonomie de deux structures convexes co-compactes sur  $S$ , telles que  $(\rho, j)$  agit proprement discontinuement sur  $AdS_3$ . Alors cette action admet un domaine fondamental bordé par des plans croches.*

La preuve est encore une conséquence de l’existence de déformations par bandelettes (non infinitésimales) des surfaces hyperboliques.

Goldman [Gol15] a remarqué que les plans croches tant Minkowski que anti-de Sitter peuvent être vus comme des restrictions des plans croches dans l’univers d’Einstein, développés par Frances [Fra03].

#### 4. DE ANTI-DE SITTER À MINKOWSKI : LA GÉOMÉTRIE TRANSITIONNELLE

On note une analogie assez forte entre la description des actions propres sur l’espace de Minkowski, en termes de décroissance de la longueur, et sur  $AdS_3$ , en termes d’application contractante équivariante. Cette analogie s’explique par l’existence d’une *géométrie transitionnelle*, qui offre une certaine continuité entre les géométries hyperbolique, Minkowski et anti-de Sitter de dimension trois.

##### 4.1. Géométrie demi-lune et géométrie Minkowski

La géométrie transitionnelle développée par Danciger fait apparaître un objet d’apparence exotique mais assez naturel, la géométrie « demi-lune ». <sup>(2)</sup> L’espace demi-lune de dimension 3,  $\mathbb{HP}^3$ , est simplement  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , muni de la métrique dégénérée  $0 \times dt^2 + h$ , où  $h$  est la métrique du plan hyperbolique.

Le groupe des isométries de  $\mathbb{HP}^3$  est de dimension infinie, puisque la métrique ne « voit » pas les translations verticales. Il existe pourtant un sous-groupe du groupe des isométries, qui joue le rôle de groupe d’isométries « restreint ». C’est le produit  $PSL(2, \mathbb{R}) \times sl(2, \mathbb{R})$ , où le facteur  $PSL(2, \mathbb{R})$  agit par « translations horizontales » agissant sur  $\mathbb{H}^2$ , et les éléments de  $sl(2, \mathbb{R})$  agissent par translations verticales proportionnelles au rotationnel du champ de Killing de  $\mathbb{H}^2$  qui leur est associé. On a aussi une notion naturelle de plans totalement géodésiques, ce sont les images par les éléments du groupe d’isométrie restreint du plan horizontal  $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ . C’est cet espace  $\mathbb{HP}^3$  qui apparaît le plus directement comme quand on considère une suite d’actions sur  $AdS_3$  qui dégènèrent d’une manière particulière.

Mais l’espace demi-lune  $\mathbb{HP}^3$  est dual de l’espace de Minkowski au sens suivant. À chaque plan de type espace  $P$  dans Minkowski, on peut déterminer un point dans  $\mathbb{HP}^3$ , déterminé par la normale unitaire à  $P$  orientée vers le futur (identifiée à un point de  $\mathbb{H}^2$ ) et la distance orientée de l’origine à  $P$ . L’angle entre deux plans correspond alors à la distance dans  $\mathbb{HP}^3$  entre les points duaux. Réciproquement, à chaque plan totalement géodésique de  $\mathbb{HP}^3$ , on associe un point de  $\mathbb{R}^{2,1}$ , et ces deux relations de dualité réciproques sont compatibles.

Cette dualité permet de considérer une action d’un groupe  $\Gamma$  sur  $\mathbb{HP}^3$  comme une action sur  $\mathbb{R}^{2,1}$ , à travers l’action de  $\Gamma$  sur les plans totalement géodésiques de  $\mathbb{HP}^3$ .

---

2. Le terme « demi-lune » est utilisé par certains adeptes francophones de la planche à roulettes pour traduire le terme anglais « half-pipe ». On gardera ici la notation  $\mathbb{HP}^3$ , qui vient du « half-pipe » anglais, pour désigner cet espace en dimension 3.

## 4.2. Trois points de vue sur la géométrie transitionnelle

La notion de géométrie transitionnelle est développée dans la thèse de Jeff Danciger [Dan13, Dan14]. Elle permet de décrire précisément une forme de continuité entre variétés hyperboliques, Minkowski et anti-de Sitter. Trois points de vue complémentaires au moins sont possibles : en termes de représentation, de géométrie projective, ou de métriques (riemanniennes ou lorentziennes suivant le cas).

**4.2.1. Transitions entre représentations et nombres de Lorentz.** — Le groupe des isométries préservant l'orientation du plan hyperbolique,  $SO(2, 1)$ , peut s'identifier avec  $PSL(2, \mathbb{R})$ .

Considérons maintenant au lieu de  $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$  l'anneau  $\mathbb{R} + \tau\mathbb{R}$ , avec  $\tau^2 = 1$ . C'est un anneau bien connu qui porte plusieurs noms distincts, on parle en particulier de nombres de Lorentz ou de nombres hyperboliques. Posons  $\omega_{\pm} = \frac{1 \pm \tau}{2}$ . On vérifie immédiatement que  $\omega_{\pm}^2 = \omega_{\pm}$ , alors que  $\omega_+ \omega_- = 0$ . Donc si  $A_+, A_- \in M_2(\mathbb{R})$ , on a

$$\det(\omega_+ A_+ + \omega_- A_-) = \omega_+ \det(A_+) + \omega_- \det(A_-) .$$

Ainsi, si  $A = \omega_+ A_+ + \omega_- A_-$ , alors  $\det(A) = 1$  si et seulement si  $\det(A_+) = \det(A_-) = 1$ . En poursuivant ce raisonnement, on voit qu'on peut identifier  $PSL(2, \mathbb{R} + \tau\mathbb{R})$  à  $PSL(2, \mathbb{R}) \times PSL(2, \mathbb{R})$ .

De plus, si  $A = \omega_+ A_+ + \omega_- A_-$  et  $B = \omega_+ B_+ + \omega_- B_-$  sont deux matrices de  $SL(2, \mathbb{R} + \tau\mathbb{R})$ , avec  $A_+, A_-, B_+, B_- \in SL(2, \mathbb{R})$ , alors

$$AB = (\omega_+ A_+ + \omega_- A_-)(\omega_+ B_+ + \omega_- B_-) = \omega_+ A_+ B_+ + \omega_- A_- B_- .$$

La structure produit de  $PSL(2, \mathbb{R} + \tau\mathbb{R})$  correspond donc à celle de  $PSL(2, \mathbb{R}) \times PSL(2, \mathbb{R})$ .

On peut donc identifier  $\text{Isom}_0(AdS_3)$  avec  $PSL(\mathbb{R} + \tau\mathbb{R})$ . On note au passage que l'injection canonique de  $PSL(2, \mathbb{R})$  dans  $PSL(2, \mathbb{R} + \tau\mathbb{R})$  a pour image la diagonale dans  $PSL(2, \mathbb{R}) \times PSL(2, \mathbb{R})$ .

Remplaçons maintenant  $\mathbb{R} + \epsilon\mathbb{R}$ , avec  $\epsilon^2 = 0$ . Soit  $A_0, A_1 \in M_2(\mathbb{R})$ , alors

$$\det(A_0(I + \epsilon A_1)) = \det(A_0)(1 + \epsilon \text{tr}(A_1)) ,$$

et donc  $\det(A_0(I + \epsilon A_1)) = 1$  si et seulement si  $\det(A_0) = 1$  et  $\text{tr}(A_1) = 0$ . On peut donc identifier  $SL(2, \mathbb{R} + \epsilon\mathbb{R})$  avec  $SL(2, \mathbb{R}) \times sl(2, \mathbb{R})$ .

De plus, si  $A_0(I + \epsilon A_1), B_0(I + \epsilon B_1) \in SL(\mathbb{R} + \epsilon\mathbb{R})$ , alors

$$A_0(I + \epsilon A_1)B_0(I + \epsilon B_1) = A_0 B_0 + \epsilon(A_0 A_1 B_0 + A_0 B_0 B_1) = A_0 B_0(I + \epsilon(B_0^{-1} A_1 B_0 + B_1)) ,$$

et on retrouve la multiplication du produit semi-direct. En poursuivant, on obtient ainsi  $\text{Isom}_0(\mathbb{R}^{2,1})$  avec  $PSL(2, \mathbb{R}) \ltimes sl(2, \mathbb{R})$ .

Considérons maintenant une famille régulière à un paramètre  $(j(t), \rho(t))$  de morphismes de  $\Gamma$  dans  $PSL(2, \mathbb{R}) \times PSL(2, \mathbb{R})$ , où  $\Gamma$  est le groupe fondamental d'une surface  $S$  (à bord), et supposons que  $\rho(0) = j(0)$ . Posons  $u(t) = \omega_+ j(t) + \omega_-(t) \rho$ , on a alors

$$u(t) = (j(t) + \rho(t))/2 + \tau(j(t) - \rho(t))/2 .$$

Si on pose  $v = (j(t) - \rho(t))'(0)/2$ , alors  $v$  est un 1-cocycle pour  $u(0)$ , et  $u(0) + \epsilon v$  détermine une représentation de  $\Gamma$  dans  $PSL(2, \mathbb{R} + \epsilon\mathbb{R})$ . Inversement, si on se donne une représentation  $u$  de  $\Gamma$  dans  $PSL(2, \mathbb{R})$  et un 1-cocycle  $v$  pour  $u$ , on obtient pour  $t$  petit une paire de représentations  $u \exp(-tv)$  et  $u \exp(tv)$  à valeurs dans  $PSL(2, \mathbb{R})$ , et donc une représentation de  $\Gamma$  dans  $\text{Isom}_0(\text{AdS}_3)$ .

Un point essentiel est que la condition pour que  $(j(t), \rho(t))$  agisse proprement sur  $\text{AdS}_3$  est que (quitte à échanger les facteurs) les longueurs de translation de tous les éléments de  $\Gamma$  soient uniformément plus petites pour  $\rho$  que pour  $j$ . Pour les représentations dans  $\text{Isom}_0(\mathbb{R}^{2,1})$ , la condition correspondante est que le cocycle de déformation raccourcisse uniformément les longueurs de translation de tous les éléments de  $\Gamma$ . Les deux conditions correspondent parfaitement, et la « dérivée en 0 » d'une famille à un paramètre d'actions propres sur  $\text{AdS}_3$ , telle que les deux représentations coïncident à la limite  $t \rightarrow 0$ , fournit une action propre sur  $\mathbb{R}^{2,1}$ , et réciproquement.

On voit dans cette description que, dans la représentation à valeur dans  $PSL(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  obtenue à la limite, la composante dans  $PSL(2, \mathbb{R})$  correspond à la limite en 0 des deux représentations  $j(t)$  et  $\rho(t)$ , alors que le cocycle à valeurs dans  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  décrit les différences entre les dérivées en 0 de  $j$  et  $\rho$ . La même interprétation est apparente dans les autres descriptions données ci-dessous, on n'y reviendra pas.

**4.2.2. Transitions projectives.** — On peut aussi donner un point de vue projectif sur les transitions géométriques. Soit encore  $(j(t), \rho(t))_{t \in ]0,1]}$  une famille à un paramètre d'actions de  $\Gamma$  sur  $\text{AdS}_3$ . Pour  $t \in ]0,1]$ , on peut voir  $(j(t), \rho(t))$  comme une action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{R}P^3$  qui préserve une quadrique de signature  $(1, 1)$ , qui n'est autre que le bord à l'infini de  $\text{AdS}_3$  dans le modèle projectif décrit au §3.1.

Supposons que pour  $t \rightarrow 0$ ,  $(j(t), \rho(t))$  stabilise un plan de type espace  $H \subset \text{AdS}_3$ . Alors l'action limite  $(j(0), \rho(0))$  sur  $\mathbb{R}P^3$  stabilise  $\partial\text{AdS}_3$  ainsi que  $\partial P$  (le bord à l'infini de  $P$  vu comme sous-ensemble de  $\partial\text{AdS}_3$ ) et il stabilise donc l'enveloppe des plans tangents à  $\partial\text{AdS}_3$  le long de  $\partial P$ , enveloppe qui borde un « cylindre »  $C$ . (Ce « cylindre »  $C$  n'est autre, en termes de géométrie AdS, que le domaine de dépendance de  $P$ .)

Or  $C$  est naturellement un modèle projectif de  $\mathbb{H}P^3$ , on peut le voir en considérant la métrique de Hilbert de  $C$ , qui est bien une métrique dégénérée dont la restriction aux intersections de  $C$  avec presque tous les plans est une métrique hyperbolique.

On obtient ainsi pour  $t = 0$  une action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}P^3$ , qui peut être vue comme une action sur  $\mathbb{R}^{2,1}$  grâce à la dualité mentionnée au §4.1.

On note que cette description s'applique de la même manière pour une famille d'actions sur l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$ , lorsque la limite laisse stable un plan totalement géodésique.

**4.2.3. Transitions entre métriques.** — On se place ici encore dans le cas où, pour  $t \rightarrow 0$ ,  $(j(t), \rho(t))$  stabilise un plan de type espace  $H \subset \text{AdS}_3$ , et converge vers une action sur  $H$ . On peut considérer une suite d'applications du domaine de dépendance de  $H$  à valeurs dans  $H \times ]-f(t), f(t)[$ , avec  $f(t) \rightarrow \infty$  quand  $t \rightarrow 0$ , qui envoie sur les lignes verticales  $\{x\} \times ]-f(t), f(t)[$  les segments géodésiques de longueur  $\pi$  orthogonaux

à  $H$  dans  $AdS_3$ . Si on choisit convenablement la normalisation dans le facteur vertical, on peut obtenir à la limite une action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}\mathbb{P}^3$ .

**4.2.4. Autres points de vue.** — D'autres points de vue encore sont possibles sur la géométrie transitionnelle. Danciger [Dan14] utilise des triangulations idéales et les paramétrisations des espaces de représentations qui leurs sont associées. Un autre point de vue encore, utilisé par exemple dans [BS12, Appendix 2], consiste à « zoomer » sur le point dual dans  $AdS_3$  (resp. dans l'espace de Sitter  $dS_3$ ) du plan totalement géodésique laissé invariant par la limite d'une famille d'actions sur  $AdS_3$  (resp.  $\mathbb{H}^3$ ), pour voir apparaître une action sur  $\mathbb{R}^{2,1}$ .

### 4.3. Régénération d'espace-temps de Margulis en actions sur $AdS_3$

En utilisant ces notions de géométrie transitionnelles, Danciger, Guéritaud et Kassel [DGK13, Theorem 1.4] décrivent comment la représentation d'holonomie d'un espace-temps de Margulis peut se « régénérer » en une action propre sur  $AdS_3$ .

**THÉORÈME 4.1.** — *Soit  $M = (j, u)(\Gamma) \backslash \mathbb{R}^{2,1}$  un espace-temps de Margulis tel que  $S = j(\Gamma) \backslash \mathbb{H}^2$  est une surface hyperbolique convexe co-compacte. Soient  $t \rightarrow j_t$  et  $t \rightarrow \rho_t$  des applications régulières telles que  $j_0 = \rho_0 = j$  et que  $\frac{d}{dt}|_{t=0} \rho_t j_t^{-1} = u$ . Alors :*

- pour tout  $t > 0$  assez petit,  $(j_t, \rho_t)(\Gamma)$  agit proprement discontinuement sur  $AdS_3$ ,
- il existe une famille régulière de difféomorphismes  $(j_t, \rho_t)$ -invariants de  $H^2 \times S^1$  dans  $AdS_3$ , définis pour  $t > 0$  assez petit, déterminant des structures AdS complètes  $\mathcal{A}_t$  sur la variété fixée  $S \times S^1$ ,
- les structures projectives réelles  $\mathcal{P}_t$  sous-jacentes à  $\mathcal{A}_t$  convergent quand  $t \rightarrow 0$  vers une structure projective réelle sur  $S \times S^1$ , et l'espace-temps de Margulis  $M$  est la restriction de  $\mathcal{P}_0$  à  $S \times ]-\pi, \pi[$ .

Danciger, Guéritaud et Kassel en déduisent un autre énoncé plus « métrique » qui met en évidence le rôle des géodésiques de type temps dans la convergence [DGK13, Corollary 1.5]

**COROLLAIRE 4.2.** — *Sous les hypothèses du théorème précédent, il existe une famille de métriques AdS complètes  $(g_t)_{t \in [0, \epsilon]}$  sur  $S \times S^1$  telles que les restrictions des  $g_t$  à  $S \times ]-\pi, \pi[$  convergeant uniformément sur les compacts vers une métrique lorentzienne plate  $g$  telle que  $(S \times ]-\pi, \pi[, g)$  est isométrique à  $M$ .*

## 5. GÉODÉSIIQUES DE TYPE TEMPS

Dans cette section, on introduit quelques propriétés des géodésiques de type temps dans les variétés anti-de Sitter, qui permettent de mieux comprendre les critères de propriété des théorèmes 3.1 et 2.1, ainsi que l'existence d'un feuilletage par des géodésiques de type temps pour les quotients de  $AdS_3$  par les groupes agissant proprement.

### 5.1. Géodésiques de type temps dans $AdS_3$

On a vu qu'on peut identifier  $AdS_3$  avec  $PSL(2, \mathbb{R})$  muni de sa métrique de Killing, lorentzienne et bi-invariante. Dans cette identification, on vérifie sans difficulté que l'ensemble des rotations de  $\mathbb{R}^2$  forme une géodésique de type temps. Si on identifie  $PSL(2, \mathbb{R})$  avec les isométries du plan hyperbolique, on en déduit que chaque géodésique de type temps correspond à l'ensemble des isométries qui envoient  $x$  sur  $y$ , où  $x$  et  $y$  sont deux points donnés de  $\mathbb{H}^2$ . On peut donc identifier l'espace  $\mathcal{G}$  des géodésiques de type temps de  $AdS_3$  avec  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ .

Un autre point de vue, plus local, est possible (et utilisé dans [BBS14]). On peut définir deux connexions  $D^l, D^r$  sur le fibré des vecteurs unitaires de type temps de  $AdS_3$  de la manière suivante. Soit  $n$  un champ de vecteurs unitaire de type temps, et soit  $x$  un vecteur quelconque ; on pose :

$$D_x^l n = \nabla_x n + x \times n, \quad D_x^r n = \nabla_x n - x \times n,$$

où  $\nabla$  est la connexion de Levi-Civita de  $AdS_3$  et  $\times$  désigne le produit vectoriel lorentzien. On vérifie alors par un calcul direct (voir [BBS14]) que  $D^l$  et  $D^r$  sont des connexions plates et nulles le long du flot géodésique. On obtient ainsi deux projections de l'espace des géodésiques de type temps de AdS sur l'espace des vecteurs unitaires de type temps en un point, lui-même identifié au plan hyperbolique.

Un troisième point de vue peut être utile, et sera utilisé dans le §6.2. Il fournit une application explicite qui à une géodésique  $\delta \subset AdS_3$  de type temps associe un couple de points dans  $\mathbb{H}^2$ , identifié à un plan totalement géodésique fixé  $H_0 \subset AdS_3$ . La construction repose sur le fait que  $\partial_\infty AdS_3$ , vu comme une quadrique dans  $\mathbb{R}^3$  par le modèle projectif décrit au §3.1, est feuilleté par deux familles de droites. On parlera des feuilletages gauche et droit.

(Un autre point de vue encore est développé dans [KS07], en termes de deux métriques hyperboliques définies sur des surfaces de type espace « pas trop courbées » dans une variété anti-de Sitter.)

### 5.2. Feuilletages géodésiques et difféomorphismes de $\mathbb{H}^2$

Considérons une famille à un paramètre de géodésiques de type temps,  $(c_t)_{t \in [0,1]}$ . Soient  $c_l(t)$  et  $c_r(t)$  les projections sur les facteurs dans l'identification de l'espace des géodésiques  $\mathcal{G}$  avec  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ . Un calcul immédiat utilisant les connexions  $D^l$  et  $D^r$  introduites ci-dessus permet de montrer le :

LEMME 5.1. — *Il existe  $x \in c(0)$  dont la distance à  $c(t)$  a une dérivée nulle par rapport à  $t$  en  $t = 0$  si et seulement si  $\|c'_l(0)\| = \|c'_r(0)\|$ .*

Heuristiquement, cette propriété correspond au fait que  $c(t)$  a une intersection avec  $c(0)$  au premier ordre en  $t = 0$ .

On considère maintenant un difféomorphisme  $\phi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ . On peut voir son graphe dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  comme une famille à deux paramètres de géodésiques de type temps dans  $AdS_3$ ,  $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ . Une conséquence directe du lemme 5.1 est que  $\mathcal{F}$  est localement



un feuilletage de  $AdS_3$  dès que  $\phi$  est strictement contractante (ou dilatante), c'est-à-dire si la norme de sa différentielle est partout inférieure à  $k < 1$ . En poursuivant ce raisonnement, on peut montrer que, sous cette hypothèse,  $\mathcal{F}$  est en fait un feuilletage de  $AdS_3$ .

Soit maintenant  $(j, \rho)$  une action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$  telle que  $j$  est convexe co-compacte. Supposons que  $\phi$  est équivariante pour  $(j, \rho)$ , alors  $\mathcal{F}$  est invariant sous l'action de  $\Gamma$ , si bien que  $\Gamma$  agit sur l'espace des feuilles de  $\mathcal{F}$ . Comme  $j$  agit proprement, cette action est propre. On peut alors en déduire assez directement que l'action de  $\Gamma$  sur  $AdS_3$  est elle aussi propre.

### 5.3. Géodésiques de type temps dans $\mathbb{R}^{2,1}$

Comme dans  $AdS_3$ , on peut identifier l'espace  $\mathcal{G}_0$  des géodésiques de type temps dans  $\mathbb{R}^{2,1}$  avec l'espace total  $T\mathbb{H}^2$  du fibré tangent au plan hyperbolique. Considérons pour cela un point  $(n, v) \in T\mathbb{H}^2$ , c'est-à-dire que  $n \in \mathbb{H}^2$  et que  $v \in T_n\mathbb{H}^2$ . On peut voir  $n$  comme un vecteur unitaire de type temps orienté vers le futur dans  $\mathbb{R}^{2,1}$ , et  $v$  comme un vecteur de type espace orthogonal à  $n$ . On associe alors à  $(n, v)$  l'unique droite de type temps parallèle à  $n$  et passant par  $n \times v$ , où  $\times$  désigne le produit vectoriel usuel de l'espace de Minkowski.

On a dans ce contexte un analogue direct du lemme 5.1. Considérons une famille à un paramètre de géodésiques de type temps  $D_t \subset \mathbb{R}^{2,1}$ , et la famille à un paramètre correspondante  $(n(t), v(t)) \in T\mathbb{H}^2$ , pour  $t \in [0, 1]$ . Un calcul facile montre qu'il n'y a pas d'intersection au premier ordre entre  $D_0$  et  $D_t$  (quand  $t \rightarrow 0$ ) si et seulement si

$$\left\langle n'(0), \frac{\nabla v(t)}{dt} \Big|_{t=0} \right\rangle \neq 0,$$

où  $\langle, \rangle$  désigne le produit scalaire riemannien du plan hyperbolique et  $\nabla$  est sa connexion de Levi-Civita.

Si maintenant  $v$  est un champ de vecteurs  $\epsilon$ -contractant du plan hyperbolique, alors la dérivée de Lie de la métrique hyperbolique  $h$  sous  $v$  est

$$\mathcal{L}_v h(x, x) = 2\langle x, \nabla_x v \rangle$$

si bien que les géodésiques de type temps correspondant à  $v$  sont localement disjointes. On peut poursuivre ce raisonnement et montrer que, si  $v$  est uniformément contractant, alors il détermine un feuilletage de  $\mathbb{R}^{2,1}$  par des géodésiques de type temps.

On peut ensuite procéder comme dans  $AdS_3$  pour montrer que l'existence d'un champ de vecteurs  $v$  qui est  $(j, \tau)$ -équivariant  $\epsilon$ -contractant assure la propriété de l'action  $(j, \tau)$  de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{R}^{2,1}$ , lorsque  $j$  est convexe co-compacte. En effet on associe à  $v$  un feuilletage  $\mathcal{F}_0$  de  $\mathbb{R}^{2,1}$  par des géodésiques de type temps, feuilletage qui est invariant sous l'action de  $\Gamma$  lorsque  $v$  est  $(j, \tau)$ -équivariant. Puis on montre que l'action de  $\Gamma$  sur l'espace des feuilles est propre. On en déduit ensuite que l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{R}^{2,1}$  est elle aussi propre.

## 6. DÉFORMATIONS EN BANDELETTES ET PLANS CROCHES

On va illustrer ici la relation entre déformations en bandelettes (resp. déformations en bandelettes infinitésimales) et domaines fondamentaux bordés par des plans croches dans  $AdS_3$  (resp. dans  $\mathbb{R}^{2,1}$ ), relation qui conduit aux preuves des théorèmes 3.3 et 2.3.

### 6.1. Bandelettes infinitésimales et plans croches dans Minkowski

On décrit d'abord le cas plat, qui est à la fois un peu plus simple et surtout plus facile à se représenter.

Considérons d'abord le cas le plus simple d'une déformation par bandelette infinitésimale agissant sur  $\mathbb{H}^2$ , sans action de groupe, avec une seule bandelette infinitésimale. Il s'agit donc simplement d'un champ de vecteurs  $v$  discontinu sur  $\mathbb{H}^2$ , qui est :

- nul à gauche d'une géodésique orientée  $\delta \subset \mathbb{H}^2$ ,
- égal, à droite de  $\delta$ , à une translation hyperbolique infinitésimale  $\alpha$  d'axe orthogonal à  $\delta$ .

On note  $c$  l'intersection de  $\delta$  et de l'axe de  $\alpha$ , et  $u$  le vecteur tangent à  $\delta$  en  $c$  de longueur égale à la longueur de  $v(c)$ , vu comme un vecteur dans  $\mathbb{R}^{2,1}$ . Ainsi, à gauche de  $\delta$ ,  $v$  s'écrit simplement sous la forme  $v(x) = u \times x$ , où  $\times$  est le produit vectoriel naturel de  $\mathbb{R}^{2,1}$ .

On a vu au §5.3 qu'on peut associer à  $(x, v(x)) \in T\mathbb{H}^2$  la géodésique de type temps dirigée par  $x$  et passant par  $x \times v(x)$ . Ici  $x \times v(x) = x \times (u \times x)$  est simplement le projeté orthogonal de  $u$  sur le plan orthogonal à  $x$ , et on en déduit la description suivante :

- lorsque  $x$  est à gauche de  $\delta$ , on associe à  $(x, v(x))$  la droite passant par 0 parallèle à  $x$ ,
- si  $x$  est à droite de  $\delta$ , on associe à  $(x, v(x))$  la droite passant par  $u$  et parallèle à  $x$ .

On voit ainsi apparaître naturellement deux plans croches gauches, dont les centres sont respectivement en 0 et en  $u$  et les parties centrales sont parallèles à  $\delta$ . On remarque que ces deux plans croches bordent des régions disjointes de  $\mathbb{R}^{2,1}$ . (Leurs parties centrales sont contenues dans un même plan de type temps contenant 0 et  $u$ .)

Considérons maintenant une surface hyperbolique convexe co-compacte  $S$  munie d'une déformation en bandelette infinitésimale. On peut relever cette déformation en un champ de vecteurs  $v$  sur  $\mathbb{H}^2$ , vu comme le revêtement universel de  $S$ . Alors  $v$  est discontinu le long d'une famille (infinie) de géodésiques disjointes, et la description ci-dessus s'applique pour chacune des géodésiques de cette famille. On en déduit une famille de plans croches gauches — deux plans croches pour chaque géodésique, chacun étant l'image de l'autre par une translation — et on peut vérifier sans grande difficulté que des plans croches associés à des géodésiques distinctes sont disjointes.

Il reste à voir qu'on peut sélectionner une partie de ces plans croches pour obtenir le bord d'un domaine fondamental pour l'action du groupe fondamental de  $S$  sur  $\mathbb{R}^{2,1}$ , il faut pour cela choisir une famille de géodésiques qui bordent un domaine fondamental de  $\mathbb{H}^2$  pour la représentation d'holonomie de  $S$ .

## 6.2. Bandelettes et plans croches dans $AdS_3$

On peut reprendre le même schéma pour les déformations non infinitésimales, et considérer d’abord une déformation en bandelette très simple de  $\mathbb{H}^2$  avec une seule bandelette. C’est une application discontinue  $\phi$  de  $\mathbb{H}^2 \setminus \delta$  dans  $\mathbb{H}^2$ , où  $\delta$  est encore une géodésique orientée, qui est :

- l’identité à gauche de  $\delta$ ,
- égale, à droite de  $\delta$ , à une translation hyperbolique  $\alpha$  d’axe orthogonal à  $\delta$ , qui intersecte  $\delta$  en un point  $c$ .

On appelle  $B$  la bandelette comprise entre  $\delta$  et  $\alpha(\delta)$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{H}^2 \setminus B$ , on associe à  $(x, \phi(x))$  une géodésique temps  $\gamma(x)$  de  $AdS_3$  en suivant la construction de la fin du §5.1, en identifiant  $\mathbb{H}^2$  au plan  $H_0 \subset AdS_3$  qui y intervient. On vérifie sans difficulté, en utilisant l’une des identifications entre géodésiques de type temps et paires de points de  $\mathbb{H}^2$  du §3.1, que :

- si  $x$  est à gauche de  $\delta$ , alors  $\gamma(x)$  est la géodésique orthogonale à  $H_0$  passant par  $x$ . Ces géodésiques feuillettent une moitié du cône de lumière  $C(c_0)$  de  $c_0 = H_0^*$ , le point dual de  $H_0$ , délimitée par un plan de type temps  $T$  contenant  $c_0$  et  $\delta$  ;
- si  $x$  est à droite de  $\delta$ ,  $\gamma(x)$  est une géodésique de type temps passant par un point  $c_1$  de  $T$ , obtenu à partir de  $c_0$  par une translation d’axe orthogonal à la géodésique joignant  $c_0$  et  $c$  et de longueur égale à la largeur de la bandelette. Ces géodésiques feuillettent une moitié du cône de lumière  $C(c_1)$  de  $c_1$  délimitée par  $T$ , mais de l’autre côté de la région feuilletée par les  $\gamma(x)$  pour  $x$  à gauche de  $\delta$ .

Comme dans le cas Minkowski, on voit donc apparaître deux plans croches gauches : celui dont la partie centrale est l’intersection avec  $T$  de  $C(c_0)$ , et celui dont la partie centrale est l’intersection avec  $T$  de  $C(c_1)$ . Ces deux plans croches bordent des domaines disjoints de  $AdS_3$ .

Considérons maintenant une déformation en bandelettes d’une surface convexe compacte  $S$ . On peut relever cette déformation en une déformation en bandelettes de  $\mathbb{H}^2$ , équivariante sous deux représentations. Cette déformation se produit le long d’une famille (infinie) de géodésiques de  $\mathbb{H}^2$ , avec une bandelette introduite le long de chaque géodésique. On associe à chaque bandelette une paire de plans croches dans  $AdS_3$ , et deux plans croches associés à des géodésiques distinctes sont disjoints. En sélectionnant une partie de ces plans croches comme dans le cas de l’espace de Minkowski, on obtient un domaine fondamental pour l’action sur  $AdS_3$  de  $(j, \rho)$ , où  $\rho$  est la représentation d’holonomie de  $S$  et  $j$  est la représentation d’holonomie de la structure hyperbolique obtenue après la déformation en bandelettes.

## RÉFÉRENCES

- [ABB<sup>+</sup>07] L. Andersson, T. Barbot, R. Benedetti, F. Bonsante, W.M. Goldman, F. Labourie, K.P. Scannell & J.-M. Schlenker. Notes on : « Lorentz spacetimes of constant curvature » [Geom. Dedicata **126** (2007), 3–45 ; mr2328921] by G. Mess. *Geom. Dedicata* 126 (2007), 47–70.
- [AMS12] H. Abels, G. Margulis & G. Soifer. The Auslander conjecture for dimension less than 7. *ArXiv e-prints*, Novembre 2012.
- [Aus65] L. Auslander. An account of the theory of crystallographic groups. *Proc. Amer. Math. Soc.* 16 (1965), 1230–1236.
- [BBS14] T. Barbot, F. Bonsante & J.-M. Schlenker. Collisions of particles in locally AdS spacetimes II. Moduli of globally hyperbolic spaces. *Comm. Math. Phys.* 327 (2014), 691–735.
- [BKS11] F. Bonsante, K. Krasnov & J.-M. Schlenker. Multi-black holes and earthquakes on Riemann surfaces with boundaries. *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2011 (2011), 487–552.
- [BS12] F. Bonsante & J.-M. Schlenker. Fixed points of compositions of earthquakes. *Duke Math. J.* 161 (2012), 1011–1054.
- [CDG10] V. Charette, T.A. Drumm & W.M. Goldman. Affine deformations of a three-holed sphere. *Geom. Topol.* 14 (2010), 1355–1382.
- [CDG14] V. Charette, T.A. Drumm & W.M. Goldman. Finite-sided deformation spaces of complete affine 3-manifolds. *J. Topol.* 7 (2014), 225–246.
- [CG12] S. Choi & W.M. Goldman. Topological tameness of Margulis spacetimes. *ArXiv e-prints*, Avril 2012.
- [Dan13] J. Danciger. A geometric transition from hyperbolic to anti-de Sitter geometry. *Geom. Topol.* 17 (2013), 3077–3134.
- [Dan14] J. Danciger. Ideal triangulations and geometric transitions. *J. Topol.* 7 (2014), 1118–1154.
- [DG90] T.A. Drumm & W.M. Goldman. Complete flat Lorentz 3-manifolds with free fundamental group. *Internat. J. Math.* 1 (1990), 149–161.
- [DG99] T.A. Drumm & W.M. Goldman. The geometry of crooked planes. *Topology* 38 (1999), 323–351.
- [DGK13] J. Danciger, F. Guéritaud & F. Kassel. Geometry and topology of Lorentz spacetimes of constant curvature. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 2013. arxiv :1306.2240, à paraître.
- [DGK14] J. Danciger, F. Guéritaud & F. Kassel. Margulis spacetimes via the arc complex. *prépublication*, 2014. arxiv :1407.5422.
- [DW08] D. Dumas & M. Wolf. Projective structures, grafting and measured laminations. *Geom. Topol.* 12 (2008), 351–386.

- [FG83] D. Fried & W.M. Goldman. Three-dimensional affine crystallographic groups. *Adv. Math.* 47 (1983), 1–49.
- [FN03] W. Fenchel & J. Nielsen. *Discontinuous groups of isometries in the hyperbolic plane*, volume 29 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2003. Edited and with a preface by Asmus L. Schmidt, Biography of the authors by Bent Fuglede.
- [Fra03] C. Frances. The conformal boundary of Margulis space-times. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 336 (2003), 751–756.
- [GLM09] W.M. Goldman, FF. Labourie & F. Margulis. Proper affine actions and geodesic flows of hyperbolic surfaces. *Ann. of Math. (2)* 170 (2009), 1051–1083.
- [GM00] W.M. Goldman & G.A. Margulis. Flat Lorentz 3-manifolds and cocompact Fuchsian groups. In *Crystallographic groups and their generalizations (Kortrijk, 1999)*, volume 262 of *Contemp. Math.*, pages 135–145. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [Gol15] W.M. Goldman. Crooked surfaces and anti-de Sitter geometry. *Geom. Dedicata* 175 (2015), 159–187.
- [Ker83] S.P. Kerckhoff. The Nielsen realization problem. *Ann. of Math. (2)*, 117 (1983), 235–265.
- [KR85] R.S. Kulkarni & F. Raymond. 3-dimensionnal lorentz space-forms and seifert fiber spaces. *J. Differential Geom.* 21 (1985), 231–268.
- [KS07] K. Krasnov & J.-M. Schlenker. Minimal surfaces and particles in 3-manifolds. *Geom. Dedicata*, 126 (2007), 187–254.
- [Mar83] G.A. Margulis. Free completely discontinuous groups of affine transformations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 272 (1983), 785–788.
- [Mar84] G.A. Margulis. Complete affine locally flat manifolds with a free fundamental group. *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 134 (1984), 190–205. Automorphic functions and number theory, II.
- [Mes07] G. Mess. Lorentz spacetimes of constant curvature. *Geom. Dedicata* 126 (2007), 3–45.
- [Mil77] J. Milnor. On fundamental groups of complete affinely flat manifolds. *Adv. Math.* 25 (1997), 178–187.

Jean-Marc SCHLENKER

Université du Luxembourg

Campus Kirchberg

Unité de Recherche en Mathématiques

6, rue Richard Coudenhove-Kalergi

L-1359 Luxembourg

*E-mail* : jean-marc.schlenker@uni.lu