Séminaire BOURBAKI Novembre 2015
68ème année, 2015-2016, n° 1104

GROUPES DE GALOIS MOTIVIQUES ET PÉRIODES

par **Yves ANDRÉ**

INTRODUCTION

0.1. Périodes

Les intégrales abéliennes sont des intégrales de 1-formes différentielles rationnelles sur une courbe algébrique. Elles dépendent du chemin choisi entre les extrémités ; pour les formes sans pôle, les ambiguïtés sont appelées *périodes abéliennes* car ce sont les (composantes des) périodes des fonctions abéliennes attachées à la courbe, par inversion d'Abel-Jacobi.

Bien que l'interprétation de telles intégrales comme périodes de fonctions fasse défaut en dimension supérieure, le terme de *période* a fini, sur le mode synecdotique, par désigner en géométrie algébrique toute intégrale $\int_\Delta \omega$ d'une n-forme algébrique ω prise sur un domaine Δ limité par des équations algébriques (pour $n = 1$, on retrouve les intégrales abéliennes). Dans une tradition qui remonte à Euler, Legendre et Gauss, deux cas particuliers ont pris une importance considérable :

– le « cas arithmétique », formalisé dans [K-Z] : il s'agit de nombres complexes dont les parties réelle et imaginaire sont de la forme $\int_\Delta \omega$, où ω est une forme différentielle rationnelle sur une variété algébrique X définie sur le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, et où $\Delta \subset X(\mathbb{R})$ est défini par des inégalités polynomiales à coefficients dans $\mathbb{Q}$;

– le « cas fonctionnel » : il s'agit de périodes de formes différentielles dépendant algébriquement d'un paramètre t ou de plusieurs, le corps des constantes étant $\mathbb{C}$. Ces fonctions « multiformes » sont holonomes à croissance modérée (solutions d'équations différentielles linéaires à coefficients dans $\mathbb{C}(t)$ à singularités régulières), fait qui généralise le lien découvert par Gauss entre moyenne arithmético-géométrique et équation différentielle hypergéométrique.

0.2. Relations de périodes

Dans l'expression $\int_\Delta \omega$ d'une période, seul le signe $\int$ n'est pas de nature algébrique, et l'on s'attend de fait à ce que les périodes soient en général, dans l'un ou l'autre cas, des nombres ou des fonctions transcendant(e)s.

On peut s'interroger sur les exceptions [1], et plus généralement sur la nature des relations polynomiales entre périodes (à coefficients dans $\mathbb{Q}$ dans le cas arithmétique, dans $\mathbb{C}(t)$ dans le cas fonctionnel). Les transformations d'une expression $\int_\Delta \omega$ qu'on obtient en jouant avec les propriétés formelles de $\int$, – à savoir la bilinéarité en (Δ, ω), la multiplicativité (Fubini), le changement de variable algébrique $\int_\Delta f^*\omega = \int_{f_*\Delta} \omega$, et la formule de Stokes $\int_\Delta d\omega = \int_{\partial\Delta} \omega$ –, donnent tautologiquement lieu à des relations polynomiales entre périodes.

Une réponse très leibnizienne à la question serait alors le philosophème : « *les propriétés formelles de $\int$ constituent la raison suffisante des relations polynomiales entre périodes* ». Cette réponse a d'abord été proposée par M. Kontsevich, dans le cas arithmétique, sous forme d'une conjecture précise [K1], illustrée de maint exemple en collaboration avec D. Zagier [K-Z].

Tout récemment, J. Ayoub a montré que la même réponse vaut dans le cas fonctionnel, cette fois sous forme d'un théorème, que voici. Notons

– $\mathcal{O}(\bar{\mathbb{D}}^n)$ l'algèbre des fonctions analytiques au voisinage du polydisque unité fermé $|z_i| \leq 1 \, (i = 1, \ldots, n)$,

– $\mathcal{O}^\dagger_{alg}(\bar{\mathbb{D}}^n)$ le sous-espace de $\mathcal{O}(\bar{\mathbb{D}}^n)((t))$ formé des séries $\sum_{i>>-\infty} h_i(z_1, \ldots, z_n)t^i$ qui sont algébriques sur $\mathbb{C}(z_1, \ldots, z_n, t)$, et $\mathcal{O}^\dagger_{alg}(\bar{\mathbb{D}}^\infty) = \cup\, \mathcal{O}^\dagger_{alg}(\bar{\mathbb{D}}^n)$.

Théorème 0.1 ([Ay5] th. 1.8). — *Le noyau de l'application $\mathbb{C}$-linéaire*

$$\sum h_i\, t^i \in \mathcal{O}^\dagger_{alg}(\bar{\mathbb{D}}^\infty) \;\mapsto\; \sum (\int_{[0,1]^\infty} h_i)\, t^i \in \mathbb{C}((t))$$

est engendré par les éléments de la forme

$$\frac{\partial g}{\partial z_i} - g_{|z_i=1} + g_{|z_i=0} \quad et \quad (f - \int_{[0,1]^\infty} f)\, h$$

où $i \in \mathbb{N} \setminus 0$, $f, g, h \in O^\dagger_{alg}(\bar{\mathbb{D}}^\infty)$, f ne dépend pas de t, et f et h ne dépendent pas simultanément d'une même variable.

0.3. Groupes de Galois motiviques

Ceci repose sur de remarquables progrès en *théorie de Galois motivique* [2], dus principalement à M. Nori et surtout J. Ayoub.

1. à l'instar de Leibniz, correspondant avec Huygens à propos du lemme XXVIII des Principia de Newton sur les aires de secteurs d'ovales (cf. e.g. [Va][Wu]). En langage moderne, ce lemme affirme qu'une telle aire (qui est une période dans le cas d'un ovale algébrique) n'est pas algébrique en les paramètres des droites découpant le secteur. Newton l'applique au cas de la trajectoire elliptique d'une planète et en déduit, via la seconde loi de Kepler, que sa position ne dépend pas de manière algébrique du temps.

2. la puissance de la théorie motivique dans les questions de relations de périodes a déjà été mise en évidence dans les travaux de F. Brown [Bro] sur les nombres polyzêta (qui sont des périodes), récemment recensés dans ce séminaire [D4].

Soit k un sous-corps de $\mathbb{C}$. Selon A. Grothendieck, il devrait exister une catégorie abélienne $\mathbb{Q}$-linéaire de motifs mixtes sur k, notée $\mathbf{MM}(k)$, présentant les trois caractéristiques suivantes :

1) être le réceptacle d'une « cohomologie universelle » ; d'où un foncteur « réalisation de Betti » $H_B : \mathbf{MM}(k) \to \mathrm{Vec}_{\mathbb{Q}}$ vers les espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{Q}$, qui factorise la cohomologie de Betti,

2) être « de nature géométrique » : ses morphismes devraient être construits « en partant de » correspondances algébriques,

3) être dotée d'un produit tensoriel compatible au produit des variétés, qui en fasse une catégorie tannakienne : H_B induirait une $\otimes$-équivalence entre $\mathbf{MM}(k)$ et la catégorie des représentations de dimension finie d'un $\mathbb{Q}$-schéma en groupe affine, le groupe de Galois motivique $\mathbf{G}_{mot}(k) := \mathbf{Aut}^{\otimes} H_B$.

Après un demi-siècle, on peut considérer ce programme comme désormais accompli - même si la théorie des motifs est loin d'être achevée [(3)]. Sur la base de nouvelles théories tannakiennes, Nori [N] a construit une catégorie $\mathbf{MM}_N(k)$ vérifiant 1) et 3), et Ayoub [Ay3] une catégorie $\mathbf{MM}_{Ay}(k)$ vérifiant 2) [(4)] et 3) ; en outre, le point 1) permet de construire un $\otimes$-foncteur de la première vers la seconde, qui s'avère être une équivalence [C-GAS]. Enfin, d'après D. Arapura [Ar], la sous-catégorie formée des objets semi-simples s'identifie à la catégorie tannakienne $\mathbf{M}(k)$ des motifs purs construite antérieurement par le rapporteur en termes de « correspondances motiv cons mot2351.794 Tdpgx1(u)-1(ne

Lorsque $k = \mathbb{Q}$ (le cas arithmétique), Grothendieck a conjecturé que l'image de ϖ est un point générique [5], de sorte que la majoration du degré de transcendance des périodes serait optimale. Compte tenu du point 2), c'est une mise en forme du philosophème : *« toute relation polynomiale entre périodes est d'origine géométrique »*. La compatibilité de ce philosophème avec le précédent ne va pas de soi, mais une description précise du torseur des périodes montre que les conjectures de Grothendieck et de Kontsevich sont en fait équivalentes (cf. 3.4). Elles forment le socle d'une théorie de Galois des périodes qui étendrait partiellement aux nombres transcendants la théorie de Galois usuelle des extensions algébriques de $\mathbb{Q}$ [An4].

Ayoub a proposé et *démontré* un analogue fonctionnel de la conjecture des périodes de Grothendieck. En gros, il s'agit de remplacer le groupe de Galois motivique absolu par un groupe relatif qui décrit les motifs mixtes sur $\mathbb{C}(t)$ « modulo » les motifs définis sur le sous-corps $\mathbb{C}$ des constantes. Plus précisément, après réduction des constantes à un corps algébriquement clos k convenable dont le plongement complexe s'étend à $k(t)$, le groupe qui contrôle la $k(t)$-algèbre des périodes est le noyau $\mathbf{G}_{mot}(k(t) \mid k)$ de l'homomorphisme canonique $\mathbf{G}_{mot}(k(t)) \to \mathbf{G}_{mot}(k)$. Les périodes étant holonomes à croissance modérée, les relations polynomiales à coefficients dans $k(t)$ qui les lient sont contrôlées par leur monodromie ; le point clé est donc l'existence d'un homomorphisme d'image dense de la monodromie vers $\mathbf{G}_{mot}(k(t) \mid k)$ [Ay3], ce qui traduit une version motivique du classique théorème de la partie fixe en théorie de Hodge, cf 5.2.

Si ce « théorème-maître » donne en principe toute l'information sur les relations entre périodes dans le cas fonctionnel en termes de la géométrie sous-jacente, sa traduction concrète dans les situations très diverses où l'on rencontre ces problèmes requiert des techniques adaptées, dont nous présentons un échantillon en 1.4 et 5.2.

1. RELATIONS ENTRE INTÉGRALES ABÉLIENNES (CAS FONCTIONNEL)

Pour entrer en matière, nous examinons deux problèmes d'indépendance d'intégrales abéliennes dépendant de paramètres. Ce sera l'occasion de discuter le rôle qu'a joué la théorie de Hodge dans ces questions, avant d'indiquer comment celle-ci peut désormais être remplacée, de manière plus naturelle, par la théorie motivique.

5. bien qu'il ne l'ait pas publiée, tout comme ses autres idées sur les motifs, une trace de l'existence de cette conjecture (dans le cas des intégrales abéliennes) figure en note de bas de page de sa lettre [G]. La première version publiée de la conjecture (dans le cas pur) se trouve dans un appendice du livre de S. Lang sur les nombres transcendants [La]. Le rapporteur a pu se rendre compte, lors d'une visite à Montpellier durant laquelle J. Malgoire a eu l'obligeance de lui montrer quelques manuscrits de Grothendieck sur les motifs, que cette conjecture y figure bien sous la forme énoncée ci-dessus.

1.1. Intégrales abéliennes et 1-motifs

Considérons une variété abélienne A de dimension g, définie sur un sous-corps k de $\mathbb{C}$. Son groupe de cohomologie de De Rham $H^1_{dR}(A)$ est de dimension $2g$, engendré par g formes « de première espèce » $\omega_1, \ldots, \omega_g \in \Omega^1(A)$ et par g formes « de seconde espèce » $\eta_1, \ldots, \eta_g$. Si $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$ désigne une base du groupe d'homologie $H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$, la matrice des périodes de A dans ces bases est la matrice carrée inversible d'ordre $2g$ $\Omega = \left(\int_{\gamma_i} \omega_j \quad \int_{\gamma_i} \eta_j\right)_{i=1,\ldots 2g,\, j=1,\ldots g}$.

Tout endomorphisme f de A fournit des relations linéaires entre les coefficients de Ω, du type $\int_\gamma f^*\omega = \int_{f_*\gamma} \omega$. Toute polarisation de A donne lieu à des relations quadratiques, du type de celles définissant le groupe des similitudes symplectiques. Il peut exister d'autres relations d'origine géométrique (cf. 2.4).

Si x est un k-point de A, on peut aussi considérer les intégrales abéliennes [6] $\int_0^x \omega_j, \int_0^x \eta_j$, qui dépendent du choix d'un chemin entre 0 et x. Dans le langage des 1-motifs de P. Deligne et de leur réalisation de Betti et de De Rham [D2], la matrice augmentée (d'une ligne et d'une colonne) $\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 1 & \int_0^x \omega_j & \int_0^x \eta_j \\ 0 & \int_{\gamma_i} \omega_j & \int_{\gamma_i} \eta_j \end{pmatrix}_{i=1,\ldots 2g,\, j=1,\ldots g}$ est une matrice de périodes du 1-motif $\mathbf{A} = [\mathbb{Z} \overset{1\mapsto x}{\to} A]$.

Il est loisible de travailler ici avec la catégorie *abélienne* des variétés abéliennes (resp. 1-motifs) « à isogénie près », obtenue en tensorisant les morphismes avec $\mathbb{Q}$.

1.2. Le théorème du noyau de Manin

Dans la situation relative (le « cas fonctionnel »), considérons un schéma abélien $A \to S$ sur une variété algébrique complexe lisse, et, en présence d'une section $x : S \to A$, le 1-motif $\mathbf{A} = [\mathbb{Z} \overset{1\mapsto x}{\to} A]$ sur S. La cohomologie de De Rham $H^1_{dR}(\mathbf{A}/S)$ (resp. $H^1_{dR}(\mathbf{A}/S)$) est un $\mathcal{O}_S$-module localement libre muni d'une connexion intégrable ∇, dont une première construction algébrique remonte à Yu. Manin [M] [7] ; en fait, $(H^1_{dR}(\mathbf{A}/S), \nabla)$ est extension de $(H^1_{dR}(A/S), \nabla)$ par $(\mathcal{O}_S, d)$. On obtient un homomorphisme :

$$\mu : A(S) \to \mathrm{Ext}^1((H^1_{dR}(A/S), \nabla), (\mathcal{O}_S, d)),\ x \mapsto (H^1_{dR}(\mathbf{A}/S), \nabla).$$

Quitte à remplacer S par un ouvert dense, on peut supposer $H^1_{dR}(\mathbf{A}/S)$ libre, de base $\omega_1, \ldots, \omega_g \in \Omega^1(A/S)$, $\eta_1, \ldots, \eta_g$, et former comme ci-dessus les matrices de périodes Ω (resp. $\mathbf{\Omega}$), qui sont des « solutions » de $(H^1_{dR}(A/S), \nabla)$ (resp. $(H^1_{dR}(\mathbf{A}/S), \nabla)$) à valeurs analytiques multiformes sur $S(\mathbb{C})$. Il est donc équivalent

6. dans le langage classique, le nom de périodes est réservé aux $\int_{\gamma_i} \omega_j$, les $\int_{\gamma_i} \eta_j$ sont appelés quasi-périodes, les $\int_0^x \omega_j$ logarithmes abéliens, tandis que les $\int_0^x \eta_j$ n'ont pas de nom.

7. que les intégrales abéliennes dépendant algébriquement d'un paramètre soient solutions d'équations différentielles à coefficients polynomiaux en ce paramètre (comme dans l'exemple hypergéométrique de Gauss) était un fait connu depuis longtemps : on parlait d'équations différentielles de Picard-Fuchs, avant que Grothendieck n'introduise dans [G] la terminologie « connexion de Gauss-Manin » - construite peu après en toute généralité par N. Katz et T. Oda.

de dire que x est dans le noyau de μ, ou bien que le vecteur-ligne de composantes $(\int_0^x \omega_1, \dots \int_0^x \omega_g, \int_0^x \eta_1, \dots \int_0^x \eta_g)$ est combinaison linéaire à coefficients constants des vecteurs $(\int_{\gamma_i} \omega_1, \dots \int_{\gamma_i} \omega_g, \int_{\gamma_i} \eta_1, \dots \int_{\gamma_i} \eta_g), i = 1, \dots 2g$. C'est le cas, banalement, si x est la section nulle, ou plus généralement (puisque μ est additive) si x est de torsion. Le théorème du noyau de Manin concerne la réciproque :

Théorème 1.1. — *Supposons que A/S n'ait pas de partie fixe (i.e. de sous-schéma abélien non trivial devenant constant sur un revêtement étale fini de S). Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) x est une section de torsion,

ii) $(\int_0^x \omega_1, \dots \int_0^x \omega_g, \int_0^x \eta_1, \dots \int_0^x \eta_g)$ est combinaison linéaire à coefficients constants des vecteurs $(\int_{\gamma_i} \omega_1, \dots \int_{\gamma_i} \omega_g, \int_{\gamma_i} \eta_1, \dots \int_{\gamma_i} \eta_g), i = 1, \dots 2g$,

iii) $(\int_0^x \omega_1, \dots \int_0^x \omega_g)$ est combinaison linéaire à coefficients constants des vecteurs $(\int_{\gamma_i} \omega_1, \dots \int_{\gamma_i} \omega_g), i = 1, \dots 2g$.

C'est la forme *iii)* qui est utilisée par Manin dans sa preuve de la conjecture de Mordell pour les corps de fonctions. Elle se ramène immédiatement à *ii)* lorsque $H^1_{dR}(A/S)$ est engendré, en tant que module différentiel, par les ω_i. Cette condition n'est pas toujours vérifiée ; or la preuve de [M] semble la supposer implicitement, comme l'a remarqué R. Coleman, et certaines tentatives ultérieures ont achoppé sur ce point - voir le compte rendu de D. Bertrand [Be] (c'est une variante de sa solution que nous présenterons).

1.3. Le théorème d'indépendance d'intégrales abéliennes modulo les périodes

D'après ce qui précède, on a une tour d'extensions différentielles $\mathbb{C}(S) \subset \mathbb{C}(S)(\int_{\gamma_i} \omega_j, \int_{\gamma_i} \eta_j) \subset \mathbb{C}(S)(\int_{\gamma_i} \omega_j, \int_{\gamma_i} \eta_j)(\int_0^x \omega_j, \int_0^x \eta_j)$. Tout comme le théorème du noyau de Manin, le théorème suivant [An1, th.2] concerne la seconde inclusion.

Théorème 1.2. — *Supposons que A/S n'ait pas de partie fixe, et que la section x soit générique (i.e. d'image non contenue dans un sous-schéma en groupe distinct de A). Alors les $\int_0^x \omega_j$ et $\int_0^x \eta_j$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}(S)(\int_{\gamma_i} \omega_j, \int_{\gamma_i} \eta_j)$.*

Par la théorie de Galois différentielle, le degré de transcendance de l'extension $\mathbb{C}(S)(\int_{\gamma_i} \omega_j, \int_{\gamma_i} \eta_j)(\int_0^x \omega_j, \int_0^x \eta_j)$ sur $\mathbb{C}(S)(\int_{\gamma_i} \omega_j, \int_{\gamma_i} \eta_j)$ est la dimension du noyau de l'homomorphisme du groupe de Galois différentiel de l'extension $\mathbb{C}(S)(\int_{\gamma_i} \omega_j, \int_{\gamma_i} \eta_j)(\int_0^x \omega_j, \int_0^x \eta_j)/\mathbb{C}(S)$ vers celui de $\mathbb{C}(S)(\int_{\gamma_i} \omega_j, \int_{\gamma_i} \eta_j)/\mathbb{C}(S)$. Comme les connexions en jeu ont des singularités régulières à l'infini, c'est aussi, par la correspondance de Riemann-Hilbert et le choix d'un point base $s \in S(\mathbb{C})$, la dimension du noyau $U_{\mathbf{A}} = \mathrm{Ker}\,(\mathbf{H} \to H)$ de l'homomorphisme (surjectif) entre groupes de monodromie pointés en s. Par définition, le groupe de monodromie H (resp. $\mathbf{H}$) est l'adhérence de Zariski de l'image de $\pi_1(S(\mathbb{C}), s)$ dans $GL(H_1(A_s))$ (resp. $GL(H_1(\mathbf{A}_s))$).

1.4. Rôle des variations de structures de Hodge

Pour contrôler ces groupes, il faut prendre en compte l'origine géométrique de ces représentations de monodromie. On retiendra que ces systèmes locaux sont sous-jacents à des *variations de structures de Hodge rationnelles polarisables* (pure pour A/S, mixte pour $\mathbf{A}/S$). Cette propriété suffira car la catégorie des schémas abéliens (resp. des 1-motifs) sur S à isogénie près est une sous-catégorie abélienne *pleine* de celle $\mathbf{VSHP}_S$ (resp. $\mathbf{VSHMP}_S$) des variations de structures de Hodge rationnelles (resp. mixtes) polarisables sur S [D1, 4.4.3][D2, 10.1.3]. La catégorie $\mathbf{VSHMP}_S$ est tannakienne, neutralisée par le foncteur fibre en s. On peut donc associer aux VSHMP attachées à A et $\mathbf{A}$ des groupes tannakiens G et $\mathbf{G}$, sous-groupes algébriques de $GL(H_1(A_s))$ et de $GL(H_1(\mathbf{A}_s))$ qui contiennent H et $\mathbf{H}$ respectivement. On a un homomorphisme surjectif $\mathbf{G} \to G$ qui prolonge $\mathbf{H} \to H$.

Un résultat central de la théorie des VSHP est le théorème de la partie fixe (dû à Deligne dans le « cas géométrique » et à W. Schmid en général, cf. [P-S, th. 11]) : *le plus grand sous-système local constant du système local sous-jacent à une* VSHP *est sous-jacent à une sous*-VSHP. Autrement dit, pour tout $\underline{V} \in \mathbf{VSHP}_S$, on a une structure de Hodge induite sur $\underline{V}_s^{\pi_1(S(\mathbb{C}),s)}$, indépendante de s. Ce résultat s'étend aux VSHMP « admissibles », celles vérifiant une certaine condition à l'infini [S-Z], qui est satisfaite dans le cas des 1-motifs [An1, lem. 5]. On en tire les conséquences suivantes :

a) toute VSHP (ou VSHMP admissible) dont le système local sous-jacent est constant est elle-même constante. En particulier, *tout schéma abélien $A \to S$ dont la monodromie est triviale est constant*;

b) le groupe de monodromie de toute VSHMP admissible est un sous-groupe normal de son groupe tannakien (cf. [An1, lem. 1]) ; les représentations de ce groupe tannakien qui se factorisent par la monodromie correspondent à des VSHMP constantes [(8)]. En particulier H (resp. $\mathbf{H}$) *est un sous-groupe normal de* G (resp. $\mathbf{G}$).

c) $H_1(A_s)^H$ est stable sous G, donc *correspond à un sous-schéma abélien constant de* A/S (à isogénie près), nul si A/S est sans partie fixe ;

d) Soit $\mathbf{V}$ une $\mathbf{G}$-représentation extension de la représentation triviale $\mathbb{Q}$ par une représentation V du quotient G telle que $V^H = 0$. Alors $\mathbf{V}$ est scindée si et seulement si elle l'est en tant que $\mathbf{H}$-représentation : en effet, $\mathbb{Q}$ se relève en la $\mathbf{G}$-représentation $\mathbf{V}^{\mathbf{H}}$, nécessairement triviale. Ceci s'applique à $(V = H_1(A_s), \mathbf{V} = H_1(\mathbf{A}_s))$ si A/S est sans partie fixe.

1.5. Preuve des théorèmes 1.1 et 1.2 (esquisse)

L'implication *i*) $\Rightarrow$ *iii*) du théorème 1.1 est banale. Prouvons *ii*) $\Rightarrow$ *i*) : via le plongement des 1-motifs sur S à isogénie près dans $\mathbf{VSHMP}_S$, il s'agit de voir que l'extension de VSHMP $0 \to H_1(A/S) \to H_1(\mathbf{A}/S) \to \mathbb{Q} \to 0$ est scindée si et seulement si celle

8. de sorte que le foncteur fibre en un point général s identifie en fait le groupe quotient au groupe de Mumford-Tate de cette fibre. Le th. 5.1 ci-dessous en est l'analogue motivique (plus profond).

des systèmes locaux sous-jacents l'est (du moins si A/S est sans partie fixe), ce qui, en traduction tannakienne, est le point d) ci-dessus.

Passons au théorème 1.2. Quitte à remplacer S par un revêtement étale fini, on peut supposer que l'anneau $\mathrm{End}_S A$ est l'anneau des endomorphismes R d'une fibre générale A_s ; et que le point x_s n'est contenu dans aucun sous-schéma en groupe propre de A_s. Ceci implique que pour tout $f \in R \setminus 0$, $f(x_s)$ n'est pas de torsion.

Reprenons les notations du point d) ci-dessus. Soit $m \in \mathbf{V}$ un point se projetant sur l'élément 1 du quotient $\mathbb{Q}$ de $\mathbf{V}$. La règle $u \mapsto u(m) - m$ définit un plongement $\mathbf{G}$-équivariant de $U_{\mathbf{A}}(\mathbb{Q})$ dans V, indépendant du choix de m (construction de Bashmakov-Ribet, cf. [An1, prop. 1]). Son image est un sous-$\mathbf{G}$-module $W \subset V$; il correspond à un sous-schéma abélien de A/S à isogénie près. Si $V \neq W$, sa fibre en s est contenue dans le noyau d'un élément $f \in R \setminus 0$. Le 1-motif à isogénie près $\mathbf{A}^f = [\mathbb{Z} \overset{1 \mapsto f(x)}{\to} A]$ est dans la catégorie abélienne engendrée par $\mathbf{A}$, donc $U_{\mathbf{A}^f}$ est quotient de $U_{\mathbf{A}} = \mathrm{Ker}(\mathbf{H} \to H)$, et en fait nul par construction de f. Ceci contredit l'implication $ii) \Rightarrow i)$ du théorème 1.1 appliqué à la section $f(x)$, donc $W = V$ et par suite $\dim U_{\mathbf{A}} = \dim_{\mathbb{Q}} V = 2g$.

Pour terminer, prouvons l'implication $iii) \Rightarrow ii)$ du théorème 1.1. Soit $\mathcal{M}$ le sous-module différentiel de $H^1_{dR}(A/S)$ engendré par les ω_j. Il s'agit de montrer que si $\mu(x)$ est non nul, sa restriction $\mu(x)_{\mathcal{M}}$ à $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{M}, (\mathcal{O}_S, d))$ l'est aussi. Quitte à remplacer x par un multiple, on peut supposer que le plus petit sous-schéma en groupe de A contenant l'image de x est un sous-schéma abélien, et quitte à remplacer A par ce dernier, on peut supposer x générique. Il suffit alors de voir que pour tout sous-module différentiel non nul $\mathcal{M}$ de $H^1_{dR}(A/S)$, $\mu(x)_{\mathcal{M}} \neq 0$. Or $\mathcal{M}$ et l'extension par $(\mathcal{O}_S, d)$ restriction de $H^1_{dR}(\mathbf{A}/S)$ correspondent alors à des quotients $V_{\mathcal{M}}$ et $\mathbf{V}_{\mathcal{M}}$ de $V_{\mathbb{C}}$ et $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}$ respectivement. Notons $U_{\mathcal{M}}$ l'image de $U_{\mathbf{A},\mathbb{C}}$ dans $GL(\mathbf{V}_{\mathcal{M}})$. L'isomorphisme $U_{\mathbf{A}}(\mathbb{C}) \tilde{\to} V_{\mathbb{C}}$ obtenu dans la démonstration du théorème 1.2 composé avec la projection $V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathcal{M}}$ se factorise à travers $U_{\mathcal{M}}(\mathbb{C})$. Si $\mathcal{M}$ est non nul, il en est de même de $V_{\mathcal{M}}$ donc aussi de $U_{\mathcal{M}}$, de sorte que $\mu(x)_{\mathcal{M}} \neq 0$. □

Remarque. L'intervention un peu artificielle des structures de Hodge, efficace parce que variétés abéliennes et 1-motifs (à isogénie près) se laissent décrire en ces termes, peut être évitée en les remplaçant par des motifs. On sait en effet plonger les 1-motifs dans une catégorie tannakienne de motifs (§3.3), et on dispose d'analogues motiviques du théorème de la partie fixe (§5.1) permettant de remplacer dans les arguments ci-dessus les groupes $G, \mathbf{G}$ par des groupes de Galois motiviques. On peut alors réinterpréter ces arguments comme l'élaboration concrète, dans certaines situations particulières de relations entre intégrales abéliennes, du théorème d'Ayoub mentionné en 0.4, voire envisager de les étendre hors du cadre abélien. Plus qu'un point technique, il s'agit d'un changement de « bon cadre » pour étudier les relations entre périodes.

2. GROUPES DE GALOIS MOTIVIQUES PURS

2.1. La construction de Grothendieck

Dans toute la suite de cet exposé, *k désigne un sous-corps de* $\mathbb{C}$ et $\bar{k}$ sa fermeture algébrique. Les motifs purs sur k sont ceux attachés aux k-variétés projectives lisses ; on s'attend à ce qu'ils forment une catégorie abélienne *semi-simple*, reflétant les propriétés cohomologiques de pureté/semi-simplicité, connues ou attendues, de ces variétés.

La construction conjecturale bien connue de Grothendieck repose sur l'idée que le monde des motifs purs est celui de la géométrie énumérative (combinatoire de configurations en géométrie projective). Il considère la catégorie monoïdale ayant pour objets les k-variétés projectives lisses, et pour morphismes les correspondances algébriques (à coefficients rationnels et de dimension égale à celle du but), modulo l'équivalence numérique. Passant à l'enveloppe karoubienne, la classe de $\mathbf{P}^1$ se décompose en $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(-1)$, et en $\otimes$-inversant $\mathbb{Q}(-1)$, on obtient une catégorie monoïdale $\mathbf{M}_G(k)$ dont tout objet est dualisable. Grothendieck montre alors, sous ses « conjectures standard », que $\mathbf{M}_G(k)$ est abélienne semi-simple, que les cohomologies se factorisent à travers des $\otimes$-foncteurs de source $\mathbf{M}_G(k)$, et - en introduisant à cette occasion les *catégories tannakiennes* - que $\mathbf{M}_G(k)$ est équivalente à la catégorie des représentations de dimension finie d'un $\mathbb{Q}$-schéma en groupe affine $\mathbf{G}_{mot}^{pur}(k)$, le groupe de Galois motivique pur.

L'hypothèque originelle des conjectures standard [9] a notoirement nui à l'essor et à la réputation de la théorie, qui n'est sortie des limbes qu'au début des années 80 sous l'impulsion de Deligne, en sacrifiant provisoirement son essence géométrique pour se concentrer sur les « systèmes de réalisations ». Ainsi, l'étude des périodes incite à considérer la catégorie tannakienne $\mathrm{Vec}_{k,\mathbb{Q}}$ dont les objets sont des triplets ($W \in \mathrm{Vec}_k$, $V \in \mathrm{Vec}_{\mathbb{Q}}$, $\iota : W \otimes_k \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$) et la sous-catégorie abélienne engendrée par ceux de la forme $(H_{dR}(X), H_B(X), \varpi)$ où X est une k-variété projective lisse. La théorie de Hodge absolue met en jeu, quant à elle, la catégorie dont les objets sont des familles $(W \in \mathrm{Vec}_k,\ V_\sigma \in \mathbf{SH},\ \iota_\sigma : W \otimes_k \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} V_\sigma \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})_{\sigma:k\to\mathbb{C}}$, où $\mathbf{SH}$ désigne la catégorie des structures de Hodge rationnelles, etc. Il ne s'agit pas à proprement parler de catégories de motifs : les morphismes, définis purement en termes d'algèbre linéaire, ne sont pas de nature géométrique ; pour autant, leur étude a contribué à façonner le formalisme de Galois motivique et mené à de brillantes applications [D3][D-M-O-S].

9. les conjectures standard apparaissent pour la première fois dans une lettre de Grothendieck à J.-P. Serre de 1965 [G-S] qui se termine par ces mots : « Ce qu'il faut pour le moment, c'est inventer un procédé pour déformer un cycle de dimension pas trop grande, pour le pousser à l'infini. Peut-être aurais-tu envie d'y réfléchir de ton côté ? Je viens seulement de m'y mettre aujourd'hui-même, et t'écris faute de trouver une idée. ». Cinquante ans plus tard, on en est au même point. Heureusement, ces questions fondamentales *ne sont pas au fondement* de la théorie des motifs, comme le montre son évolution ultérieure (si les conjectures standard étaient fausses, aucun énoncé de cet exposé n'en serait affecté !).

Le retour aux motifs proprement dits a eu lieu avec le théorème de U. Jannsen [J] affirmant, indépendamment des conjectures standard, que $\mathbf{M}_G(k)$ est abélienne semi-simple... ce qui ne suffit toutefois pas à construire les réalisations ni $\mathbf{G}_{mot}^{pur}(k)$.

2.2. Correspondances motivées et motifs purs

La modification minimale de la construction de Grothendieck conduisant à une théorie de Galois motivique pure inconditionnelle (et conservant la nature géométrique des morphismes) est exposée dans [An2]. Sur k, les conjectures standard se réduisent à celle qui prédit que, pour une variété polarisée X de dimension d, l'inverse de l'isomorphisme de Lefschetz $H^i(X) \stackrel{l_X}{\to} H^{2d-i}(X)$ est donné, comme l_X lui-même (cup-produit itéré avec la polarisation), par une correspondance algébrique. En introduisant les *correspondances motivées*, obtenues à partir des correspondances algébriques modulo équivalence homologique en « adjoignant » formellement les l_X^{-1} (la notion ne dépend pas des polarisations choisies), et en suivant la construction de Grothendieck, on obtient une *catégorie* $\mathbb{Q}$*-linéaire tannakienne semi-simple de motifs purs* $\mathbf{M}(k)$, à travers laquelle se factorisent les cohomologies de Weil. D'où un foncteur fibre « réalisation de Betti pure » $H_B : \mathbf{M}(k) \to \mathrm{Vec}_{\mathbb{Q}}$ et un $\mathbb{Q}$-schéma en groupe affine $\mathbf{G}_{mot}^{pur}(k) := \mathbf{Aut}^{\otimes} H_B$, de sorte que H_B s'enrichit en une $\otimes$-équivalence $\mathbf{M}(k) \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Rep}\, \mathbf{G}_{mot}^{pur}(k)$. Tout ceci repose sur le théorème de l'indice de Hodge (et se transpose au cas relatif [Ar-D]).

À toute k-variété projective lisse X (et plus généralement tout motif pur), on associe ainsi un $\mathbb{Q}$-groupe algébrique réductif, son *groupe de Galois motivique* $\mathbf{G}(X) \subset GL(H_B(X))$, qui n'est autre que l'image de $\mathbf{G}_{mot}^{pur}(k)$. Cette construction permet en principe de ramener les problèmes de nature « motivique » à des questions de théorie des représentations des groupes réductifs [10].

Le théorème de la partie fixe de Deligne a un avatar motivique (qui s'en déduit) : *si* $X \to S$ *est un morphisme projectif lisse, et* $s \in S(\mathbb{C})$, $H_B(X_s)^{\pi_1(S(\mathbb{C}),s)}$ *est la réalisation de Betti d'un sous-motif du motif de* X ; de manière équivalente, $H_B(X_s)^{\pi_1(S(\mathbb{C}),s)}$ est stable sous $\mathbf{G}(X_s)$ [An2].

2.3. La conjecture des périodes pures

La cohomologie de De Rham algébrique $H_{dR}(X) := \mathbf{H}_{Zar}(\Omega_X^*)$ fournit une réalisation $H_{dR} : \mathbf{M}(k) \to \mathrm{Vec}_k$. À toute k-variété projective lisse X (et plus généralement à tout motif pur), on associe un torseur $\mathbf{P}(X) := \mathbf{Iso}^{\otimes}(H_{dR}, H_B \otimes k)_{<X>_{\otimes}}$ sous $\mathbf{G}(X)_k$, muni d'un point complexe canonique ϖ_X : $\mathrm{Spec}\, \mathbb{C} \to \mathbf{P}(X)$ donné par l'isomorphisme de périodes.

10. de même que la théorie de Galois usuelle ramène les problèmes d'extensions finies de k à des questions d'actions de groupes finis ; au reste, $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ est un quotient de $\mathbf{G}_{mot}^{pur}(k)$, correspondant aux variétés de dimension 0.

La conjecture des périodes de Grothendieck dans le cas pur [(11)] prédit que *si* $k \subset \bar{\mathbb{Q}}$, *l'image de* ϖ_X *est un point Zariski-dense de* $\mathbf{P}(X)$,

ou, de manière équivalente,

$\mathbf{P}(X)$ *est connexe et le degré de transcendance des périodes de* X *est* $\dim \mathbf{G}(X)$.

Par exemple, $\mathbf{G}(\mathbf{P}^1) = \mathbb{G}_m$ et les périodes sont 1 et $2\pi i$, de sorte que la conjecture équivaut dans ce cas à la transcendance de π. Pour un panorama des résultats de la théorie des nombres transcendants en faveur de cette conjecture, voir [Wal] [(12)].

2.4. Cas des périodes abéliennes

Le seul résultat général dans cette direction est le théorème de G. Wüstholz (version abélienne du théorème de Baker sur les logarithmes) :

Théorème 2.1 (cf. [Wu]). — *Si* $k = \bar{\mathbb{Q}}$, *toute relation* k-linéaire *entre périodes de* 1-*formes sur une* k-*variété abélienne provient de ses endomorphismes.*

Pour d'autres cas de la conjecture qui s'en déduisent (indirectement), voir [B-C].

Pour aller plus loin dans l'analyse de la nature motivique des relations polynomiales entre périodes abéliennes, commençons par préciser la nature des motifs abéliens. En partant du théorème de la partie fixe motivique et en adaptant des arguments de Deligne [D-M-O-S], on peut démontrer une variante affaiblie de la conjecture de Hodge pour les variétés abéliennes :

Théorème 2.2 ([An2]). — *Si* $k = \bar{k}$, *la réalisation de Hodge fait de la catégorie tannakienne des motifs purs engendrée par les variétés abéliennes une sous-catégorie pleine de* **SH**. *En particulier, tout cycle de Hodge sur une* k-*variété abélienne est motivé* [(13)].

Pour toute k-variété abélienne X, $\mathbf{G}(X)$ coïncide donc avec le groupe de Mumford-Tate de X (groupe tannakien attaché à la structure de Hodge $H_1(X)$). Si X est à multiplication complexe (ce qui permet de supposer $k = \bar{\mathbb{Q}}$), il s'agit d'un tore dont le groupe de caractères se calcule par une recette explicite en termes du type CM. Par ailleurs, dans le cas de multiplication complexe par un corps cyclotomique (ou plus généralement une extension abélienne de $\mathbb{Q}$), les périodes s'expriment comme produits

11. dans une formulation indépendante des conjectures standard. On prendra garde par ailleurs à bien distinguer la conjecture des périodes, qui a trait à la réalisation des périodes $\mathbf{M}(k) \to \mathrm{Vec}_{k,\mathbb{Q}}$ (et implique sa pleine fidélité si $k \subset \bar{\mathbb{Q}}$), de la conjecture de Hodge, qui a trait à la réalisation de Hodge $\mathbf{M}(k) \to \mathbf{SH}$ (et implique sa pleine fidélité si $k = \bar{k}$). Elles sont de nature entièrement différente, cf. [An3, ch. 7].

12. pour une généralisation de la conjecture au cas d'un corps de base k non nécessairement algébrique, qui implique entre autres la conjecture de Schanuel sur les exponentielles, voir [An3, 23.4.1] : le degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ de la k-algèbre engendrée par les périodes de X serait toujours minorée par la dimension de $\mathbf{G}(X)$.

13. il y a ici une subtilité : la conjecture standard est connue pour les k-variétés abéliennes (Grothendieck-Lieberman), mais il ne s'ensuit pas que tout cycle motivé soit algébrique sur ces variétés ; le point est que les cycles motivés font intervenir l_Y^{-1} pour des variétés auxiliaires Y non nécessairement abéliennes – dans la situation du théorème, il s'agit de pinceaux abéliens compacts.

de valeurs de la fonction Γ d'Euler en des nombres rationnels, ce qui généralise la formule classique de Lerch-Chowla-Selberg.

PROPOSITION 2.3 ([An3], 24.6). — *Restreinte aux variétés abéliennes à multiplication complexe cyclotomique, la conjecture des périodes de Grothendieck équivaut à la* conjecture de Lang-Rohrlich *: toute relation polynomiale à coefficients dans $\mathbb{Q}$ entre valeurs de Γ en des rationnels provient des équations fonctionnelles de Γ.*

Du fait que la fonction Γ n'est pas elle-même de nature motivique (elle n'est liée aux motifs abéliens qu'à travers ses valeurs aux points rationnels), cette « traduction » de la conjecture des périodes est très indirecte : reposant sur le th. 2.2, elle s'adosse aussi à une longue série de travaux sur les périodes abéliennes de type CM (G. Anderson, Deligne [D3], B. Gross, G. Shimura, A. Weil [We]...) ainsi que sur l'analyse des relations de distributions, telles celles vérifiées par Γ (D. Kubert).

Cette « traduction » peut d'ailleurs être lue dans l'autre sens : c'est au fond la nature motivique même des relations entre valeurs de Γ que l'on exploite pour calculer rapidement sur machine des relations telles que $\frac{\Gamma(\frac{1}{24})\Gamma(\frac{11}{24})}{\Gamma(\frac{5}{24})\Gamma(\frac{7}{24})} = \sqrt{6+3\sqrt{3}}$, cf. [B-Z].

3. GROUPES DE GALOIS MOTIVIQUES MIXTES SELON NORI

3.1. Théorie tannakienne de Nori

Soit F un corps de caractéristique nulle (corps de coefficients, qu'on peut supposer égal à $\mathbb{Q}$ dans toute la suite). La théorie tannakienne inventée par Grothendieck en vue de la construction de groupe de Galois motivique, et développée par N. Saavedra, part d'une catégorie F-linéaire monoïdale symétrique $\mathcal{T}$ (avec End $\mathbf{1} = F$) dont tout objet est dualisable (i.e. la tensorisation avec un objet quelconque a un adjoint), et munie d'un foncteur F-linéaire monoïdal $f : \mathcal{T} \to \mathrm{Vec}_F$ vers les F-espaces vectoriels de dimension finie. Elle donne un critère pour que f s'enrichisse en une équivalence monoïdale $\mathcal{T} \overset{\sim}{\to} \mathrm{Rep}_F G$ pour un F-schéma en groupe affine G : $\mathcal{T}$ doit être abélienne et f fidèle exact.

Comme l'ont montré Nori puis Ayoub, on peut affaiblir considérablement ces conditions si l'on se contente d'enrichir f en un foncteur universel $\mathcal{T} \to \mathrm{Rep}_F G$, mais pas nécessairement une équivalence.

Dans la construction de Nori, on peut même partir d'un carquois (i.e. graphe orienté) quelconque $\mathcal{Q}$, plutôt que d'une catégorie. Une représentation de $\mathcal{Q}$ à valeurs dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ associe à tout sommet de $\mathcal{Q}$ un objet de $\mathcal{A}$ et à toute flèche un morphisme entre les objets associés à sa source et à son but respectivement. Les représentations de $\mathcal{Q}$ dans $\mathcal{A}$ forment de manière évidente une catégorie.

L'énoncé de base est le suivant [N] (développé dans [Ar][Bru][H-MS2][BV-C-L]) :

Proposition 3.1. — *À toute F-représentation $f : \mathcal{Q} \to \mathrm{Vec}_F$, associons la F-cogèbre $\mathcal{C} = \varinjlim_{\mathcal{Q}' \text{ fini} \subset \mathcal{Q}} (\mathrm{End} f_{|\mathcal{Q}'})^\vee$. Alors f s'enrichit en une représentation $\mathcal{Q} \to \mathrm{Comod}_F \mathcal{C}$ à valeurs dans la catégorie abélienne des $\mathcal{C}$-comodules de dimension finie. Elle est universelle parmi les enrichissements de f en une représentation $\mathcal{Q} \to \mathcal{A}$ vers une catégorie abélienne F-linéaire, tels que le foncteur d'oubli $\mathcal{A} \to \mathrm{Vec}_F$ soit exact et fidèle.*

(La colimite filtrante sur les sous-carquois finis pallie le défaut de dualité entre algèbres et cogèbres en dimension infinie.) La théorie explicite ensuite les conditions monoïdales sur f qui font de $\mathcal{C}$ une bigèbre, voire une algèbre de Hopf (variation subtile sur le thème : tout sous-monoïde Zariski-fermé de GL_n est un groupe, cf. [H-MS2, 7.3.6]).

3.2. Motifs mixtes de Nori

Grâce à la proposition 3.1, Nori construit sa catégorie abélienne des motifs mixtes comme le réceptacle d'une cohomologie universelle, par le biais d'un carquois qui code les propriétés standard de toute cohomologie relative. Ses sommets sont des triplets (X, Y, i) formés d'une k-variété X, d'une sous-variété fermée Y, et d'un entier $i \in \mathbb{N}$. Ses flèches sont de deux types : celles $(X, Y, i) \to (X', Y', i)$ provenant de morphismes de paires, et celles $(X, Y, i) \to (Y, Z, i-1)$ qu'on associe aux triplets de sous-variétés emboîtées $Z \subset Y \subset X$. La représentation f est celle induite par la cohomologie relative $H^i_B(X, Y, \mathbb{Q}) = H^i(X(\mathbb{C}), j_!\mathbb{Q})$ (où j désigne l'inclusion de $X(\mathbb{C}) \setminus Y(\mathbb{C})$ dans $X(\mathbb{C})$). Par 3.1. on obtient ainsi une cogèbre $\mathcal{H}^{eff}_N$ sur $F = \mathbb{Q}$.

Pour en faire une bigèbre, la formule de Künneth

$$H^j_B(X \times X', Y \times X' \cup Y' \times X, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{i+i'=j} H^i_B(X, Y, \mathbb{Q}) \otimes H^{i'}_B(X', Y', \mathbb{Q})$$

incite à poser $(X, Y, i) \otimes (X', Y', i') := (X \times X', Y \times X' \cup Y' \times X, i + i')$. Toutefois, du fait de la sommation, on n'a pas compatibilité de f à $\otimes$ ... sauf dans le *cas cellulaire*, c'est-à-dire quand les paires (X, Y) et (X', Y') n'ont qu'un seul groupe de cohomologie non nul. La clé est l'existence d'un analogue algébrique de la filtration par le squelette d'un complexe simplicial, construite en itérant la proposition suivante [14] :

Proposition 3.2 ([N], [H-MS2] 2.5). — *Soient X une k-variété affine de dimension n, et Z un fermé de dimension $< n$. Il existe un fermé Y de dimension $< n$ contenant Z tel que $H^i_B(X, Y, \mathbb{Q}) = 0$ si $i \neq n$.*

Preuve — On peut supposer $X \setminus Z$ lisse. Par résolution des singularités, on peut trouver $\tilde{X}$ projective lisse, $D \subset X$ diviseur à croisements normaux et $\pi : \tilde{X} \setminus D \to X$ propre surjectif, et un isomorphisme au-dessus de $X \setminus Z$; on peut supposer en outre que $\tilde{Z}$ de Z soit un diviseur à croisement normaux coupant D transversalement. Pour

14. « Nori's basic lemma », démontré indépendamment, dans un cadre plus général, par A. Beilinson et par K. Vilonen.

une section hyperplane générale H de $\tilde{X}$, posons $D' = H \cup \tilde{Z}$. Alors $D \cup D'$ est encore un diviseur à croisements normaux et $\tilde{X} \setminus D'$ est affine.

Posons $Y = \pi(D' \setminus D \cap D')$. C'est un fermé de la variété affine X, de dimension $< n$ et contenant Z. D'après le lemme d'annulation d'Artin (cf. [H-MS2, 2.3.8]), $H^i_B(X, Y, \mathbb{Q}) = 0$ si $i > n$. Supposons $i < n$. Par excision (cf. [H-MS2, 2.1.7]), on a $H^i_B(X, Y, \mathbb{Q}) = H^i_B(\tilde{X} \setminus D, D' \setminus (D \cap D'), \mathbb{Q})$, que la dualité de Poincaré pour les paires met en dualité avec $H^{2n-i}_B(\tilde{X} \setminus D', D \setminus (D \cap D'), \mathbb{Q})$ (cf. [H-MS2, 2.4.5]), qui est nul d'après Artin. □

Par un argument de suite spectrale, on peut en déduire que Comod $\mathcal{H}^{eff}_N$ est engendrée par les images par f de paires cellulaires, puis (en faisant attention à changer le signe dans la symétrie selon la règle de Koszul), que $\mathcal{H}^{eff}_N$ est une bigèbre [H-MS2, ch. 3]. Pour obtenir une algèbre de Hopf $\mathcal{H}_N$, il faut en outre inverser $\mathbb{Q}(-1)$, l'image de $(\mathbb{P}^1, \emptyset, 2)$ (ce qui se fait plus commodément en modifiant le carquois pour intégrer les torsions de Tate). Le $\mathbb{Q}$-schéma en groupe défini par son spectre est le *groupe de Galois motivique de Nori* $\mathbf{G}^N_{mot}(k)$, et

$$\mathbf{MM}_N(k) := \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}\, \mathbf{G}^N_{mot}(k) = \mathrm{Comod}\, \mathcal{H}_N$$

la catégorie tannakienne des *motifs mixtes de Nori* sur k à coefficients dans $\mathbb{Q}$ [15].

On renvoie à [H-MS2, th. 8.1.9] pour la formulation précise de l'universalité de $\mathbf{MM}_N(k)$.

3.3. Motifs purs et 1-motifs revisités

Les morphismes de $\mathbf{MM}_N(k)$ étant définis formellement à partir de propriétés abstraites des cohomologies relatives, il n'est pas du tout clair qu'ils soient « de nature géométrique ». Voici deux réponses positives partielles (une autre, plus complète, sera donnée au §4.5) :

THÉORÈME 3.3 ([Ar] 6.4). — *La catégorie $\mathbf{M}(k)$ des motifs purs (§2.2) s'identifie canoniquement à la sous-catégorie tannakienne de $\mathbf{MM}_N(k)$ formée des objets semi-simples, et la dualité tannakienne identifie $\mathbf{G}^{pur}_{mot}(k)$ au plus grand quotient pro-réductif de $\mathbf{G}^N_{mot}(k)$.*

Les morphismes entre motifs de Nori attachés à des variétés projectives lisses sont donc les correspondances motivées (la preuve commence par la construction d'une filtration par le poids sur $\mathbf{MM}_N(k)$).

THÉORÈME 3.4 ([Ay-BV]). — *La sous-catégorie abélienne de $\mathbf{MM}_N(k)$ engendrée par les images des (X, Y, i) avec $i \leq 1$ s'identifie à la catégorie des 1-motifs de Deligne.*

15. tout ceci s'étend aux coefficients entiers [H-MS2], et au cas relatif [Ar].

3.4. Torseurs des périodes selon Nori-Kontsevich

La cohomologie de De Rham algébrique s'étend en une cohomologie relative, pour des paires (X, Y) non nécessairement lisses, cf. [H-MS2, II 3] ; après tensorisation par $\mathbb{C}$, elle devient canoniquement isomorphe à la cohomologie de Betti. Elle donne donc lieu à un $\otimes$-foncteur $H_{dR} : \mathbf{MM}_N(k) \to Vec_k$ (réalisation de De Rham), et l'on peut derechef construire le torseur $\mathbf{P}^N_{mot}(k) := \mathbf{Iso}^{\otimes}(H_{dR}, H_B \otimes k)$ sous $\mathbf{G}^N_{mot}(k)_k$, doté de son point canonique $\varpi :\ \mathrm{Spec}\,\mathbb{C} \to \mathbf{P}^N_{mot}(k)$.

Les fonctions sur ce torseur s'interprètent comme « périodes abstraites » [(16)]. Suivant Kontsevich-Zagier, on considère le k-espace vectoriel $\mathcal{P}^{eff}_{KZ}$ engendré par les symboles $[X, Y, i, \gamma, \omega]$, où (X, Y, i) est un sommet du carquois de Nori, $\gamma \in H_i(X(\mathbb{C}), Y(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ et $\omega \in H^i_{dR}(X, Y)$, modulo les relations suivantes :

- $(\mathbb{Q}, k)$-linéarité en (γ, ω),

- (changement de base) pour $f : X' \to X$ tel que $f(Y') \subset Y$, $[X, Y, i, f_*\gamma', \omega] = [X', Y', i, \gamma', f^*\omega]$,

- (Stokes) pour $Z \subset Y \subset X$, $\gamma \in H_i(X(\mathbb{C}), Y(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ et $\omega \in H^{i-1}_{dR}(Y, Z)$, $[X, Y, i, \gamma, d\omega] = [Y, Z, i-1, \partial\gamma, \omega]$.

C'est en fait une k-algèbre, et posant $\underline{2\pi i} := [\mathbb{G}_m, \emptyset, 1, S^1, \frac{dt}{t}]$, on définit la k-algèbre des *périodes abstraites* $\mathcal{P}_{KZ}$ comme $\mathcal{P}^{eff}_{KZ}[\underline{2\pi i}^{-1}]$.

L'intégrale $\int_\gamma \omega$ ne dépend que de la classe de $[X, Y, i, f_*\gamma, \omega]$ (ce qui ne fait que traduire les règles du calcul intégral) et envoie $\underline{2\pi i}$ sur $2\pi i$, d'où un homomorphisme k-linéaire $\int :\ \mathcal{P}_{KZ} \to \mathbb{C}$.

Théorème 3.5 ([K2][H-MS2] ch. 12). — *$\mathbf{P}^N_{mot}(k)$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Spec}\,\mathcal{P}_{KZ}$, en sorte que ϖ correspond à $\int$.*

Corollaire 3.6. — *Supposons $k \subset \bar{\mathbb{Q}}$. Alors ϖ est un point générique* (conjecture de Grothendieck) *si et seulement si $\int$ est injectif* (conjecture de Kontsevich-Zagier).

Remarque. Les nombres polyzêta $\zeta(\underline{s}) = \sum_{n_1 > \ldots > n_k} n_1^{-s_1} \ldots n_k^{-s_k}$ sont des périodes (pour $k = \mathbb{Q}$). D'après Brown [Bro], ce sont en fait les périodes des motifs de Tate mixtes sur $\mathbb{Z}$, et ils s'expriment comme combinaison linéaire rationnelle de polyzêtas de Hoffman (ceux où $s_i = 2$ ou 3). Si comme on s'y attend, les motifs de Tate mixtes sur $\mathbb{Z}$ forment une sous-catégorie tannakienne de celle de Nori, la restriction de la conjecture des périodes de Grothendieck-Kontsevich-Zagier à ces motifs se traduirait par l'indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ des polyzêtas de Hoffman.

16. résultat annoncé par Kontsevich [K1][K2] - qui l'attribue à Nori - , et démontré en détail dans [H-MS2, III] ; voir aussi [K-Z], [H-MS1]. On trouvera par ailleurs dans [H-MS2, III] une comparaison détaillée des variantes de notions de périodes qu'on rencontre dans la littérature ; voir aussi [BB].

4. GROUPES DE GALOIS MOTIVIQUES MIXTES SELON AYOUB

4.1. Catégories triangulées de motifs

Le programme motivique de Grothendieck envisageait des motifs sur une base plus générale que Spec k ainsi que l'existence d'un formalisme des 4 opérations de changement de base, dans un cadre dérivé.

Cette partie ambitieuse du programme est elle aussi désormais accomplie. Dans un premier temps (après des études préliminaires sur les systèmes dérivés de réalisations, puis les travaux pionniers de A. Beilinson, S. Bloch, A. Suslin...), trois versions de la *catégorie triangulée des motifs* sur k ont été construites, qui se sont avérées équivalentes (M. Hanamura, M. Levine, V. Voevodsky) [V-S-F][Le]. Ensuite, sur les traces de Voevodsky et F. Morel, Ayoub a mis en place le formalisme des opérations de Grothendieck [Ay1] (développé ultérieurement aussi dans les travaux de D.-C. Cisinski et F. Déglise).

Pour bâtir sa version de la théorie de Galois motivique, Ayoub se place dans la catégorie triangulée non bornée $\mathbf{DM}(k)$ des motifs de Voevodsky sur k, à coefficients rationnels (la version $\mathbf{DM}(S)$ sur une base lisse S intervient aussi de manière transitoire). Grosso modo, on part de la catégorie des k-variétés lisses avec pour morphismes les correspondances finies à coefficients dans $\mathbb{Q}$, et on considère les foncteurs $\mathbb{Q}$-linéaires contravariants de cette catégorie vers $\mathrm{Vec}_{\mathbb{Q}}$ (*préfaisceaux avec transferts*). On obtient la *catégorie triangulée des motifs mixtes effectifs* comme sous-catégorie de la catégorie dérivée des préfaisceaux avec transferts formée des objets vérifiant la descente étale [(17)] et l'invariance par $\mathbb{A}^1$-homotopie (elle se réalise alternativement comme localisation de la catégorie dérivée des faisceaux étales avec transferts). Pour obtenir $\mathbf{DM}(k)$, il faut ensuite $\otimes$-inverser [(18)] le motif de Tate $\mathbb{Q}(1) := \mathbb{G}_m[-1]$. C'est une catégorie monoïdale symétrique, et dans la plus petite sous-catégorie triangulée $\mathbf{DM}_{gm}(k)$ stable par facteurs directs et torsion de Tate $\otimes\mathbb{Q}(n)$ et contenant les k-variétés lisses, les objets sont dualisables : en fait $\mathbf{DM}_{gm}(k)$ est engendrée par les (facteurs directs des) motifs des k-variétés projectives lisses.

4.2. Théorie tannakienne d'Ayoub

Cette théorie vise, comme celle de Nori, à enrichir un $\otimes$-foncteur $f : \mathcal{T} \to \mathrm{Vec}_F$ en un foncteur $\mathcal{T} \to \mathrm{Rep}_F G$. Toutefois, comme la condition principale est l'existence d'adjoints, il y a lieu de s'affranchir de la finitude et travailler avec les Ind-catégories VEC_F (espaces vectoriels de dimension quelconque sur F) et $\mathrm{REP}_F G$. Un énoncé typique est le suivant :

17. ou Nisnevich, cela revient au même à coefficients rationnels à cause des transferts. Prendre garde qu'il s'agit d'un formalisme covariant : indexation « homologique » des complexes ; derrière cette convention, il y a le choix de ce qu'on considère comme motif effectif : H^i ou H_i, $\mathbb{Q}(-1)$ ou $\mathbb{Q}(1)$?

18. il s'agit là d'une inversion non naïve, selon la méthode des spectres comme en théorie de l'homotopie stable.

Proposition 4.1. — *Soient $\mathcal{T}$ une catégorie F-linéaire monoïdale symétrique et $f : \mathcal{T} \to \mathrm{VEC}_F$ un $\otimes$-foncteur F-linéaire. On suppose que f admet un adjoint à droite g commutant aux sommes directes infinies. Alors $fg(\mathbf{1})$ est canoniquement munie d'une structure de bigèbre, et f s'enrichit en un $\otimes$-foncteur de $\mathcal{T}$ vers les $fg(\mathbf{1})$-comodules.*

Dans le cas où $\mathcal{T} = \mathrm{REP}_F G$ et f le foncteur d'oubli, g est la tensorisation avec $\mathcal{O}(G)$, et on retrouve $G = \mathrm{Spec}\ fg(\mathbf{1})$. Dans un cadre élargi, l'énoncé précis utilisé pour construire les groupes de Galois motiviques est le suivant :

Proposition 4.2 ([Ay3] 1.5). — *Soit $f : \mathcal{T} \to \mathcal{V}$ un $\otimes$-foncteur entre catégories monoïdales symétriques. Supposons que f admette un adjoint à droite g, ainsi qu'une section monoïdale e qui admet elle-même un adjoint à droite u. Supposons encore que*

$(*)$ pour tout $T \in \mathcal{T}$ et tout $V \in \mathcal{V}$, le morphisme canonique composé $c_{V,T}$:
$g(V) \otimes T \to gf(g(V) \otimes T) \cong g(fg(V) \otimes f(T)) \to g(V \otimes f(T))$ soit un isomorphisme.

Alors $fg(\mathbf{1})$ est canoniquement muni d'une structure d'algèbre de Hopf dans $\mathcal{V}$, et f s'enrichit en un $\otimes$-foncteur de $\mathcal{T}$ vers les $fg(\mathbf{1})$-comodules.

Nous nous contenterons d'écrire les formules pour la comultiplication et la structure de $fg(\mathbf{1})$-comodule sur $f(T)$ (u sert pour l'antipode) :

- $fg(\mathbf{1}) \to fgfg(\mathbf{1}) = fg(\mathbf{1} \otimes fefg\mathbf{1}) \stackrel{c^{-1}_{\mathbf{1},efg\mathbf{1}}}{\to} f(g\mathbf{1} \otimes efg\mathbf{1}) = fg\mathbf{1} \otimes fefg\mathbf{1} = fg\mathbf{1} \otimes fg\mathbf{1}$,
- $f(T) \to fgf(T) = fg(\mathbf{1} \otimes fef(T)) \stackrel{c^{-1}_{\mathbf{1},efT}}{\to} f(g\mathbf{1} \otimes ef(T)) = fg\mathbf{1} \otimes f(T)$.

4.3. Motifs mixtes d'Ayoub

Ayoub applique 4.2. en prenant pour f un « foncteur de Betti » convenable $B^* : \mathbf{DM}(k) \to D(\mathrm{VEC}_{\mathbb{Q}})$ (k étant un corps plongé dans $\mathbb{C}$). Pour le construire, il considère l'analogue analytique complexe $\mathbf{DM}^{an}$ de $\mathbf{DM}(k)$, où les k-variétés lisses sont remplacées par des variétés analytiques complexes, $\mathbb{A}^1$ par le disque unité ouvert $\mathbb{D}^1$, et la topologie étale par la topologie usuelle. Tirant parti de la simplicité des hyper-recouvrements d'une variété analytique par des polydisques $\mathbb{D}^n$, il montre que $\mathbf{DM}^{an}$ est canoniquement équivalente à $D(\mathrm{VEC}_{\mathbb{Q}})$. Le foncteur composé B^* envoie le motif d'une k-variété lisse sur le complexe de chaînes singulières de $X(\mathbb{C})$ dans $D(\mathrm{VEC}_{\mathbb{Q}})$; plus généralement, pour un complexe de préfaisceaux avec transferts $\mathcal{F}^*$, $B^*(\mathcal{F}^*)$ se calcule comme complexe total associé à $\mathcal{F}^*(\bar{\mathbb{D}}^*_{et})$, où $\bar{\mathbb{D}}^*_{et}$ est un certain objet cocubique construit en termes des voisinages étales des polydisques fermés $\bar{\mathbb{D}}^n$ dans $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ [Ay3, 2.2].

Comme le $\otimes$-foncteur d'analytification $\mathbf{DM}(k) \to \mathbf{DM}^{an}$ provient d'une adjonction de Quillen, B^* admet un adjoint à droite noté B_* ; il admet aussi une section monoïdale évidente et toutes les conditions de 4.2 s'avèrent remplies, ce qui donne naissance à une algèbre de Hopf $B^*B_*\mathbb{Q}$ dans $D(\mathrm{VEC}_{\mathbb{Q}})$.

Proposition 4.3 ([Ay3] 2.3). — $H_i(B^*B_*\mathbb{Q}) = 0$ *pour* $i < 0$.

INDICATION SUR LA PREUVE — D'après [L-W], le complexe de De Rham donne naissance à un objet $\Omega^*_{/k}$ de $\mathbf{DM}(k)$ [19]. Le théorème de Grothendieck s'interprète alors comme un isomorphisme entre $\Omega^*_{/k}$ et $B_*\mathbb{C}$ (après tensorisation par $\mathbb{C}$). Il s'agit donc de voir la propriété d'annulation pour $B^*\Omega^*_{/k}$, qui se calcule comme $\mathrm{Tot}\,\Omega^*(\bar{\mathbb{D}}^*_{et})$. On aboutit à un « complexe de De Rham infini », nul en degrés (homologiques) < 0 :
$\xrightarrow{d} \Omega^{\infty-j} \xrightarrow{d} \Omega^{\infty-(j-1)} \to \cdots \Omega^{\infty-0} \to 0$, avec $\Omega^{\infty-j} := \bigoplus_{I\subset\mathbb{N}\setminus 0, |I|=j} \mathcal{O}^{(I)}_{alg}(\bar{\mathbb{D}}^\infty) \bigwedge_{i\in\mathbb{N}\setminus(I\cup 0)} dz_i,$
où - $\mathcal{O}_{alg}(\bar{\mathbb{D}}^n)$ est l'algèbre des fonctions analytiques sur le polydisque fermé qui sont algébriques sur $k(z_1,\dots,z_n)$,
- $\mathcal{O}_{alg}(\bar{\mathbb{D}}^\infty) = \bigcup \mathcal{O}_{alg}(\bar{\mathbb{D}}^n)$, et
- $\mathcal{O}^{(I)}_{alg}(\bar{\mathbb{D}}^\infty)$ est le sous-espace des fonctions s'annulant pour $z_i = 0$ ou 1 si $i \in I$.

COROLLAIRE 4.4. — *$H_0(B^*B_*\mathbb{Q})$ hérite d'une structure de $\mathbb{Q}$-algèbre de Hopf H_{Ay}.*

Le $\mathbb{Q}$-schéma en groupe défini par son spectre est le *groupe de Galois motivique d'Ayoub* $\mathbf{G}^{Ay}_{mot}(k)$, et

$$\mathbf{MM}_{Ay}(k) := \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}\,\mathbf{G}^{Ay}_{mot}(k) = \mathrm{Comod}\,\mathcal{H}_{Ay}$$

est la catégorie tannakienne des *motifs mixtes d'Ayoub* sur k à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

4.4. Torseurs des périodes selon Ayoub

La cohomologie de De Rham algébrique donne lieu à un $\otimes$-foncteur $\mathbf{MM}_{Ay}(k) \to Vec_k$ (réalisation de De Rham), et l'on peut de nouveau construire le torseur $\mathbf{P}^{Ay}_{mot}(k) := \mathbf{Iso}^{\otimes}(H_{dR}, H_B \otimes k)$ sous $\mathbf{G}^{Ay}_{mot}(k)_k$, doté de son point canonique $\varpi :\ \mathrm{Spec}\,\mathbb{C} \to \mathbf{P}^{Ay}_{mot}(k)$. Son algèbre de fonctions n'est autre que le 0-ième groupe d'homologie du complexe de De Rham infini ci-dessus. Explicitement, soit $\mathcal{P}^{eff}_{Ay}$ le quotient de $\mathcal{O}_{alg}(\bar{\mathbb{D}}^\infty) = \cup\, \mathcal{O}_{alg}(\bar{\mathbb{D}}^n)$ par le sous-k-espace engendré par les éléments de la forme

$$\frac{\partial g}{\partial z_i} - g_{|z_i=1} + g_{|z_i=0} \quad (i \in \mathbb{N} \setminus 0).$$

C'est une k-algèbre, et on définit $\mathcal{P}_{Ay}$ en inversant la classe d'un élément convenable de $\mathcal{O}_{alg}(\bar{\mathbb{D}}^1)$ dont l'intégrale sur $[0,1]$ vaut $2\pi i$.

Par la règle de Newton-Leibniz, l'intégration $h \mapsto \int_{[0,1]^\infty} h\, dz_1 dz_2 \cdots$ passe au quotient et définit un homomorphisme k-linéaire $\int_\square :\ \mathcal{P}_{Ay} \to \mathbb{C}$.

THÉORÈME 4.5 ([Ay5]). — *$\mathbf{P}^{Ay}_{mot}(k)$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Spec}\,\mathcal{P}_{Ay}$, en sorte que ϖ correspond à $\int_\square$.*

COROLLAIRE 4.6. — *Supposons $k \subset \bar{\mathbb{Q}}$. Alors ϖ est un point générique* (conjecture de Grothendieck) *si et seulement si $\int_\square$ est injectif* (variante d'Ayoub de la conjecture de Kontsevich-Zagier).

19. C'est aussi une conséquence d'un résultat profond de Morel-Cisinski-Déglise-Ayoub selon lequel $\mathbf{DM}(k)$ est équivalente à la catégorie analogue « sans transferts », cf. [Ay3, app. B] ; c'est dans ce cadre-ci, plus flexible, que bien des constructions se font, notamment celle des 4 opérations de Grothendieck.

Remarque. Ce qui surprend quand on compare avec le cadre de Nori-Kontsevich-Zagier, c'est d'une part que les relations de Stokes n'y figurent que sous leur forme la plus élémentaire (Newton-Leibniz), et surtout que les relations de changement de base ont disparu. En fait, elles se déduisent de Stokes. Ayoub propose de s'en convaincre, dans le cas d'une seule variable z_1, par un petit calcul ingénieux : partant de $h(z_1) \in \mathcal{O}_{alg}(\bar{\mathbb{D}}^1)$ et d'une fonction $f(z_1)$ algébrique qui envoie le disque unité dans lui-même en fixant 0 et 1, la formule de changement de variable montre que $g(z_1) := f'(z_1)h(f(z_1)) - h(z_1)$ est dans le noyau de $\int_\square$. On peut l'écrire sous la forme prédite, en passant à deux variables : posant $f_1 = f(z_1) - z_1$, $f_2 = -z_2 f'(z_1) + z_2 - 1$, et $g_i = f_i \cdot h(z_2 f(z_1) + (1 - z_2)z_1)$ pour $i = 1, 2$, on obtient $g_{1|z_1=0 \,\mathrm{ou}\, 1} = 0$, $g_{2|z_2=0} = -h(z_1)$, $g_{2|z_2=1} = f'(z_1)h(f(z_1))$, et $\frac{\partial g_1}{\partial z_1} + \frac{\partial g_2}{\partial z_2} = 0$, d'où $g(z_1) = \sum_1^2 \left(\frac{\partial g_i}{\partial z_i} - g_{i|z_i=1} + g_{i|z_i=0}\right)$.

4.5. Equivalence des catégories de Nori et d'Ayoub

Annoncée dans [Ay5] et [Ay6], elle est démontrée en détail dans [C-GAS].

THÉORÈME 4.7 ([C-GAS]). — *On a une $\otimes$-équivalence canonique* $\mathbf{MM}_N(k) \xrightarrow{\sim} \mathbf{MM}_{Ay}(k)$.

Le foncteur provient de l'universalité des motifs de Nori. Son inverse est construit via les torseurs de périodes, en observant qu'on a un homomorphisme canonique $\mathcal{P}_{Ay} \to \mathcal{P}_{KZ}$, compatible avec les évaluations $\int$ et $\int_\square$: si A est une $k[z_1, \dots, z_n]$-algèbre étale contenant $g \in \mathcal{O}_{alg}(\bar{\mathbb{D}}^n)$, et Y est le diviseur de $X := \operatorname{Spec} A$ donné par $\prod z_i(z_i - 1) = 0$, on envoie la classe de g dans $\mathcal{P}_{Ay}$ sur celle de $[X, Y, n, \gamma, g dz_1 \cdots dz_n]$, où γ est donnée par $[0,1]^n \hookrightarrow \bar{\mathbb{D}}^n \to X(\mathbb{C})$.

COROLLAIRE 4.8. — $\mathcal{P}_{Ay} \cong \mathcal{P}_{KZ}$.

(C'est donc bien de la « même » conjecture de Grothendieck qu'il s'agit dans les cor. 3.6 et 4.6.)

Remarque. Le formalisme d'Ayoub permet d'écrire les périodes $\int_\Delta \omega$ comme combinaisons k-linéaires de périodes dont le domaine d'intégration est un cube [20]. Dans l'autre sens, on peut fixer plutôt ω et exprimer les périodes comme combinaisons k-linéaires de volumes de « solides algébriques » [Y].

Dans la suite, nous identifierons grâce à 4.7 les deux catégories de motifs mixtes, et omettrons les indices N, Ay. On peut résumer toute la situation dans le diagramme essentiellement commutatif suivant (qui, insistons, ne dépend d'aucune conjecture), sorte d'« organigramme » de la théorie actuelle des motifs :

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbf{CHM}(k) & \hookrightarrow & \mathbf{DM}_{gm}(k) & \to & D^b(\mathbf{MM}(k)) \\
\downarrow & & & & \downarrow \sum H^i \\
\mathbf{M}(k) & & \hookrightarrow & & \mathbf{MM}(k)
\end{array}
$$

20. c'est bien sûr ici que sont cachées les relations de changement de variable algébrique qui n'apparaissent plus dans le th. 0.1.

($\mathbf{CHM}(k)$ est la catégorie des « motifs de Chow » à coefficients rationnels, le foncteur vertical de gauche le passage de l'équivalence rationnelle à l'équivalence homologique, et le second foncteur horizontal du haut est construit par la théorie de Nori).

5. LES THÉORÈMES D'AYOUB SUR LES PÉRIODES FONCTIONNELLES

5.1. Le « théorème de la partie fixe » motivique

Soit K un corps de fonctions sur $k = \bar{k}$ et supposons que le plongement complexe de k se prolonge en un plongement complexe $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$. Le changement de base $\otimes_k K$ induit un homomorphisme $\mathbf{G}_{mot}(K) \to \mathbf{G}_{mot}(k)$ qui est surjectif [Ay3, 2.34]. Notons $\mathbf{G}_{mot}(K \mid k)$ son noyau. Par ailleurs, soit $\pi_1((K \mid k)^{an})$ le groupe pro-discret limite du pro-système des groupes fondamentaux (basés en σ) des espaces de points complexes des modèles lisses de K/k.

Théorème 5.1 ([Ay3] 2.57). — *On a un homomorphisme canonique $\pi_1((K \mid k)^{an}) \to \mathbf{G}_{mot}(K \mid k)$ dont l'image est Zariski-dense.*

Remarque. Comme en 1.4 a), on en déduit que si S est une k-variété de corps de fonctions K, tout système local motivique $\underline{M} \in \mathbf{MM}(S)$, dont le système local sous-jacent est constant, est constant (i.e. provient d'un motif sur k).

Indication sur la preuve de 5.1 — On se ramène au cas où K/k est de degré de transcendance 1. Le premier pas consiste à décrire $\mathbf{G}_{mot}(K \mid k)$ à l'aide de la construction tannakienne de la prop. 4.2 . Pour cela, on considère une k-courbe lisse pointée (S, s) de corps de fonctions K (et de morphisme structural noté $p : S \to \operatorname{Spec} k$)). On applique 4.2 au foncteur $s^* : DM_{sm}(S) \to DM(k)$ (où $DM_{sm}(S)$ est la plus petite catégorie triangulée de $DM(S)$ contenant les objets dualisables et stable par coproduit), pour obtenir une algèbre de Hopf $\mathcal{H}(S, s)$. On obtient l'algèbre de Hopf $\mathbf{G}_{mot}(K \mid k)$ en appliquant B^* et en passant à la colimite sur les modèles S (en prenant garde aux changements de point base). Le point clé ici est que $B^*\mathcal{H}(S, s)$ est concentré en degré 0 (ce qui rend $\mathbf{G}_{mot}(K \mid k)$ plus accessible que les groupes absolus $\mathbf{G}_{mot}(K)$ ou $\mathbf{G}_{mot}(k)$).

Le deuxième pas consiste à exhiber une application canonique de $H_0(B^*\mathcal{H}(S, s))$ vers l'algèbre des fonctions sur l'enveloppe proalgébrique de $\pi_1(S(\mathbb{C}), s)$ et à montrer qu'elle est injective. Là, le point clé est que les sections globales du système local $\mathcal{L}$ sous-jacent à un objet $\underline{M} \in DM_{sm}(S)$ se calculent comme $\operatorname{Im}(p^{an*}p^{an}_*\mathcal{L} \to \mathcal{L})$, et que l'image de $p^*p_*\underline{M} \to \underline{M}$ a un sens motivique (des arguments alternatifs, dans le contexte des motifs de Nori-Arapura, ont été proposés indépendamment par Nori et P. Jossen).

5.2. Analogue fonctionnel de la conjecture des périodes à la Grothendieck

Revenons à la situation de périodes dépendant algébriquement d'un paramètre t comme dans l'introduction. Elles sont associées à une paire (X, Y) au-dessus d'une courbe algébrique S munie d'une coordonnée t, ou plus généralement (quitte à restreindre S) à un système local motivique $\underline{M} \in \mathbf{MM}(S)$. On peut descendre le corps de base $\mathbb{C}$ à un sous-corps $k = \bar{k}$ sur lequel S et $\underline{M}$ sont définis, et tel que le plongement complexe de k se prolonge en un plongement complexe σ du corps de fonctions K de la courbe descendue. Comme on l'a déjà vu, les périodes de M sont des fonctions holonomes multiformes à croissance modérée (0.1, 0.4, 1.3), solutions de la connexion de Gauss-Manin associée à $\underline{M}$. Par la théorie de Galois différentielle et la correspondance de Riemann-Hilbert, le th. 5.1 implique

Corollaire 5.2 ([Ay6] th. 44). — *Le degré de transcendance de l'extension de $\mathbb{C}(t)$ engendrée par les périodes de $\underline{M}$ est égal à la dimension de l'image de $\mathbf{G}_{mot}(K \mid k)$ dans $GL(H_B(\underline{M}_\sigma))$.*

Remarque 1. En pratique, connaître le degré de transcendance ne suffit pas : il faut faire intervenir la géométrie du torseur des périodes, selon que l'on a affaire à des problèmes d'indépendance de périodes fonctionnelles sur $\mathbb{C}$ plutôt que sur $\mathbb{C}(t)$ (cf. 1.2), ou de périodes relativement à d'autres (cf. 1.3), ou de certaines composantes seulement de la matrice des périodes (cf. [An3, ch. 23]). En général, groupes et torseurs ne suffisent pas pour analyser ces questions, et il faut faire intervenir les *variétés quasi-homogènes* pour contrôler les relations polynomiales entre solutions de Gauss-Manin [An5].

5.3. Analogue fonctionnel de la conjecture des périodes à la Kontsevich

Dans la même situation, l'usage d'une réalisation de Betti attachée à σ comme ci-dessus n'est pas tout à fait satisfaisante, du fait de la descente de $\mathbb{C}$ à k et du choix arbitraire de σ, et surtout de ce que les accouplements $H_{dR}(X_{k(t)}) \otimes H_B(X_\sigma) \to \mathbb{C}$ sont à valeurs constantes, données par les valeurs des périodes en σ. Pour prendre en compte le développement en série des périodes, il y a lieu de remplacer σ par un « point tangentiel » et de construire la *réalisation de Betti tangentielle* correspondante. Cette construction, menée à bien dans [Ay5], repose sur un formidable appareil de techniques développées antérieurement par le même auteur, parmi lesquelles la définition des *cycles proches motiviques* et leur interprétation dans le cadre d'une *variante rigide-analytique de* $\mathbf{DM}(\mathbb{C}((t)))$ [Ay1][Ay4]. En adaptant les arguments du th. 4.5 ci-dessus à la réalisation de Betti tangentielle et aux groupes de Galois motiviques « relatifs » (via 5.1), il aboutit au terme d'un long parcours à l'analogue fonctionnel du cor. 4.6 formulé au th. 0.1, énoncé inconditionnel d'une étonnante simplicité [(21)].

21. qui invite le lecteur optimiste à rechercher une preuve élémentaire, et le lecteur sceptique à tenter de fabriquer des contre-exemples - ce qui n'est d'ailleurs pas difficile si l'on s'autorise des fonctions algébriques ayant des singularités sur le polydisque (« contre-exemples » de même farine que ceux des ovales singuliers de Huygens et Leibniz, lecteurs sceptiques du lemme XXVIII de Newton).

Remerciements. Je remercie J. Ayoub, D. Bertrand et A. Huber pour leur aide durant la préparation de ce rapport, ainsi que P. Cartier pour sa relecture attentive.

RÉFÉRENCES

[An1] Y. ANDRÉ – *Mumford-Tate groups of mixed Hodge structures and the theorem of the fixed part*, Compos. Math. **82** (1992), 1-24.

[An2] Y. ANDRÉ – *Pour une théorie inconditionnelle des motifs*, Publ. Math. I.H.É.S. **83** (1996), 5-49.

[An3] Y. ANDRÉ – *Une introduction aux motifs*, Panoramas et Synthèses **17** SMF (2004).

[An4] Y. ANDRÉ – *Galois theory, motives and transcendental numbers*, Renormalization and Galois theories, IRMA Lect. in Math. Theo. Phys. **15** (2009), 165-177.

[An5] Y. ANDRÉ – *Solution algebras of differential equations and quasi-homogeneous varieties : a new differential Galois correspondence*, Ann. Sci. ÉNS **47** 2 (2014), 449-467.

[Ar] D. ARAPURA – *An abelian category of motivic sheaves*, Adv. Math. **233** 1 (2013), 135-195.

[Ar-D] D. ARAPURA, A. DHILLON – *The motive of the moduli stack of G-bundles over the universal curve*, Proc. Ind. Acad. Sci. **118** (2008).

[Ay1] J. AYOUB – *Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique II*, Astérisque **315** SMF (2008).

[Ay2] J. AYOUB – *Notes sur les opérations de Grothendieck et la réalisation de Betti*, J. Inst. Math. Jussieu **9** 2 (2010), 225-263.

[Ay3] J. AYOUB – *L'algèbre de Hopf et le groupe de Galois motiviques d'un corps de caractéristique nulle*, J. reine angew. Math. **693** (2014), partie I : 1-149 ; partie II : 151-226.

[Ay4] J. AYOUB – *Motifs des variétés analytiques rigides*, Mém. SMF **140-141** (2015).

[Ay5] J. AYOUB – *Une version relative de la conjecture des périodes de Kontsevich-Zagier*, Ann. of Math. (2) **181** n° 3 (2015), 905-992.

[Ay6] J. AYOUB – *Periods and the conjectures of Grothendieck and Kontsevich-Zagier*, EMS Newsletter **91** mars 2014, 12-18.

[Ay-BV] J. AYOUB, L. BARBIERI-VIALE – *Nori 1-motives*, Math. Annalen **361**, n° 1-2 (2015), 367-402.

[BV-C-L] L. BARBIERI-VIALE, O. CARAMELLO, L. LAFFORGUE – *Syntactic categories for Nori motives*, prépublication (2015), ArXiV :1506 :06113.

[BB] P. BELKALE, P. BROSNAN – *Periods and Igusa local zeta functions*, Int. Math. Res. Not. **49** (2003), 2655-2670.

[Be] D. BERTRAND – *Manin's theorem of the kernel : a remark on a paper of C-L. Chai*, prépublication (2008), http ://webusers.imj-prg.fr/∼daniel.bertrand/Recherche/rpdf/Manin_Chai.pdf

[B-Z] J. BORWEIN, I. ZUCKER – *Fast evaluation of the gamma function for small rational fractions using complete elliptic integrals of the first kind*, J. Num. Analysis **12** (1992), 519-526.

[B-C] J.-B. BOST, F. CHARLES – *Some remarks concerning the Grothendieck period conjecture*, à paraître au J. reine angew. Math.

[Bro] F. BROWN – *Mixed Tate motives over* $\mathbb{Z}$, Ann. of Math. (2) **175** (2) (2012) 949-976.

[Bru] A. BRUGUIÈRES – *On a tannakian theorem due to Nori*, prépublication (2004), http ://www.math.univ-montp2.fr/ bruguieres/docs

[C-GAS] U. CHOUDHURY, M. GALLAUER ALVES de SOUZA – *An isomorphism of motivic Galois groups*, prépublication (2014), ArXiv :1410 :6104.

[D1] P. DELIGNE – *Théorie de Hodge II*, Publ. Math. I.H.É.S. **40** (1971), 5-57.

[D2] P. DELIGNE – *Théorie de Hodge III*, Publ. Math. I.H.É.S. **44** (1974), 5-77.

[D3] P. DELIGNE – *Cycles de Hodge absolus et périodes des intégrales des variétés abéliennes*, notes de J.-L. Brylinski, Mém. SMF **2** (1980), 23-33.

[D4] P. DELIGNE – *Multizêtas, d'après Francis Brown*, Sém. Bourbaki 2011/12, Exp. n° 1048, Astérisque **352** (2013), 1-26.

[D-M-O-S] P. DELIGNE, J.S. MILNE A. OGUS, K. SHIH – *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, Springer LNM **900** (1982).

[G] A. GROTHENDIECK – *On the de Rham cohomology of algebraic varieties*, Publ. Math. I.H.É.S. **29**, 95-103 (1966).

[G-S] A. GROTHENDIECK, J.-P. SERRE – *Correspondance* (P. Colmez, J.-P. Serre éds.) Doc. Math. **2** SMF (2001).

[H-MS1] A. HUBER, S. MÜLLER-STACH – *On the relation between Nori motives and Kontsevich periods*, prépublication (2011), ArXiV :1105 :0865.

[H-MS2] A. HUBER, S. MÜLLER-STACH – *Periods and Nori motives* (with contributions of B. Friedrich and J. von Wangenheim), livre en préparation, http ://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/preprints/buch/mantel.html

[J] U. JANNSEN, *Motives, numerical equivalence and semi-simplicity*, Invent. math. **107** (1992), 447-452.

[K1] M. KONTSEVICH – *Periods*, Journée SMF, Mathématique et Physique (1999).

[K2] M. KONTSEVICH – *Operads and motives in deformation quantisation*, Letters in Math. Physics **48** (1999), 35-72.

[K-Z] M. KONTSEVICH, D. ZAGIER – *Periods*, Mathematics unlimited - 2001 and Beyond. Springer (2001), 771-808.

[La] S. LANG – *Transcendental numbers*, Addison-Wesley (1966).

[L-W] F. LECOMTE, N. WACH – *Le complexe motivique de De Rham*, Manuscripta Math. **129**, no. 1, 75-90 (2009).

[Le] M. LEVINE – *Mixed motives*, K-theory Handbook, Vol. 1, Berlin (2005), 429-521.

[M] Yu. MANIN – *Rational points of algebraic curves over function fields*, Izv. AN SSSR Mat. **27** (1963), 1395-1440 ; AMS Transl. **37** (1966), 189-234.

[N] M. NORI – Cours au Tata Inst. Fund. Res., notes de N. Fakhruddin, Mumbai (2000).

[P-S] C. PETERS, J. STEENBRINK – *Monodromy of variations of Hodge structure*, Acta Applicandae Math. **75** (2003), 183-194.

[S-Z] J. STEENBRINK, S. ZUCKER – *Variations of mixed Hodge structures I*, Invent. math. **80** (1985), 489-542.

[Va] V. VASSILIEV – *Applied Picard-Lefschetz theory*, Mathematical Surveys **97**, AMS, Providence (2002).

[V-S-F] V. VOEVODSKY, A. SUSLIN, E. FRIEDLANDER – *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, Annals of Mat. Studies **143**, Princeton Univ. Press (2000).

[Wal] M. WALDSCHMIDT – *Transcendence of periods : the state of the art*, Pure Appl. Math. Q. **2** (2006), 435-463.

[Wan] J. von WANGENHEIM – *Nori motive und Tannaka-Theorie*, prépublication (2011), ArXiv :1111 :5146.

[We] A. WEIL – *Sur les périodes des intégrales abéliennes*, Comm. Pure. Appl. Math. **29** (1976), 813-819.

[Wu] G. WÜSTHOLZ – *Leibniz' conjecture, periods and motives*, Colloquium De Giorgi 2009, Scuola Norm. Sup. (2012), 33-42.

[Y] M. YOSHINAGA, *Periods and elementary real numbers*, prépublication (2008), ArXiv :0805 :0349.

Yves ANDRÉ

Institut de Mathématiques de Jussieu (IMJ-PRG)
UPMC
UMR 7586 du CNRS
Équipe de Théorie des Nombres
4, place Jussieu
Case 247
F–75252 Paris Cedex 5
E-mail : `yves.andre@imj-prg.fr`