Séminaire BOURBAKI Juin 2016
68ème année, 2015-2016, n$^{\text{o}}$ 1116

# TOPOLOGIE DES HYPERSURFACES NODALES DE FONCTIONS ALÉATOIRES GAUSSIENNES
## [d'après Nazarov et Sodin, Gayet et Welschinger]

par **Nalini ANANTHARAMAN**

## INTRODUCTION

Depuis l'expérience de Chladni à la fin du XVIIIème siècle, les lignes nodales des fonctions propres du laplacien fascinent : la manière dont leur forme varie en fonction de la fréquence est une énigme pour les mathématiciens. Une quantité aussi élémentaire que le *nombre de composantes connexes* des ensembles nodaux reste difficile d'accès, et constitue le sujet de cet exposé. Plaçons-nous par exemple sur une variété riemannienne compacte connexe $M$. Ordonnons les valeurs propres du laplacien, répétées avec multiplicité, en une suite $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \lambda_n \leq \ldots$ qui tend vers l'infini, et notons $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée de $L^2(M, \mathbb{R})$ formée de fonctions propres associées. On notera $Z_{\psi_n}$ le lieu d'annulation de $\psi_n$, appelé aussi ensemble nodal de $\psi_n$ ; les domaines nodaux sont les composantes connexes de $M \setminus Z_{\psi_n}$. Courant a démontré dans les années 1920 que le nombre de domaines nodaux de $\psi_n$ est inférieur ou égal à $n$. Mais on sait dès l'article de Pleijel [Ple] que cette borne ne peut être atteinte que pour un nombre fini de $n$ : le lecteur intéressé pourra consulter l'article d'exposition [BNH] qui contient, entre autres, la description des cas d'égalité pour certaines géométries simples. En fait il n'est même pas vrai que le nombre de domaines nodaux doive tendre vers l'infini avec $n$ [St, Lew, BH1, BH2]. On renvoie aux articles [JJ, JZ, Z3] pour des résultats récents permettant, sous des hypothèses très particulières, d'affirmer l'existence d'une sous-suite $(n_k)$ telle que le nombre de domaines nodaux de $(\psi_{n_k})$ tende vers l'infini.

Un autre domaine où l'étude du lieu des zéros occupe une place centrale est évidemment la géométrie algébrique. Les variétés projectives sont définies comme lieu des zéros de polynômes homogènes. Dans le cas des points complexes, la topologie du lieu des zéros offre peu de mystères, du moins en codimension 1 : les hypersurfaces non singulières de degré donné $d$ de $\mathbb{CP}^N$ sont toutes isotopes, donc difféomorphes entre elles. Leurs nombres de Betti sont les mêmes que ceux de $\mathbb{CP}^N$, sauf le $(N-1)$-ième qui est un polynôme explicite en le degré $d$, de la forme $d^N + O(d^{N-1})$. Les preuves de ces faits bien connus depuis le célèbre travail fondateur de Lefschetz sont reproduites, par exemple, dans [KW] §4, [Petr, P], et les lemmes 2 et 3 de [GW2]. Dans le cas simple de $N = 1$, l'« hypersurface » n'est autre que l'ensemble des racines d'un polynôme de degré $d$ à une variable, et, donc, possède génériquement $d$ éléments. Dans le domaine réel, la situation est plus compliquée : le nombre de racines *réelles* d'un polynôme de degré $d$ à coefficients *réels* peut varier entre 0 et $d$, en ayant la même parité que $d$. La question reste énigmatique déjà à partir de $N = 2$, si on la pose comme dans la première partie du 16-ème problème de Hilbert, c'est-à-dire comme l'étude de l'arrangement dans $\mathbb{RP}^N$ de l'ensemble des points réels d'une hypersurface réelle non singulière en fonction de son degré. Si on se restreint au problème du nombre de composantes connexes, la situation ne s'améliore que peu : la borne optimale n'est connue que pour $d \leq 3$ avec $N$ quelconque, $N \leq 2$ pour tout $d$ (Harnack obtient alors la borne optimale de $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)+1$ composantes connexes [Ha, Kl]), $N = 3$ et $d = 4$ [Kh72]. Les articles [ItKh, Ore] tentent de s'approcher de la borne supérieure de 25 composantes connexes obtenues par Petrovskiĭ et Oleĭnik [Petr, PO] pour $N = 3, d = 5$. En général, grâce d'un côté à la théorie de Smith [Smi] et la théorie de Morse [Th, Mil], et de l'autre côté à la méthode de patchwork de Viro [Vi, Bih], on sait que pour $N$ fixé le nombre maximal de composantes connexes grandit en fonction de $d$ comme $a_N d^N$.

Une autre manière d'envisager ces questions est de considérer des polynômes ou des fonctions propres aléatoires, et de s'interroger d'un point de vue statistique sur les propriétés du lieu de leurs zéros. Plus généralement, on peut formuler la question suivante :

*Soit $\mathcal{H}$ un espace de fonctions sur une variété riemannienne $M$, muni d'une mesure de probabilité. Que peut-on dire statistiquement sur les propriétés topologiques du lieu des zéros d'une fonction de $\mathcal{H}$ ?*

La réponse dépend bien sûr de la mesure de probabilité choisie, et n'a de sens que si cette mesure paraît quelque peu naturelle.

Le théorème 3.6 de ce texte, tiré de l'article [NS2], concerne comme cas particuliers la plupart des exemples de cette introduction. Il traite le problème dans un cadre asymptotique, sous des hypothèses très précises que nous énoncerons en temps voulu : soit $(\mathcal{H}_L)$ une famille de sous-espaces vectoriels de dimension finie de $C^0(M)$, indexée par un paramètre $L$ qui tend vers l'infini. On suppose que $\dim \mathcal{H}_L \underset{L\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Chaque espace $\mathcal{H}_L$ est muni d'une mesure de probabilité. Quelles sont les propriétés statistiques du lieu des zéros $Z_f$ d'une fonction $f \in \mathcal{H}_L$ dans la limite $L \longrightarrow +\infty$ ? Que peut-on dire, par exemple, sur la loi du nombre de composantes connexes de $Z_f$ ?

Pour des raisons qui deviendront claires plus tard, on considérera uniquement ici des lois gaussiennes.

Définition 0.1. — *Soit $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension $D$. Notons $\|\cdot\|$ la norme venant du produit scalaire. On appellera mesure gaussienne sur $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ la mesure de probabilité sur $\mathcal{H}$*

$$d\mathbb{P}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} e^{-\frac{\|p\|^2}{2}} dp$$

*où $dp$ est la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathcal{H}$.*

Soit $(e_j), j = 1, \dots, D$ une base orthonormée de $\mathcal{H}$. Pour $p \in \mathcal{H}$, écrivons $p = \sum_{j=1}^{D} p_j e_j$ avec $p_j \in \mathbb{R}$. On a $d\mathbb{P}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} \Pi_{j=1}^{D} e^{-p_j^2/2} dp_j$ ; autrement dit, choisir un élément $p$ au hasard selon la loi gaussienne $\mathbb{P}$ revient à considérer que les $p_j$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes, suivant des lois gaussiennes centrées réduites.

Il est important de souligner que les mesures gaussiennes que nous considérerons vivent toujours sur des espaces de fonctions à valeurs *réelles*, et de classe $C^2$ (en fait, $C^\infty$ dans tous les exemples). Les lieux des zéros sont génériquement des hypersurfaces régulières. Il existe bien sûr de nombreux travaux concernant les zéros des trajectoires browniennes ou d'autres processus gaussiens irréguliers ; ce n'est pas le sujet de cet exposé. Nous n'essaierons pas non plus de traiter de manière exhaustive les questions portant sur les zéros de fonctions complexes.

Bien entendu, un changement de structure euclidienne modifie la définition de la mesure gaussienne. Nous allons le voir dans les exemples, les résultats asymptotiques quand la dimension tend vers l'infini peuvent changer drastiquement quand on modifie la structure euclidienne.

*Exemple 0.2.* — « **Ensemble de Kac** ». On munit $\mathbb{R}_d[X]$ (l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à $d$) d'une structure euclidienne en décrétant que la base $1, X, \dots, X^d$ est orthonormée. Soit $\mathbb{P}$ la mesure gaussienne correspondante sur $\mathbb{R}_d[X]$. Pour $P \in \mathbb{R}_d[X]$, notons $Z_P$ l'ensemble des racines réelles de $P$, et $\sharp Z_P$ le cardinal de cet ensemble. Sous cette loi $\mathbb{P}$, Mark Kac [Kac] a obtenu une formule intégrale explicite pour l'espérance de la variable aléatoire $\sharp Z_P$, qui donne l'asymptotique suivante :

$$\mathbb{E}(\sharp Z_P) \sim_{d \longrightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \ln d.$$

À ma connaissance, le modèle de Kac (en dimension 1) est le seul pour lequel des lois non gaussiennes ont été étudiées [BP32, LO, Kac2, Stev, EO, IM1, IM2]. Les articles récents [TV, DNV] énoncent des résultats d'universalité pour les racines de $\sum_{j=0}^{d} \xi_j X^j$ (où les $\xi_j$ sont des variables aléatoires indépendantes), disant que leur distribution asymptotique quand $d \longrightarrow +\infty$ ne dépend que d'un nombre fini de moments des $\xi_j$.

*Exemple 0.3.* — « **Ensemble de Kostlan** ». On munit $\mathbb{R}_d[X]$ d'une autre structure euclidienne en décrétant que la base des $\binom{d}{k}^{1/2} X^k$ $(0 \le k \le d)$ est orthonormée. Avec la nouvelle mesure gaussienne associée, Kostlan calcule l'espérance de la variable aléatoire $\sharp Z_P$ [Ko, ShSm] :

$$\mathbb{E}(\sharp Z_P) = d^{1/2}. \tag{1}$$

*Exemple 0.4.* — « **Ensemble de Kostlan** » **en dimension** $N$ ou « **ensemble de Fubini–Study complexe** ». L'espace $\mathbb{C}_{d,hom}[X_0, \dots, X_N]$ des polynômes homogènes de degré $d$ à coefficients complexes est muni du produit hermitien, invariant par l'action de $U(N+1)$,

$$\langle P, Q \rangle_{FS} = \int_{\mathbb{S}^{2N+1}} \overline{P(z)} Q(z) d\sigma(z) \tag{2}$$

où $\sigma$ est la mesure uniforme sur la sphère complexe $\mathbb{S}^{2N+1} = \{z = (z_0, z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^{N+1}, |z_0|^2 + \ldots + |z_N|^2 = 1\}$. Ce produit hermitien sur $\mathbb{C}_{d,hom}[X_0, \ldots, X_N]$ se restreint en un produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}_{d,hom}[X_0, \ldots, X_N]$. Les polynômes $\binom{d}{\alpha_0,\ldots,\alpha_N}^{1/2} X_0^{\alpha_0} \ldots X_N^{\alpha_N}$ forment alors une base orthonormée de $\mathbb{R}_{d,hom}[X_0, \ldots, X_N]$. On munit $\mathbb{R}_{d,hom}[X_0, \ldots, X_N]$ de la mesure de probabilité gaussienne associée.

Pour $P \in \mathbb{R}_{d,hom}[X_0, \ldots, X_N]$, on note $Z_P = \{x \in \mathbb{RP}^N, P(x) = 0\}$ l'ensemble des zéros réels de $P$. Podkorytov a donné une formule exacte pour l'espérance de $\chi(Z_P)$, caractéristique d'Euler du lieu des zéros de $P$, qui généralise le calcul de Kostlan (1) : voir [Pod1, Pod2], et [Bur]. Cette formule donne pour $N$ impair $\mathbb{E}(\chi(Z_P)) \sim_{d \longrightarrow +\infty} (-1)^{(N-1)/2} \epsilon_N d^{N/2}$ avec une constante positive explicite $\epsilon_N$. Comme la caractéristique d'Euler peut s'exprimer comme intégrale sur $Z_P$ d'une fonction s'exprimant en termes de $P, P', P''$, ce calcul peut se faire par la formule de la co-aire ou de Kac-Rice que nous donnerons plus tard (14). On dit parfois dans ce contexte que la caractéristique d'Euler est une quantité « locale » . Sont dites « locales » les quantités dont l'espérance peut être calculée par une variante de la formule de Kac-Rice ; intuitivement, ce sont des quantités qui se comportent de manière additive quand on partitionne le domaine $\mathbb{RP}^N$ en un nombre fini de sous-domaines. Un autre exemple de quantité locale est le volume de $Z_P$. À l'inverse, le nombre de composantes connexes $b_0(Z_P)$ pour $N > 1$ ou, plus généralement, les nombres de Betti de $b_i(Z_P)$ ne sont pas des quantités locales, d'où la difficulté à les étudier.

Au-delà des simples nombres de Betti $b_i(Z_P)$, on s'intéressera au type de difféomorphisme des composantes connexes de $Z_P$. Notons $H(N-1)$ l'ensemble des types de difféomorphisme de variétés connexes compactes de dimension $(N-1)$ plongeables dans $\mathbb{R}^N$. Précisons que $H(N-1)$ est dénombrable [CK].

Théorème 0.5 (cas particulier de [GW2, GW3]). — *On considère l'ensemble de Kostlan en dimension $N$. Pour presque tout $P \in \mathbb{R}_{d,hom}[X_0, \ldots, X_N]$, 0 n'est pas une valeur critique de $P$. Notons alors $Z_P = \{x \in \mathbb{RP}^N, P(x) = 0\}$. Soit enfin, pour $0 \leq i \leq N-1$, $b_i(Z_P)$ le $i$-ème nombre de Betti de $Z_P$.*

*(i) Il existe deux constantes $c^+(i, N)$ et $c^-(i, N) > 0$ telles que*

$$c^-(i, N) \leq \liminf_{d \longrightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(b_i(Z_P))}{d^{N/2} \operatorname{Vol}_{FS} \mathbb{RP}^N} \leq c^+(i, N). \tag{3}$$

*(ii) Soit $S \in H(N-1)$ un type de difféomorphisme d'hypersurface compacte connexe. Pour $P \in \mathbb{R}_{d,hom}[X_0, \ldots, X_N]$, soit $N_S(P)$ le nombre de composantes connexes de $Z_P$ qui sont de type $S$. Alors il existe $c_S > 0$ tel que*

$$\liminf_{d \longrightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(N_S(P))}{d^{N/2} \operatorname{Vol}_{FS} \mathbb{RP}^N} \geq c_S.$$

*On a noté $\operatorname{Vol}_{FS} \mathbb{RP}^N$ le volume de $\mathbb{RP}^N$ pour la métrique riemannienne induite par la forme de Fubini-Study sur $\mathbb{CP}^N$.*

Il n'y a pas lieu de s'inquiéter de la nuance entre « plongeable dans $\mathbb{R}^N$ » et « plongeable dans $\mathbb{RP}^N$ », car on montre au passage que les composantes connexes de $Z_P$ sont dans leur immense majorité de diamètre $O(d^{-1/2})$, donc très petites.

*Remarque 0.6.* — On peut remplacer $H(N-1)$ par l'ensemble des hypersurfaces compactes (non nécessairement connexes) de $\mathbb{R}^N$, modulo isotopie globale. Ceci permet de prendre en compte la manière dont les composantes connexes s'emboîtent les unes dans les autres. Le résultat du (ii) reste vrai, si on définit maintenant $N_S(P)$ comme le nombre maximal d'ouverts disjoints $U$ de $\mathbb{RP}^N$, tels que $U$ soit homéomorphe à une boule et $(U, U \cap Z_P)$ soit de type $(\mathbb{R}^N, S)$. L'article [GW4] étend ces résultats au cas des sous-variétés algébriques réelles de codimension quelconque.

*Remarque 0.7.* — L'espace $\mathbb{C}_{1,hom}[X_0, \ldots, X_N]$ des polynômes homogènes de degré 1 (formes linéaires !) en $N+1$ variables s'identifie naturellement aux sections holomorphes du fibré en droites $\mathcal{O}(1)$, dual du fibré tautologique en droites sur $\mathbb{CP}^N$. Ainsi l'espace $\mathbb{C}_{d,hom}[X_0, \ldots, X_N]$ des polynômes homogènes de degré $d$ en $N+1$ variables s'identifie aux sections holomorphes du fibré en droites $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(1)^{\otimes d}$.

Dans cette perspective, le produit scalaire hermitien (2) apparaît comme produit scalaire sur cet espace de sections holomorphes. D'une part, $\mathbb{CP}^N$ peut être muni de la métrique de Fubini-Study, qui est, à scalaire près, l'unique métrique kählérienne invariante par l'action de $U(N+1)$ ; cette métrique induit une mesure de volume sur $\mathbb{CP}^N$ que l'on notera $d\nu_{FS}$. D'autre part, le produit scalaire hermitien $h(v, w) = \sum_{i=0}^{N+1} \bar{v}_i w_i$ sur $\mathbb{C}^{N+1}$ induit un produit scalaire sur chaque droite de $\mathbb{C}^{N+1}$, puis par dualité sur chaque fibre de $\mathcal{O}(1)$, et enfin sur chaque fibre de $\mathcal{O}(d) = \mathcal{O}(1)^{\otimes d}$. Soit alors $P, Q \in \mathbb{C}_{d,hom}[X_0, \ldots, X_N]$, vus comme sections de $\mathcal{O}(d)$. Pour $z = (z_0, z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$ et $\mathbf{z} = [z_0 : z_1 : \ldots : z_N] \in \mathbb{CP}^N$, le produit scalaire de $P$ et $Q$ sur la fibre $\mathcal{O}(d)_{\mathbf{z}}$ est donné explicitement par l'expression

$$\langle P, Q \rangle_{\mathbf{z}} = \frac{\overline{P(z)} Q(z)}{\|z\|^{2d}}.$$

À un scalaire près (dont la valeur ne jouera aucun rôle par la suite), le produit scalaire (2) peut se récrire

$$\langle P, Q \rangle_{FS} = \int_{\mathbb{CP}^N} \langle P, Q \rangle_{\mathbf{z}} d\nu_{FS}(\mathbf{z}). \tag{4}$$

Ceci place le problème dans le cadre plus général suivant : soit $X$ une variété projective complexe et $L$ un fibré holomorphe hermitien en droites complexes, supposé positif (ou ample). La structure hermitienne sur $L$, et la donnée d'une forme volume sur $X$, permettent de munir l'espace des sections de $L^{\otimes d}$ d'un produit scalaire hermitien. Le sous-espace $H^0(X, L^{\otimes d})$ des sections holomorphes de $L^{\otimes d}$ est de dimension finie. Plus précisément, puisque l'on veut parler de zéros *réels* de sections *réelles*, il faut supposer que $X$ et $L$ sont définis sur les réels. Le produit scalaire hermitien sur $H^0(X, L^{\otimes d})$ se restreint en un produit scalaire euclidien sur le sous-espace des sections réelles $\mathbb{R}H^0(X, L^{\otimes d})$, qui est alors muni de la mesure gaussienne associée. On s'intéresse à la topologie du lieu réel des zéros d'un élément aléatoire de $\mathbb{R}H^0(X, L^{\otimes d})$. C'est dans ce cadre général que se situent les travaux [GW1, GW2, GW3, GW4, GW5].

Le théorème 0.5 est ainsi valable pour les zéros de sections holomorphes réelles de fibrés en droites amples, en remplaçant $\mathrm{Vol}_{FS}\,\mathbb{RP}^N$ par le volume de $\mathbb{R}X$, ensemble des points réels de $X$, pour la métrique donnée par la courbure de $L$. Un fait remarquable est que les constantes $c^+(i,N)$, $c^-(i,N)$ et $c_S$ sont indépendantes de la variété projective $X$ et du fibré $L$, ce qui explique le choix de normalisation dans l'encadrement (3). Ces constantes peuvent être précisées comme suit : $c^-(i,N)$ est obtenue à partir du résultat (ii) en prenant $c^-(i,N) = \sum_{S\in H(N-1)} c_S b_i(S)$. Pour $S = \mathbb{S}^i \times \mathbb{S}^{N-1-i}$ on a la borne inférieure explicite $c_S \geq e^{-2e^{70N}}$, ce qui implique que $c^-(i,N) \geq e^{-2e^{70N}}$. La constante $c^+(i,N)$ vaut

$$c^+(i,N) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{Sym(i,N-1-i;\mathbb{R})} |\det A| dp(A) \tag{5}$$

où $Sym(i, N-1-i;\mathbb{R})$ est le cône ouvert des matrices $(N-1)\times(N-1)$ réelles symétriques non dégénérées de signature $(i, N-1-i)$. L'espace des matrices symétriques est muni du produit scalaire $(A,B) \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{Tr}AB$, et $dp(A)$ est la mesure gaussienne associée ; remarquons que c'est la mesure étudiée sous le nom de GOE (Gaussian Orthogonal Ensemble) en théorie des matrices aléatoires.

La borne inférieure sur $c^-(i,N)$ est très certainement loin d'être optimale. On ne sait pas si l'on peut considérer la borne supérieure comme satisfaisante dans (3), mais la somme alternée donne l'asymptotique correcte pour la caractéristique d'Euler $\chi(Z_P) = \sum_{i=0}^{N-1}(-1)^i b_i(Z_P)$ [Let],

$$\lim_{d\longrightarrow+\infty} \frac{\mathbb{E}(\chi(Z_P))}{d^{N/2}\,\mathrm{Vol}_{FS}\,\mathbb{RP}^N} = \sum_{i=0}^{N-1}(-1)^i c^+(i,N).$$

Considérons maintenant l'exemple des harmoniques sphériques aléatoires, traité dans l'article [NS1] de Nazarov–Sodin, dont les idées novatrices ont largement stimulé les autres travaux décrits ici.

*Exemple 0.8.* — « **Harmoniques sphériques aléatoires** ». Notons $\mathbb{R}^{harm}_{d,hom}[X_0,\dots,X_N]$ le sous-espace de $\mathbb{R}_{d,hom}[X_0,\dots,X_N]$ formé des polynômes harmoniques de degré $d$. L'espace $\mathcal{HS}_N(d) \subset L^2(\mathbb{S}^N)$ formé des restrictions à $\mathbb{S}^N$ des éléments de $\mathbb{R}^{harm}_d[X_0,\dots,X_N]$ est exactement l'espace propre du laplacien sphérique, pour la valeur propre $d(d+N-1)$ ; ces fonctions sont appelées harmoniques sphériques. On a la décomposition hilbertienne

$$L^2(\mathbb{S}^N) = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} \mathcal{HS}_N(d).$$

L'espace $\mathcal{HS}_N(d)$ est muni du produit scalaire sur $L^2(\mathbb{S}^N)$ et de la mesure gaussienne associée.

En dimension 2, Nazarov et Sodin ont démontré le théorème suivant :

Théorème 0.9 ([NS1]). — *Considérons le modèle des harmoniques sphériques aléatoires sur* $\mathbb{S}^2$*. Pour presque tout* $f \in \mathcal{HS}_2(d)$*, 0 n'est pas valeur critique de* $f$*. Notons* $Z_f \subset \mathbb{S}^2$ *l'ensemble d'annulation de* $f$*, et* $b_0(Z_f)$ *son nombre de composantes connexes.*

*Il existe* $a > 0$*, tel que*

$$\lim_{d \longrightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(b_0(Z_f))}{d^2} = a.$$

*De plus, pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe* $c(\epsilon), C(\epsilon) > 0$*, tels que pour tout* $d$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{b_0(Z_f)}{d^2} - \frac{\mathbb{E}(b_0(Z_f))}{d^2}\right| \geq \epsilon\right) \leq C(\epsilon) e^{-c(\epsilon)d}. \tag{6}$$

Rappelons que $\mathcal{HS}_2(d)$ est l'espace propre pour la valeur propre $\lambda = d(d+1)$ du laplacien. Comme on est ici en dimension $N = 2$, $d^2$ est asymptotiquement équivalent à $\lambda^{N/2}$, à rapprocher du théorème 0.11 qui va suivre.

Les mêmes auteurs ont ensuite développé une théorie générale permettant de comprendre la topologie du lieu des zéros de fonctions aléatoires gaussiennes *presque sûrement de classe* $C^2$. Nous donnerons l'énoncé général en théorème 3.6, et présentons seulement pour l'instant une des applications les plus frappantes :

*Exemple 0.10.* — **« Modèle de bande-passante » de largeur** $\ell$**.**

Soit $(M, g)$ une variété riemannienne compacte de dimension $N$, et soit $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée de $L^2(M, \mathbb{R})$, formée de fonctions propres réelles du laplacien, indexées par valeur propres croissantes : $-\Delta\phi_n = \lambda_n \phi_n$, $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$.

Soit $\alpha : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction telle que $\alpha(\lambda) \leq \lambda$ pour tout $\lambda$. Pour $\lambda > 0$, soit $\mathcal{H}_{(\lambda-\alpha(\lambda),\lambda]}$ le sous-espace de $L^2(M, \mathbb{R})$ engendré par les fonctions propres $\phi_n$ telles que $\lambda - \alpha(\lambda) < \lambda_n \leq \lambda$, muni de la probabilité gaussienne $\mathbb{P}$ venant de sa structure euclidienne. On suppose que $\frac{\alpha(\lambda)}{\lambda} \underset{\lambda \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \ell \in [0, 1]$, et, dans le cas $\ell = 0$, que $\frac{\alpha(\lambda)}{\lambda^{1/2}} \underset{\lambda \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Théorème 0.11 (application des résultats de [NS2]). — *On considère le modèle de bande–passante de largeur* $\ell$*, sur une variété riemannienne compacte* $(M, g)$*.*

*Pour presque tout* $f \in \mathcal{H}_{(\lambda-\alpha(\lambda),\lambda]}$*, 0 n'est pas valeur critique de* $f$*. Notons alors* $Z_f$ *l'ensemble d'annulation de* $f$*, et* $b_0(Z_f)$ *son nombre de composantes connexes.*

*Alors il existe* $\nu_{N,\ell} > 0$ *tel que, pour tout* $\epsilon > 0$*,*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{b_0(Z_f)}{\lambda^{N/2}} - \nu_{N,\ell} \operatorname{Vol}(M)\right| \geq \epsilon\right) \underset{\lambda \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

*Le nombre* $\nu_{N,\ell}$ *ne dépend de* $(M, g)$ *que via sa dimension* $N$*.*

Les valeurs exactes des $\nu_{N,\ell}$ ne sont pas connues. Pour $\ell = 0$ et $N = 2$, Bogomolny et Schmit ont conjecturé que $\nu_{2,0}$, ainsi que d'autres quantités décrivant les statistiques des lignes nodales, pouvaient être calculées à l'aide d'un modèle de percolation simple [BS1, BS2]. La validité de cette conjecture est sujette à débat, des simulations numériques semblant indiquer une déviation légère entre la valeur de $\nu_{2,0}$ et celle calculée grâce au modèle de percolation [Na, Kon] ; au contraire, le modèle de percolation donne un résultat correct pour une quantité macroscopique telle que la probabilité de voir une ligne nodale traverser un rectangle de taille 1 [BK].

Remarquons qu'un élément de $\mathcal{H}_{(\lambda-\alpha(\lambda),\lambda]}$ n'est pas nécessairement une fonction propre du laplacien. Nous parlerons de « clusters » de fonctions propres. Pour une variété riemannienne quelconque, la multiplicité des valeurs propres n'est pas assez grande pour qu'en formant des fonctions propres aléatoires gaussiennes on puisse espérer un comportement universel (cette multiplicité est même 1 pour une métrique générique [U]). Il est nécessaire de former des combinaisons de fonctions propres sur un intervalle spectral assez grand pour voir apparaître cette universalité.

*Exemple 0.12.* — **« Ensemble de Fubini–Study réel »**. Reprenons l'espace $\mathbb{R}_{d,hom}[X_0,\ldots,X_N]$, cette fois muni du produit scalaire obtenu en intégrant sur la sphère réelle :

$$\langle P,Q\rangle_{L^2(\mathbb{S}^N)} = \int_{\mathbb{S}^N} P(x)Q(x)d\sigma(x), \tag{7}$$

où $\sigma$ est la mesure de volume sur $\mathbb{S}^N = \{(x_0,\ldots,x_N)\in\mathbb{R}^{N+1}, x_0^2+\ldots+x_N^2=1\}$. L'espace des restrictions à la sphère $\mathbb{S}^N$ des fonctions polynomiales associées aux éléments de $\mathbb{R}_{d,hom}[X_0,\ldots,X_N]$ coïncide avec la somme d'espaces propres du laplacien sphérique,

$$\bigoplus_{k\in\mathbb{N}, d-2k\geq 0} \mathcal{HS}_N(d-2k) \tag{8}$$

(voir par exemple [Far]). Posons $\lambda = d(d+N-1)$. Si $d$ est pair, l'espace (8) est le sous-espace de $\mathcal{H}_{[0,\lambda]}$ formé des fonctions paires sur $\mathbb{S}^N$, alors que si $d$ est impair il s'agit du sous-espace formé des fonctions impaires. Le théorème 0.11 concerne ainsi en particulier l' « ensemble de Fubini–Study réel » . D'après le théorème, le nombre de composantes connexes $b_0(Z_f)$ est typiquement d'ordre $\lambda^{N/2}\sim d^N$, alors que pour l'ensemble de Fubini-Study complexe (Kostlan) il était d'ordre $d^{N/2}$. Le modèle réel s'avère donc plus riche que le modèle complexe si l'on veut produire des hypersurfaces algébriques ayant un grand nombre de composantes connexes. Un encadrement asymptotique de l'espérance $C_1 d^N \leq \mathbb{E}(b_0(Z_f)) \leq C_2 d^N$ $(C_1, C_2>0)$ quand $d\longrightarrow+\infty$ avait été obtenu auparavant par Lerario et Lundberg [LL].

L'article de Fyodorov, Lerario et Lundberg [FLL] examine plus généralement des fonctions de la forme

$$f = \sum_{\ell\in\mathbb{N}, d-\ell\in 2\mathbb{N}} p_d(\ell) f_\ell \tag{9}$$

où les $f_\ell$ sont indépendantes, et $f_\ell\in\mathcal{HS}_N(\ell)$ est tirée au hasard suivant la loi gaussienne sur $\mathcal{HS}_N(\ell)$. Les coefficients positifs $p_d(\ell)$ vérifient certaines conditions asymptotiques quand $d,\ell\longrightarrow+\infty$. Ceci permet de regrouper au sein d'une même famille l'ensemble de Fubini–Study réel, qui correspond au cas où $p_d(\ell)=1$, et l'ensemble de Fubini-Study complexe, pour lequel la valeur de $p_d(\ell)$ est donnée par la formule (47) de [FLL]. Le théorème général 3.6 que nous énoncerons plus tard concerne comme cas particuliers les ensembles de Fubini–Study réel et complexe, le modèle de bande-passante sur une variété riemannienne, ainsi que toutes les familles de la forme (9) introduites par Fyodorov, Lerario et Lundberg.

On peut toutefois faire remarquer que le théorème 0.9 n'est pas tout à fait un cas particulier du théorème 0.11. Il correspondrait au cas où, pour la valeur propre $\lambda = d(d+1)$, $\alpha(\lambda)$ est inférieur à l'espacement entre les deux valeurs propres consécutives $d(d+1)$ et $(d-1)d$, qui vaut $2d \sim 2\lambda^{1/2}$. La preuve des théorèmes 0.11 et 0.14 reste valable pour des valeurs de $\alpha(\lambda)$ de l'ordre de $\lambda^{1/2}$ pour un certain nombre de géométries, dont la sphère, plus généralement les variétés de Zoll, ou à l'extrême opposé les variétés de courbure sectionnelle strictement négative. Par contre, l'estimée de concentration exponentielle (6) nécessite des arguments qui ne sont valables que pour les *véritables* fonctions propres aléatoires, et ne s'appliquent pas pour les clusters (Section 4).

*Remarque 0.13.* — Une autre situation où le spectre du laplacien est complètement explicite est celle des tores plats. Par exemple, pour $\mathbb{T}^N = \mathbb{R}^N/2\pi\mathbb{Z}^N$, les valeurs propres du laplacien sont les entiers $\lambda$ qui peuvent s'écrire comme somme de $N$ carrés. Les fonctions propres associées sont les combinaisons linéaires de $e^{i\xi\cdot x}$ où $\xi \in \mathbb{Z}^N$ et $\xi_1^2 + \ldots + \xi_N^2 = \lambda$. La multiplicité $r_N(\lambda)$ est le nombre de telles décompositions. Elle n'est pas bornée dès que l'on est en dimension $N \geq 2$, et tend vers l'infini si et seulement si $N \geq 5$. L'espacement moyen entre deux valeurs propres distinctes dans $[0, \lambda]$ est de 1 si $d \geq 3$, $\sqrt{\log \lambda}$ pour $d = 2$, dans tous les cas bien trop faible pour que les théorèmes 0.11 et 0.14 puissent s'appliquer tels quels pour nous renseigner sur les (véritables) fonctions propres aléatoires. Cependant, si l'on est prêt à importer des résultats de théorie des nombres pour contrôler la multiplicité, certaines des techniques exposées ici peuvent s'appliquer. Dès que $r_N(\lambda) \longrightarrow +\infty$, le résultat de concentration (6) s'étend aux fonctions propres aléatoires de valeur propre $\lambda$ sur $\mathbb{T}^N$ : $\lambda^{-N/2} b_0(Z_f)$ se concentre autour de sa médiane à vitesse exponentielle en $r_N(\lambda)$. Si de plus les points entiers renormalisés $\lambda^{-1/2}\{\xi \in \mathbb{Z}^N, \|\xi\|^2 = \lambda\}$ s'équidistribuent sur la sphère de rayon 1 dans $\mathbb{R}^N$, la moyenne et la médiane de $\lambda^{-N/2} b_0(Z_f)$ convergent toutes deux vers une limite strictement positive [Roz].

Les travaux [ORW, RW1, RW2, RWY] contiennent d'autres exemples où l'on applique des résultats sur la répartition des points entiers dans des couronnes ou calottes sphériques, pour contrôler les statistiques des zéros des fonctions propres aléatoires sur $\mathbb{T}^N$.

Décrivons pour terminer des travaux de Sarnak et Wigman qui reprennent les techniques de [NS2], ou plus précisément des notes [So], pour préciser la topologie du lieu des zéros. Plaçons-nous comme eux dans le cadre du modèle de bande-passante. Rappelons que $H(N-1)$ est l'ensemble des types de difféomorphisme de variétés compactes de dimension $(N-1)$ plongeables dans $\mathbb{R}^N$, et que $H(N-1)$ est dénombrable. Notons aussi $\mathcal{T}$ l'ensemble des arbres finis enracinés (ces arbres vont servir à coder les emboîtements des composantes nodales les unes dans les autres). Ces deux ensembles sont munis de leur topologie discrète. Si $f$ est une fonction dont 0 n'est pas valeur critique, on notera $Z_f$ le lieu des zéros de $f$, et $\mathcal{C}(f)$ l'ensemble des composantes connexes de $Z_f$. Soit $\epsilon > 0$ inférieur au rayon d'injectivité de $M$. Si $c \in \mathcal{C}(f)$ est une composante de diamètre inférieur à $\epsilon$ (donc, contenue dans une boule $B(x, \epsilon)$), on lui associe son type de difféomorphisme $\bar{c} \in H(N-1)$, ainsi qu'un arbre fini enraciné $t(c)$, qui décrit comment les autres composantes de $Z_f$ s'emboîtent « à l'intérieur » de $c$. Les sommets de $t(c)$ sont les domaines nodaux de $f$ (composantes connexes de $M \setminus Z_f$) contenus dans la composante connexe intérieure de $B(x, \epsilon) \setminus c$ ; deux sommets sont reliés par une arête si les domaines nodaux correspondants sont adjacents (i.e. il existe une composante de $Z_f$ contenue dans la frontière des deux domaines). La racine de $t(c)$ correspond au domaine nodal bordé par $c$ et contenu dans la composante connexe intérieure de $B(x, \epsilon) \setminus c$. Le fait que $t(c)$ soit un arbre est une conséquence du théorème de séparation de Jordan–Brouwer.

À une fonction $f$, on associe alors deux mesures positives de masse inférieure à 1, l'une sur $H(N-1)$ et l'autre sur $\mathcal{T}$ :

$$\mu_f^{H(N-1)} = \frac{1}{b_0(Z_f)} \sum_{c \in \mathcal{C}(f), diam(c) < \epsilon} \delta_{\bar{c}}$$

et

$$\mu_f^{\mathcal{T}} = \frac{1}{b_0(Z_f)} \sum_{c \in \mathcal{C}(f), diam(c) < \epsilon} \delta_{t(c)}$$

où la notation $\delta$ désigne une masse de Dirac. Comme nous le verrons, pour une fonction $f$ tirée au hasard de manière gaussienne dans $\mathcal{H}_{(\lambda - \alpha(\lambda), \lambda]}$, typiquement la majorité des composantes connexes sont de diamètre inférieur à $D\lambda^{-1/2}$ pour $D$ grand. Quand $\lambda \longrightarrow +\infty$, ceci implique que $\mu_f^{H(N-1)}$ et $\mu_f^{\mathcal{T}}$ deviennent proches d'être des mesures de probabilité. Pour $S \in H(N-1)$, $\mu_f^{H(N-1)}(S)$ mesure alors la proportion relative des composantes connexes de $Z_f$ qui sont de type de difféomorphisme $S$.

Sarnak et Wigman démontrent :

Théorème 0.14 ([SW]). — *On considère le modèle de bande-passante de largeur $\ell$, sur une variété riemannienne compacte $(M, g)$.*

*Alors il existe une mesure de probabilité $\mu^{H(N-1),\ell}$ sur $H(N-1)$ et une mesure de probabilité $\mu^{\mathcal{T},\ell}$ sur $\mathcal{T}$, telles que, pour tout $S \in H(N-1)$, pour tout $T \in \mathcal{T}$, et pour tout $\delta > 0$,*

$$\mathbb{P}\left(\left|\mu_f^{H(N-1)}(S) - \mu^{H(N-1),\ell}(S)\right| \geq \delta\right) \underset{\lambda \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

$$\mathbb{P}\left(\left|\mu_f^{\mathcal{T}}(T) - \mu^{\mathcal{T},\ell}(T)\right| \geq \delta\right) \underset{\lambda \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

*De plus, on a pour tout $S$ et tout $T$, $\mu^{H(N-1)}(S) > 0$ et $\mu^{\mathcal{T}}(T) > 0$.*

*Les mesures $\mu^{H(N-1),\ell}$ et $\mu^{\mathcal{T},\ell}$ ne dépendent de $(M, g)$ que via sa dimension $N$.*

*Remarque 0.15.* — La preuve de l'existence des limites $\mu^{H(N-1),\ell}$ et $\mu^{\mathcal{T},\ell}$ suit de près la stratégie de [So]. Dans le cas $\alpha(\lambda) = \lambda$, $\ell = 1$, le fait que $\mu^{H(N-1)}$ et $\mu^{\mathcal{T}}$ chargent positivement toutes les topologies est démontré dans [GW6, GW7], où l'analogue du théorème 0.5 a été démontré pour les clusters de fonctions propres d'opérateurs pseudodifférentiels elliptiques. Sarnak et Wigman étendent ceci à $\ell \in (0,1]$, et Canzani et Sarnak traitent le cas $\ell = 0$ [CS]. La cerise sur le gâteau est de savoir montrer que $\mu^{H(N-1)}$ et $\mu^{\mathcal{T}}$ sont des mesures de probabilité (résultat de compacité).

En comparaison de ceux de [GW6, GW7], les résultats de [NS1, NS2, SW] sont plus forts car il s'agit d'une convergence en probabilité au lieu d'une estimation de l'espérance. Cette concentration autour de la moyenne est obtenue par application d'un théorème ergodique ; ceci est un apport fondamental de l'article [NS2]. Notons que le théorème 0.14 ne permet pas de déduire directement l'encadrement de $\mathbb{E}(b_i(Z_f))$ entre $c^-(i,N)\lambda^{N/2}$ et $c^+(i,N)\lambda^{N/2}$ obtenu dans [GW6, GW7]. En effet, $b_i(Z_f)$ n'étant a priori pas borné, il se pourrait qu'une composante de $Z_f$ qui est rare pour la probabilité $\mu_f^{H(N-1)}$ contribue pourtant de manière significative à l'espérance $\mathbb{E}(b_i(Z_f))$.

Nous donnons dans ce texte un aperçu des démonstrations des théorèmes 0.5, 0.9, 0.11, 0.14. La loi d'un processus gaussien est entièrement déterminée par son noyau de covariance, dont nous rappelons la définition dans la section suivante. Il n'est donc pas étonnant que ce noyau de covariance joue un rôle central (c'est aussi la raison pour laquelle tous les résultats exposés sont spécifiques aux processus gaussiens). Plus précisément, un point crucial dans l'approche de Nazarov et Sodin est l'existence d'un développement asymptotique du noyau de covariance quand le paramètre tend vers l'infini ($\lambda \longrightarrow \infty$ pour le théorème 0.11, ou $d \longrightarrow \infty$ pour le théorème 0.5). Dans les travaux [GW2, GW3, GW4, GW5] de Gayet–Welschinger concernant les sections de fibrés en droites holomorphes, le rôle du noyau de covariance (qui est alors le noyau de Bergman) est quelque peu caché par une rédaction qui s'appuie sur la théorie des sections-pics. Nous éludons complètement ce point de vue ici. Le noyau de covariance est au contraire mis en avant dans les articles plus récents [GW6, GW7]. Le lien entre les sections-pics et le noyau de covariance est clarifié dans l'article [Let].

Les sections 1 et 2 contiennent des explications de la preuve du théorème 0.5. La section 3 explique la démarche de Nazarov et Sodin, et donne dans le théorème 3.6 un énoncé général portant sur le nombre de composantes nodales des processus gaussiens, qui s'applique entre autres au modèle de bande-passante (donc au modèle de Fubini–Study réel) et au modèle de Kostlan. Des détails sur le théorème 0.14 sont aussi donnés dans cette section.

# 1. LE NOYAU DE COVARIANCE ET SON DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE PRÈS DE LA DIAGONALE

## 1.1. Noyau de covariance

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^N$, ou une variété de classe $C^\infty$ de dimension $N$. Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On appelle « fonction continue aléatoire gaussienne » la donnée d'une application mesurable $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^U, \omega \mapsto F_\omega$ telle que, pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega$,

$F_\omega$ est une fonction continue sur $U$, et telle que pour tout entier $n$ et tout $n$-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in U^n$, la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

$$\omega \mapsto (F_\omega(x_1), \dots, F_\omega(x_n))$$

suive une loi gaussienne. Nous ne considérerons que des variables gaussiennes centrées. La loi de ces variables aléatoires est alors entièrement déterminée par le « noyau de covariance » $K$, qui est la fonction sur $U \times U$ définie par

$$(x, y) \mapsto K(x, y) = \mathbb{E}(F(x)F(y)) = \int_\Omega F_\omega(x)F_\omega(y)d\mathbb{P}(\omega).$$

Suivant la coutume probabiliste, on désignera par la lettre $F$, tantôt l'application $\omega \mapsto F_\omega$, tantôt une réalisation $F_\omega$ elle-même.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si $F$ est presque sûrement de classe $C^k$, alors on montre que $K$ appartient à l'espace $C^{k;k}(U \times U)$, formé des fonctions $(x, y) \mapsto K(x, y)$ dont toutes les dérivées partielles d'ordre au plus $k$ en $x$ et en $y$ existent et sont continues sur $U \times U$. Réciproquement, si $K \in C^{k;k}(U \times U)$, alors presque sûrement $F$ est dans $C^{k-}(V) = \cap_{\gamma \in (0,1)} C^{k-1+\gamma}(V)$. Plus précisément, pour toute boule fermée $\bar{B} \subset U$ et pour tout $\gamma > 0$, il existe $C > 0$ tel que $\mathbb{E}(\|f\|_{C^{k-1+\gamma}(\bar{B})}) \leq C \max_{|\alpha|,|\beta| \leq k} \sup_{x,y \in U} |\partial_x^k \partial_y^k K(x, y)|^{1/2}$. Cela résulte du théorème de Kolmogorov sur les processus gaussiens (voir par exemple l'appendice de [NS2]).

### 1.2. Exemples, et calculs de développements asymptotiques

Dans les exemples, $\Omega$ sera le plus souvent un sous-espace vectoriel $\mathcal{H}$ de dimension finie de $C^\infty(U)$ muni d'une structure euclidienne, $\mathcal{B}$ sera la tribu borélienne, $\mathbb{P}$ la mesure gaussienne sur $\mathcal{H}$ issue de la structure euclidienne (Definition 0.1), et l'application $\omega \mapsto F_\omega$ sera l'injection de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{R}^U$.

*Exemple 1.1.* — Soit $(M, g)$ une variété riemannienne compacte, et soit $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée de $L^2(M, \mathbb{R})$, formée de fonctions propres réelles du laplacien, indexées par valeur propres croissantes : $-\Delta\phi_n = \lambda_n \phi_n$, $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$. Pour $\lambda > 0$, soit $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{[0,\lambda]}$ le sous-espace de $L^2(M, \mathbb{R})$ engendré par les $\phi_n$ telles que $\lambda_n \leq \lambda$, muni de la probabilité gaussienne $\mathbb{P}$ venant de sa structure euclidienne. Toute fonction $f \in \mathcal{H}$ s'écrit $f = \sum_{n, \lambda_n \leq \lambda} f_n \phi_n$ avec $f_n \in \mathbb{R}$. Dire que $f$ est choisie au hasard selon la loi $\mathbb{P}$ équivaut à dire que les $f_n$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes, suivant une loi gaussienne centrée réduite. Le noyau de covariance est

$$K_{[0,\lambda]}(x, y) = \sum_{n, \lambda_n \leq \lambda} \phi_n(x)\phi_n(y),$$

qui n'est rien d'autre que le noyau de Schwartz du projecteur orthogonal de $L^2(M, \mathbb{R})$ sur $\mathcal{H}_{[0,\lambda]}$.

Quand $\lambda \longrightarrow +\infty$, les travaux de Gårding et Hörmander [G, H] montrent l'asymptotique suivante sur la diagonale :

$$K_{[0,\lambda]}(x, x) = \frac{\omega_N}{(2\pi)^N} \lambda^{\frac{N}{2}} + O(\lambda^{\frac{N-1}{2}}).$$

Dans tout l'article, $\omega_N$ désignera le volume de la boule unité euclidienne de dimension $N$.

Le reste en $O(\lambda^{\frac{N-1}{2}})$ est uniforme en $x$, et en intégrant sur $M$ on retrouve la loi de Weyl,

$$\sharp\{n, \lambda_n \leq \lambda\} = \frac{\mathrm{Vol}(M)\omega_N}{(2\pi)^N}\lambda^{\frac{N}{2}} + O(\lambda^{\frac{N-1}{2}}).$$

Encore plus précisément, identifions un voisinage $U$ de $x$ dans $M$ avec une boule $B_{\mathbb{R}^N}(0,r)$ de $\mathbb{R}^N$, au moyen d'une carte locale $\pi$ qui envoie 0 sur $x$, et identifions à l'aide de cette carte les fibrés tangent $TU$ et cotangent $T^*U$ avec $B_{\mathbb{R}^N}(0,r) \times \mathbb{R}^N$. Notons $\|\cdot\|_x$ la norme sur $\mathbb{R}^N$ qui est obtenue en prenant l'image de la métrique riemannienne sur $T_xU$ par $d\pi_x^{-1}$, et $\|\cdot\|_x^*$ la norme duale sur $\mathbb{R}^N$ qui est obtenue en prenant l'image de la métrique riemannienne sur $T_x^*U$ par ${}^t d\pi_x$. On a l'asymptotique, uniforme en $y, z \in B_{\mathbb{R}^N}(0, \lambda^{1/2}r)$,

$$K_{[0,\lambda]}\left(\pi\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda}}\right), \pi\left(\frac{z}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\xi\in\mathbb{R}^N, \|\xi\|_x^{*2}\leq\lambda} e^{i\xi\cdot\frac{(y-z)}{\sqrt{\lambda}}}d\xi + O(\lambda^{\frac{N-1}{2}}) \tag{10}$$

$$= \frac{\lambda^{\frac{N}{2}}}{(2\pi)^N}\int_{\xi\in\mathbb{R}^N, \|\xi\|_x^{*2}\leq 1} e^{i\xi\cdot(y-z)}d\xi + O(\lambda^{\frac{N-1}{2}}) \tag{11}$$

$$= \lambda^{\frac{N}{2}}\mathcal{J}_N(\|y-z\|_x) + O(\lambda^{\frac{N-1}{2}}) \tag{12}$$

en notant

$$\mathcal{J}_N(r) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\zeta\in\mathbb{R}^N, \sum_{j=1}^N {\zeta_j}^2\leq 1} e^{ir\zeta_1}d\zeta.$$

Ce développement asymptotique a lieu dans toutes les topologies $C^k$ sur $B_{\mathbb{R}^N}(0,\lambda^{1/2}r)\times B_{\mathbb{R}^N}(0,\lambda^{1/2}r)$, uniformément en $x$.

La connaissance du reste en $O(\lambda^{\frac{N-1}{2}})$ permet d'étudier aussi $K_{(\lambda-\alpha(\lambda),\lambda]}$, défini comme $K_{[0,\lambda]} - K_{[0,\lambda-\alpha(\lambda)]}$ ; c'est le noyau de covariance qui correspondrait au cas où $\mathcal{H}$ est le sous-espace $\mathcal{H}_{(\lambda-\alpha(\lambda),\lambda]}$ de $L^2(M,\mathbb{R})$, engendré par les fonctions propres $\phi_n$ telles que $\lambda - \alpha(\lambda) < \lambda_n \leq \lambda$. On obtient par soustraction

$$K_{(\lambda-\alpha(\lambda),\lambda]}\left(\pi\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda}}\right), \pi\left(\frac{z}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) = \frac{\lambda^{\frac{N}{2}}}{(2\pi)^N}\int_{\xi\in\mathbb{R}^N, 1-\lambda^{-1}\alpha(\lambda)<\|\xi\|_x^{*2}\leq 1} e^{i\xi\cdot(y-z)}d\xi + O(\lambda^{\frac{N-1}{2}}).$$

Si $\frac{\alpha(\lambda)}{\lambda} \longrightarrow \ell > 0$, ceci implique que

$$\lim_{\lambda\longrightarrow+\infty}\frac{1}{\lambda^{\frac{N}{2}}}K_{(\lambda-\alpha(\lambda),\lambda]}\left(\pi\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda}}\right), \pi\left(\frac{z}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\xi\in\mathbb{R}^N, 1-\ell\leq\|\xi\|_x^{*2}\leq 1} e^{i\xi\cdot(y-z)}d\xi.$$

Si $\frac{\alpha(\lambda)}{\lambda} \longrightarrow 0$ et $\frac{\alpha(\lambda)}{\lambda^{1/2}} \longrightarrow +\infty$, ceci implique que

$$\lim_{\lambda\longrightarrow+\infty}\frac{2}{\lambda^{\frac{N}{2}-1}\alpha(\lambda)}K_{(\lambda-\alpha(\lambda),\lambda]}\left(\pi\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda}}\right), \pi\left(\frac{z}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\xi\in\mathbb{R}^N, \|\xi\|_x^{*2}=1} e^{i\xi\cdot(y-z)}d\sigma(\xi)$$

où $\sigma$ est la mesure uniforme sur la sphère de rayon 1.

*Exemple 1.2* (suite de l'exemple 0.8). — Soit $\mathcal{H} = \mathcal{HS}_2(d)$ le sous-espace de $L^2(\mathbb{S}^2)$ formé des harmoniques sphériques de degré $d$, autrement dit les fonctions propres du laplacien sphérique de valeur propre $d(d+1)$. Si $\mathcal{H}$ est muni de la mesure gaussienne issue de la structure euclidienne de $L^2(\mathbb{S}^2)$, le noyau de covariance associé est

$$K_d(x,y) = \sum_{n=0}^{2d+1} \phi_n(x)\phi_n(y),$$

expression valable pour n'importe quelle base orthonormée $(\phi_n)_{n=0}^{2d+1}$ de $\mathcal{HS}_2(d)$. Il s'agit du noyau de Schwartz du projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{S}^2)$ sur $\mathcal{HS}_2(d)$. Pour $y$ fixé, la fonction $x \mapsto K_d(x,y)$ est une fonction propre du laplacien de valeur propre $d(d+1)$ ; elle doit être invariante par le sous-groupe de $SO(3,\mathbb{R})$ préservant $y$. Il existe, à constante multiplicative près, une seule telle fonction, il s'agit de $(x,y) \mapsto L_d(\langle x,y\rangle)$ où $L_d$ est le polynôme de Legendre de degré $d$ et $\langle x,y\rangle$ est le produit scalaire de $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}^3$ (rappelons qu'on plonge $\mathbb{S}^2$ de la manière usuelle dans $\mathbb{R}^3$). Le calcul de la constante de normalisation montre que $K_d(x,y) = (2d+1)L_d(\langle x,y\rangle)$. Cette fonction admet l'asymptotique suivante près de la diagonale, quand $d \longrightarrow +\infty$ :

$$\frac{1}{2d}K_d(x,y) = J_0(d\measuredangle(x,y)) + o(1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{id\measuredangle(x,y)\cos\theta}d\theta + o(1),$$

valable pour $x,y \in \mathbb{S}^2$, dans le régime où il existe $D$ tel que l'angle $\measuredangle(x,y)$ entre $x$ et $y$ soit plus petit que $Dd^{-1}$.

*Exemple 1.3* (suite de l'exemple 0.4 et de la remarque 0.7). — Considérons l'espace $\mathbb{R}H^0(X, L^{\otimes d})$. Dans ce cas, $K(x,y)$ est le noyau du projecteur orthogonal de l'espace de toutes les sections de $L^{\otimes d}$ sur celui des sections holomorphes ; on l'appelle « noyau de Bergman ». Dans le cas particulier de $\mathbb{R}_{d,nom}[X_0,\ldots,X_N]$, vu comme espace des sections holomorphes réelles de $\mathcal{O}(d)$, on a l'expression explicite

$$K_d((X_0,X_1,\ldots,X_N),(Y_0,Y_1,\ldots,Y_n)) = C(d)(X_0Y_0 + X_1Y_1 + \ldots + X_NY_N)^d.$$

La constante de normalisation $C(d)$ est équivalente à $\left(\frac{d}{\pi}\right)^N$ quand $d \longrightarrow +\infty$. Identifions l'ouvert où $z_0 \neq 0$ de $\mathbb{CP}^N$ avec $\mathbb{C}^N$, grâce aux coordonnées $[1 : z_1 : \ldots : z_N]$. Considérons sur cet ouvert la section normalisée suivante du fibré en droite tautologique,

$$\sigma(1 : z_1 : \ldots : z_N) = \frac{(1, z_1, \ldots, z_N)}{(1 + |z_1|^2 + \ldots + |z_N|^2)^{1/2}}.$$

Considérons le crochet de dualité hermitien $\left\langle K_d, \sigma(1 : z_1 : \ldots : z_N)^{\otimes d} \otimes \sigma(1 : w_1 : \ldots : w_N)^{\otimes d}\right\rangle$ entre un élément de $\mathcal{O}(d)_{(1:z_1:\ldots:z_N)} \otimes \mathcal{O}(d)_{(1:w_1:\ldots:w_N)}$ et un élément de $\mathbb{C}(1,z_1,\ldots,z_N)^{\otimes d} \otimes \mathbb{C}(1,w_1,\ldots,w_N)^{\otimes d}$. On a l'expression explicite

$$\begin{aligned}\Big\langle K_d, \sigma(1 : z_1 : \ldots : z_N)^{\otimes d} &\otimes \sigma(1 : w_1 : \ldots : w_N)^{\otimes d}\Big\rangle \\ &= C(d)\frac{(1 + z_1\bar{w}_1 + \ldots + z_N\bar{w}_N)^d}{(1 + |z_1|^2 + \ldots + |z_N|^2)^{d/2}(1 + |w_1|^2 + \ldots + |w_N|^2)^{d/2}},\end{aligned}$$

qui donne l'asymptotique suivante quand $d \longrightarrow +\infty$, et près de $(z_1, \ldots, z_N) = (w_1, \ldots, w_N) = (0, \ldots, 0)$,

$$\begin{aligned}(13)\quad \left\langle K_d, \sigma\left(1 : \frac{z_1}{\sqrt{d}} : \ldots : \frac{z_N}{\sqrt{d}}\right)^{\otimes d} \otimes \sigma\left(1 : \frac{w_1}{\sqrt{d}} : \ldots : \frac{w_N}{\sqrt{d}}\right)^{\otimes d}\right\rangle \\ = \left(\frac{d}{\pi}\right)^N e^{\sum z_i \bar{w}_i} e^{-\frac{1}{2}\sum |z_i|^2} e^{-\frac{1}{2}\sum |w_i|^2} + O(d^{N-1}) \\ = \left(\frac{d}{\pi}\right)^N e^{-\frac{1}{2}\|z-w\|^2} + O(d^{N-1}).\end{aligned}$$

Ce résultat s'étend au noyau de Bergman dans le cadre général décrit à la remarque 0.7 : dans un bon choix de coordonnées dites « de Heisenberg » , on a un développement identique à (13) ([Ti, Z2, MM] pour le développement asymptotique du noyau de Bergman, et [BSZ] pour le comportement universel près de la diagonale).

### 1.3. Formule de la co-aire ou de Kac-Rice

Dans cet article, la formule qui sert dans tous les calculs explicites d'espérances est la suivante :

Proposition 1.4 (Formule de la co-aire). — *Soient $M_1$ et $M_2$ deux variétés riemanniennes, de classe $C^\infty$. Soit $G : M_1 \times M_2 \longrightarrow \mathbb{R}^r$ une submersion de classe $C^\infty$, et soit $\Sigma = G^{-1}(0)$. Soit $\phi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Alors l'identité suivante est valable (si $\phi$ est positive, ou dès que l'une des deux intégrales converge absolument) :*

$$\begin{aligned}(14)\quad \int_{y_1 \in M_1} \left(\int_{\pi_1^{-1}(y_1)} \phi(x) dV_{y_1}(x)\right) d\,\mathrm{Vol}_{M_1}(y_1) \\ = \int_{y_2 \in M_2} \left(\int_{\pi_2^{-1}(y_2)} \phi(x) \frac{|\det^\perp \partial_2 G(x)|}{|\det^\perp \partial_1 G(x)|} dV_{y_2}(x)\right) d\,\mathrm{Vol}_{M_2}(y_2),\end{aligned}$$

*où $\pi_1 : \Sigma \longrightarrow M_1$ et $\pi_2 : \Sigma \longrightarrow M_2$ sont les projections de $\Sigma$ sur chaque facteur.*

On a noté $d\,\mathrm{Vol}_{M_i}$ la mesure de volume riemannien sur $M_i$, et $dV_{y_i}$ la mesure de volume riemannien sur $\pi_i^{-1}(y_i)$ (qui est une sous-variété de classe $C^\infty$ pour presque tout $y_i$, par le théorème de Sard). Si $L$ est une application linéaire entre deux espaces euclidiens, la notation $\det^\perp L$ désigne $(\det LL^*)^{1/2}$, le déterminant étant pris dans une base orthonormée (notons que $\det^\perp L = 0$ si et seulement si $L$ n'est pas surjective). On peut consulter [Let] pour une preuve de la proposition 1.4.

Prenons par exemple $M_2 = M$ une variété riemannienne, $M_1 = \mathcal{H}$, sous-espace de dimension finie $D$ de $C^\infty(V, \mathbb{R})$ muni d'une structure euclidienne, $r = 1$, $G(f, y) = f(y)$. Soit $a : M \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et prenons $\phi(f, y) = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} e^{-\frac{\|f\|_E^2}{2}} a(y)$. Si $f \in \mathcal{H}$, notons $Z_f \subset V$ le lieu de ses zéros. C'est une hypersurface régulière si 0 n'est pas point critique de $f$, et on notera alors $dv_f$ la mesure de volume induite sur $Z_f$ par la structure riemannienne sur $M$. La proposition 1.4 peut se récrire

$$\begin{aligned}(15)\quad & \frac{1}{(2\pi)^{D/2}}\int_E\left(\int_{Z_f}a(y)dv_f(y)\right)e^{-\frac{\|f\|_E^2}{2}}df \\ &\qquad = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}}\int_M a(y)\left(\int_{\{f\,|\,f(y)=0\}}\frac{\|\nabla f(y)\|_M}{K(y,y)}e^{-\frac{\|f\|_E^2}{2}}d\ell_y(f)\right)d\,\mathrm{Vol}_M(y)\end{aligned}$$

où $\ell_y$ est la mesure de Lebesgue sur l'hyperplan de $\mathcal{H}$ défini par l'equation $f(y)=0$.

En notation probabiliste, c'est-à-dire en écrivant $\mathbb{E}$ pour l'intégrale sur $\mathcal{H}$ par rapport à la mesure gaussienne $\frac{1}{(2\pi)^{D/2}}e^{-\frac{\|f\|_E^2}{2}}df$, cela s'écrit :

$$(16)\qquad \mathbb{E}\left(\int_{Z_f}a(y)dv_f(y)\right)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_M\frac{a(y)}{K(y,y)}\mathbb{E}\Big(\|\nabla f(y)\|\ \Big|\ f(y)=0\Big)d\,\mathrm{Vol}_M(y).$$

Comme la loi d'un processus gaussien est entièrement déterminée par son noyau de covariance, le terme de droite de (16) peut s'exprimer uniquement en terme de la fonction $K$ et d'un certain nombre de ses dérivées (ce ne sont en fait que des dérivées évaluées sur la diagonale qui interviennent). Par exemple, si $M$ est un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, de sorte que $Z_f$ est presque sûrement un ensemble discret, on obtient la formule

$$\mathbb{E}\left(\sum_{y\in Z_f}a(y)\right)=\frac{1}{\pi}\int_I\left(\frac{K(x,y)\partial_x\partial_yK(x,y)-(\partial_xK(x,y))^2}{K(x,y)^2}\right)^{1/2}_{x=y}a(y)dy$$

appelée formule de Kac-Rice [Kac, Ri]. Des formules semblables existent aussi pour calculer les moments d'ordre supérieur de $\sum_{y\in Z_f}a(y)$. Notons qu'en prenant $a=1$, on trouve l'espérance du nombre de zéro (ou en dimension plus grande, celle du volume du lieu des zéros) :

$$(17)\qquad \mathbb{E}\left(\sharp Z_f\right)=\frac{1}{\pi}\int_I\left(\frac{K(x,y)\partial^2_{x,y}K(x,y)-(\partial_xK(x,y))^2}{K(x,y)^2}\right)^{1/2}_{x=y}dy.$$

La formule de Kostlan (1) peut être obtenue par application de l'équation (17) ; la preuve originale de Kostlan utilisait un argument plus géométrique reposant sur la formule de Crofton.

### 1.4. Exemples d'application : deux résultats d'équidistribution

À titre d'exemples d'application des résultats de cette section, et de préparation à la suite, nous citons ici deux résultats d'équidistribution des zéros, dus à S. Zelditch.

Théorème 1.5 (Zelditch [Z1]). — *Soit $(M,g)$ une variété riemannienne compacte de dimension $N$. Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée de $L^2(M,\mathbb{R})$, formée de fonctions propres réelles du laplacien, indexées par valeur propres croissantes. Pour $\lambda>0$, soit $\mathcal{H}_{[0,\lambda]}$ le sous-espace de $L^2(M,\mathbb{R})$ engendré par les $\phi_n$ telles que $\lambda_n\le\lambda$, muni de la probabilité gaussienne $\mathbb{P}$ définie par la structure euclidienne sur $L^2(M,\mathbb{R})$.*

*Pour* $f \in \mathcal{H}_{[0,\lambda]}$*, notons* $Z_f$ *le lieu des zéros de* $f$*. Pour* $\mathbb{P}$*-presque tout* $f$*,* $0$ *n'est pas valeur critique de* $f$*. Notons dans ce cas* $v_f$ *la mesure de volume riemannien sur* $Z_f$*.*

*Alors, pour toute fonction* $a \in C^0(M)$*, on a quand* $\lambda \longrightarrow +\infty$

$$\mathbb{E}\left(\int_{Z_f} a dv_f\right) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{N+2}} \frac{s_{N-1}}{s_N} \int_M a d \operatorname{Vol}_M + O(1)$$

*où* $s_N$ *est le volume de la sphère unité de dimension* $N$ *vue comme sous-variété de* $\mathbb{R}^{N+1}$*.*

Le même énoncé reste vrai en travaillant sur $\mathcal{H}_{(\lambda-\alpha(\lambda),\lambda]}$, ou sur $\mathcal{HS}_2(d)$, comme dans les exemples 0.8, 1.1. La preuve consiste, pour $\lambda$ fixé, à utiliser (16) pour donner une expression exacte de $\mathbb{E}(\int_{Z_f} a dv_f)$ faisant intervenir le noyau de covariance et ses dérivées sur la diagonale. Quand $\lambda \longrightarrow +\infty$, le résultat s'obtient grâce au développement asymptotique (10).

Un théorème bien antérieur concerne les zéros complexes de polynômes dans l'ensemble de Fubini–Study complexe. Ce résultat se généralise bien sûr aux sections holomorphes de fibrés amples :

Théorème 1.6 (cas particulier de Shiffman–Zelditch [SZ])

*Munissons* $\mathcal{O}(d) = \mathbb{C}_{d,hom}[X_0, \ldots, X_N]$ *de la structure hermitienne issue de la métrique de Fubini-Study sur* $\mathbb{CP}^N$*, et de la mesure gaussienne associée* $\mathbb{P}$*. Pour* $P \in \mathbb{C}_{d,hom}[X_0, \ldots, X_N]$*, soit* $\mathcal{Z}_P = i\partial\bar{\partial} \log |P|^2$ *le courant d'intégration sur le lieu des zéros complexes de* $P$*. Alors, pour toute* $(N-1, N-1)$*-forme* $\varphi$ *sur* $\mathbb{CP}^N$*, on a*

$$\lim_{d \longrightarrow +\infty} \frac{1}{d} \mathbb{E}\left(\langle \mathcal{Z}_P, \varphi \rangle\right) = \int_{\mathbb{CP}^N} \omega \wedge \varphi$$

*où* $\omega$ *est la forme de Fubini-Study sur* $\mathbb{CP}^N$*.*

Il s'agit ici d'équidistribution de zéros *complexes* de polynômes *complexes*. En montrant que la variance de $\frac{1}{d}\langle \mathcal{Z}_P, \varphi \rangle$ tend vers 0 on peut même raffiner ce résultat en obtenant une convergence presque sûre.

Dans le cas des zéros complexes, on n'a pas besoin de formule de type Kac-Rice : on peut utiliser directement la relation de Poincaré–Lelong $\mathcal{Z}_P = i\partial\bar{\partial} \log |P|^2$, et le comportement de $\mathbb{E}\left(\langle \mathcal{Z}_P, \varphi \rangle\right)$ quand $d \longrightarrow +\infty$ est donné par l'asymptotique du noyau de Bergman. L'équidistribution des zéros *réels* de polynômes à coefficients réels ne semble pas avoir été rédigée, mais s'obtiendrait comme dans le théorème 1.5, en commençant par exprimer $\mathbb{E}\left(\int_{Z_f} a dv_f\right)$ par la formule de la co-aire. Le calcul est essentiellement fait dans [Let]. On peut noter par ailleurs que, dans le cas d'une variété riemannienne analytique, l'article [Z1] énonce aussi un théorème d'équidistribution des zéros complexes des fonctions propres du laplacien, prolongées analytiquement à un tube de Grauert. Notre but n'est pas de faire un exposé exhaustif sur les résultats d'équidistribution en analyse complexe, et nous omettons bien sûr de citer de nombreux articles intéressants dans ce domaine.

Nous sommes maintenant en mesure d'esquisser la preuve de la borne supérieure du théorème 0.5 (i).

### 1.5. Preuve du théorème 0.5 (i) (borne supérieure)

Soit $X$ une variété projective complexe de dimension $N$, et $L$ un fibré holomorphe hermitien en droites complexes, supposé positif (ou ample). On suppose que $X$ et $L$ sont définis sur les réels. L'espace des sections holomorphes réelles $\mathbb{R}H^0(X, L^{\otimes d})$ est muni du produit scalaire euclidien décrit dans l'exemple 0.4, et de la mesure gaussienne associée $\mathbb{P}$. On désigne par $\mathbb{R}X$ l'ensemble des points réels de $X$. L'exemple à garder en tête est $X = \mathbb{CP}^N$, $L = \mathcal{O}(1)$ ; dans ce cas $\mathbb{R}H^0(X, L^{\otimes d})$ s'identifie aux polynômes homogènes de degré $d$ à coefficients réels, et $\mathbb{R}X$, l'ensemble des points de $\mathbb{CP}^N$ admettant un représentant réel, s'identifie à $\mathbb{RP}^N$.

On se fixe une fonction de Morse $q : \mathbb{R}X \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour un élément générique $P \in \mathbb{R}H^0(X, L^{\otimes d})$, le lieu de ses zéros $Z_P$ est une hypersurface régulière, et la restriction de $q$ à $Z_P$ est une fonction de Morse. Pour $i \leq N-1$, notons $Crit_i(q, Z_P)$ l'ensemble des points critiques d'indice $i$ de cette restriction. On définit la mesure positive (aléatoire si $P$ l'est)

$$\nu_P^i = \frac{1}{d^{N/2}} \sum_{x \in Crit_i(q, Z_P)} \delta_x \qquad ;$$

son espérance $\mathbb{E}(\nu_P^i) = \int_{\mathbb{R}H^0(X,L^{\otimes d})} \nu_P^i d\mathbb{P}(P)$ est une mesure positive sur $\mathbb{R}X$. La masse totale de $\nu_P^i$ vaut $d^{-N/2}$ fois le nombre de points critiques d'indice $i$ de $q_{|Z_P}$. Par les inégalités de Morse, $\nu_P^i(\mathbb{RP}^N)$ est supérieur à $d^{-N/2} b_i(Z_P)$, et donc $\mathbb{E}(\nu_P^i(\mathbb{R}X)) \geq d^{-N/2}\mathbb{E}(b_i(Z_P))$.

L'avantage de travailler avec la quantité $\nu_P^i(\mathbb{RP}^N)$ est que c'est une quantité « locale », dont l'espérance peut se calculer exactement grâce à la formule de la co-aire, contrairement à celle de $b_i(Z_P)$. Gayet et Welschinger démontrent le résultat d'équidistribution suivant [GW5], dont découle directement la borne supérieure du théorème 0.5 (i) :

Théorème 1.7 ([GW5]). — *Quand $d \longrightarrow +\infty$, la mesure $\mathbb{E}(\nu_P^i)$ converge faiblement vers $\pi^{-1/2} c^+(i, N)\,\mathrm{Vol}$, où $c^+(i, N)$ est donné par l'expression* (5)*, et* Vol *est la mesure de volume riemannien sur $\mathbb{R}X$ induite par la forme de Kähler donnée par la courbure de $L$.*

La preuve suit le même schéma général que celle du théorème [Z1] : si $a$ est une fonction test sur $\mathbb{R}X$, l'espérance $\mathbb{E}(\nu_P^i(a))$ est exprimée explicitement grâce à la formule de la co-aire. Le développement asymptotique du noyau de Bergman quand $d \longrightarrow +\infty$ permet de conclure. Bien que plusieurs résultats d'équidistribution de points critiques existent déjà [DSZ1, DSZ2, Nic], c'est ici la première fois que sont considérés les points critiques d'une fonction de Morse restreinte à $Z_P$. Nous l'avons dit, l'article [GW5] est rédigé en termes de sections-pics et non du noyau de Bergman ; l'article [Let] fait le lien entre les deux approches.

Nous démontrons maintenant le théorème 0.5 (ii), qui implique la borne inférieure du théorème 0.5 (i), en utilisant une idée introduite à l'origine par Nazarov et Sodin pour démontrer que $a$ est strictement positif dans le théorème 0.9. Cette méthode, appelée « barrier method » par Nazarov et Sodin, est reprise d'abord dans [LL] puis dans [GW3] pour démontrer que $c_S$ est strictement positif dans le théorème 0.5 (ii), c'est-à-dire que la fréquence moyenne d'apparition de $S$ est strictement positive.

## 2. MÉTHODE DE BARRIÈRE

Fixons $S$, une hypersurface compacte de $\mathbb{R}^N$. Ici $S$ n'est pas forcément connexe, c'est la variante du théorème 0.5 (ii) présentée en remarque 0.6 que nous démontrons.

Il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_N]$ s'annulant transversalement, et un ouvert borné $U \subset \mathbb{R}^N$ difféomorphe à une boule, tel que $(U, U \cap P^{-1}\{0\})$ soit difféomorphe à $(\mathbb{R}^N, S)$. En effet, on peut réaliser $S$ comme lieu des zéros d'une fonction de classe $C^\infty$, et on construit $P$ en invoquant la densité des polynômes en topologie $C^1$ sur les compacts [Seif].

Soit $R > 0$ tel que $U \subset B(0, R)$ .

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Considérons maintenant $P_d(X_1, \ldots, X_N) = P(d^{1/2}X_1, \ldots, d^{1/2}X_N) \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_N]$. La boule $B(0, Rd^{-1/2})$ contient $d^{-1/2}U$, et $(d^{-1/2}U, d^{-1/2}U \cap P_d^{-1}\{0\})$ est difféomorphe à $(\mathbb{R}^N, S)$. « Homogénéisons » la construction en définissant $Q_d(X_0, \ldots, X_N) = X_0^d P_d\left(\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_N}{X_0}\right) \in \mathbb{R}_{d,hom}[X_0, \ldots, X_N]$. Notons $\mathbf{0} = [1 : 0 : \ldots : 0] \in \mathbb{CP}^N$. Par construction, $Z_P \cap B(\mathbf{0}, Rd^{-1/2}) \subset \mathbb{RP}^N$ contient un ouvert $U_d$ tel que $(U_d, U_d \cap Z_P)$ soit difféomorphe à $(\mathbb{R}^N, S)$. On a exhibé un polynôme dont les zéros contiennent une copie de $S$ dans un ouvert de taille $d^{-1/2}$ ; on veut maintenant borner inférieurement la mesure de l'ensemble de tels polynômes. On va exprimer de manière quantitative le fait que tout voisinage de $P$ est de mesure positive pour la mesure gaussienne.

À partir de la définition (4), on calcule

$$\langle Q_d, Q_d\rangle_{FS} = \int_{\mathbb{C}^N} \frac{|P(\sqrt{d}(z_1, \cdots, z_N)|^2}{(1 + \|(z_1, \cdots, z_N)\|^2)^d} d\nu_{FS}([1 : z_1 : \ldots : z_N]) \tag{18}$$

$$\sim_{d\longrightarrow+\infty} \; d^{-N} \int_{\mathbb{C}^N} |P(z_1, \cdots, z_N)|^2 e^{-\|(z_1,\cdots,z_N)\|^2} dz_1 \cdots dz_N; \tag{19}$$

on a fait le changement de variable $(z_1, \cdots, z_N) \mapsto d^{-1/2}(z_1, \cdots, z_N)$ et on a noté $dz_1 \cdots dz_N$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^N$.

Notons $\sigma_P = \frac{Q_d}{\|Q_d\|_{FS}} \in \mathbb{R}_{d,hom}[X_0, \ldots, X_N]$. C'est un cas particulier de « section-pic » : le calcul (19) montre que $\sigma_P(\mathbf{0})$ est d'ordre au plus $d^{N/2}$, et que la norme de $\sigma_P$ en dehors d'une boule $B(\mathbf{0}, Rd^{-1/2})$ est majorée par $R^{deg P} e^{-R^2/2}$ pour $R$ grand.

On complète maintenant $\{\sigma_P\}$ en une base orthonormée $(\sigma_P, \sigma_2, \ldots, \sigma_{N_d})$ de $\mathbb{R}_{d,hom}[X_0, \ldots, X_N]$. Tout élément $\sigma$ de $\mathbb{R}_{d,hom}[X_0, \ldots, X_N]$ peut se décomposer comme $\sigma = \xi\sigma_P + \sum_{j=2}^{N_d} \xi_j \sigma_j$. Rappelons que choisir $\sigma$ aléatoirement selon la loi gaussienne revient à considérer que les coefficients $\xi, \xi_j$ sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois gaussiennes centrées réduites.

Soit $\sigma = \xi\sigma_P + \sum_{j=2}^{N_d} \xi_j\sigma_j$. Étant donné $c$, on montre par un argument de perturbation que si $C$ est suffisamment grand, si $|\xi| \geq C$ et si $\sup_{B(\mathbf{0},Rd^{-1/2})} |\sum_{j=2}^{N_d} \xi_j\sigma_j| \leq cd^{N/2}$, $d^{-1/2}\sup_{B(\mathbf{0},Rd^{-1/2})} |\sum_{j=2}^{N_d} \xi_j\nabla\sigma_j| \leq cd^{N/2}$, alors $B(\mathbf{0}, Rd^{-1/2})$ contient un ouvert $U_d$ tel que $(U_d, U_d \cap Z_\sigma)$ est difféomorphe à $(\mathbb{R}^N, S)$, tout comme $(U_d, U_d \cap Z_{\sigma_P})$.

Le calcul suivant montre qu'on peut choisir $c$ et $C$ tels que cet événement se produise avec probabilité strictement positive. En effet, pour tous $c, C$, on a par indépendance

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\{\sigma = \xi\sigma_P + \sum_{j=2}^{N_d}\xi_j\sigma_j,\ \ |\xi| \geq C, \sup_{B(\mathbf{0},Rd^{-1/2})}\Big|\sum_{j=2}^{N_d}\xi_j\sigma_j\Big| \leq cd^{N/2},\\
&\qquad\qquad d^{-1/2}\sup_{B(\mathbf{0},Rd^{-1/2})}\Big|\sum_{j=2}^{N_d}\xi_j\nabla\sigma_j\Big| \leq cd^{N/2}\}\Big)\\
&= \mathbb{P}(|\xi| \geq C)\times\mathbb{P}\Big(\sup_{B(\mathbf{0},Rd^{-1/2})}\Big|\sum_{j=2}^{N_d}\xi_j\sigma_j\Big| \leq cd^{N/2}, d^{-1/2}\sup_{B(\mathbf{0},Rd^{-1/2})}\Big|\sum_{j=2}^{N_d}\xi_j\nabla\sigma_j\Big| \leq cd^{N/2}\}\Big).
\end{aligned}$$

Comme $\xi$ suit une loi gaussienne, on a $\mathbb{P}(|\xi| \geq C) > 0$ quel que soit $C$. On montre de plus en contrôlant l'espérance de la norme $C^1$ de $\sum_{j=2}^{N_d} \xi_j\sigma_j$ qu'il existe $c$ tel que

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{B(\mathbf{0},Rd^{-1/2})}\Big|\sum_{j=2}^{N_d}\xi_j\sigma_j\Big| \leq cd^{N/2}, d^{-1/2}\sup_{B(\mathbf{0},Rd^{-1/2})}\Big|\sum_{j=2}^{N_d}\xi_j\nabla\sigma_j\Big| \leq cd^{N/2}\}\Big) > 1/2.$$

Ainsi, on a montré qu'il existe $C_S > 0$ tel que, pour tout $d$,

$$\begin{aligned}
(20)\quad &\mathbb{P}(\{\sigma, B(\mathbf{0}, Rd^{-1/2}) \text{ contient un ouvert } U_d\\
&\qquad\qquad \text{tel que } (U_d, U_d \cap Z_\sigma) \text{ soit difféomorphe à } (\mathbb{R}^N, S)\}) > C_S.
\end{aligned}$$

Ceci est bien sûr vrai en remplaçant $\mathbf{0}$ par n'importe quel autre point. Recouvrant $\mathbb{RP}^N$ par environ $R^{-1}d^{N/2}\,\mathrm{Vol}_{FS}(\mathbb{RP}^N)$ boules disjointes de rayon $Rd^{-1/2}$, et en sommant sur toutes ces boules les inégalités (20), on obtient l'existence de $c_S > 0$ tel que, pour tout $d$,

$$\mathbb{E}(N_S(P)) \geq c_S d^{N/2}.$$

Ceci démontre le (ii) du théorème 0.5, qui implique la borne inférieure du (i) en prenant $c^-(i, N) = \sum_{S\in H(N-1)} c_S b_i(S)$.

En utilisant les estimées $L^2$ de Hörmander et les résultats d'existence de sections-pics, cet argument peut être étendu aux sections holomorphes réelles de fibrés amples plus généraux. De plus, Gayet et Welschinger peuvent faire les calculs de manière effective, et obtiennent pour un produit de sphères $S = \mathbb{S}^i \times \mathbb{S}^{N-1-i}$ la borne inférieure $c_S \geq e^{-2e^{70N}}$.

Nous présentons maintenant l'approche de Nazarov et Sodin pour démontrer le théorème 0.11. L'article [NS2] contient plusieurs idées fondamentales. On considère une famille de processus gaussiens sur une variété de dimension $N$, qui peuvent être approximés localement par des processus gaussiens stationnaires sur $\mathbb{R}^N$. Cette approximation en loi se lit directement sur le comportement du noyau de covariance près de la diagonale. On peut ainsi, sur des ouverts de petite taille, approcher le nombre de composantes connexes du lieu des zéros de notre processus initial par celui d'un processus gaussien sur $\mathbb{R}^N$ invariant par translation. Pour étudier ce dernier, on utilise un théorème ergodique, qui donne le comportement presque sûr du nombre de composantes connexes dans la boule $B(0, R)$ quand $R \longrightarrow +\infty$. C'est grâce à ce théorème ergodique qu'on obtient au final une convergence en probabilités au lieu d'un simple encadrement de l'espérance.

L'article [NS2] est né d'une maturation de plusieurs années à partir de l'article [NS1] qui traitait du cas des harmoniques sphériques (dans ce dernier cas on a en plus une concentration exponentielle autour de l'espérance, voir la section 4). Entre-temps, des notes de cours [So] ont été rendues disponibles sur internet ; la présentation y est légèrement différente de celle de l'article [NS2]. En préparant ces notes, on s'est surtout appuyé sur cette dernière référence.

## 3. THÉORÈME ERGODIQUE ET TOPOLOGIE ASYMPTOTIQUE DES HYPERSURFACES NODALES

On s'intéresse d'abord à des processus stationnaires, pour lesquels on utilise un théorème ergodique pour démontrer un résultat de convergence *presque sûre* concernant le lieu des zéros. On appliquera ensuite ce résultat pour compter les zéros de familles de processus gaussiens sur une variété, en supposant qu'ils sont approximés localement par des processus gaussiens stationnaires sur $\mathbb{R}^N$.

### 3.1. Processus gaussiens stationnaires

Comme à la section 1.1, soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On se donne un processus gaussien continu presque sûrement, défini sur tout $\mathbb{R}^N$, $\omega \in \Omega \mapsto F_\omega \in C^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. On suppose de plus que la loi de $F$ est invariante par l'action de $\mathbb{R}^N$ sur $C^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ par translation (autrement dit, $F$ est stationnaire). Ceci revient à dire que le noyau de covariance $K : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, défini par $K(x, y) = \mathbb{E}(F(x)F(y))$, est de la forme

$$K(x, y) = k(x - y)$$

où $k : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction symétrique, définie positive au sens où $\sum_{i,j=1}^n \overline{\xi_i} k(x_i - x_j)\xi_j \geq 0$ pour tout $n$, tout $n$-uplet $(x_1, \ldots, x_N) \in (\mathbb{R}^N)^n$ et tout $n$-uplet $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$). Par le théorème de Bochner, la fonction $k$ est la transformée de Fourier d'une mesure borélienne positive finie $\rho$ sur $\mathbb{R}^N$, qui est symétrique au sens où $\rho(A) = \rho(-A)$ pour tout ensemble $A$ :

$$k(x) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i x \cdot \lambda} d\rho(\lambda). \tag{21}$$

On fera les hypothèses suivantes sur la mesure $\rho$

($\rho1$) Il existe $p \geq 4$ tel que $\int_{\mathbb{R}^N} |\lambda|^p d\rho(\lambda) < +\infty$.

($\rho2$) $\rho$ n'a pas d'atomes.

($\rho3$) Le support $\rho$ n'est pas contenu dans un hyperplan linéaire.

L'hypothèse ($\rho1$) assure que $K$ appartient à l'espace $C^{2;2}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, et donc, par le théorème de Kolmogorov, que $F$ est presque sûrement dans $C^{2-}(\mathbb{R}^N)$, avec un bon contrôle des normes $C^{1,\gamma}$. L'hypothèse ($\rho3$) assure que le gradient $\nabla F(x)$ suit une loi gaussienne non dégénérée : la matrice de covariance $C(x) = \left(\partial_{x_i}\partial_{y_j} K(x,y)_{|y=x}\right)_{1\leq i,j\leq N} = C(0)$ est inversible.

Une propriété simple mais importante vient du fait que $K(x,x) = k(0)$ ne dépend pas de $x$ : ceci implique que $\mathbb{E}(F(x)\partial_{x_j}F(x)) = \frac{1}{2}\partial_{x_j}K(x,x) = 0$ pour tout $j$. Comme $F(x)$ et $\nabla F(x)$ suivent des lois gaussiennes, ceci implique que $F(x)$ et $\nabla F(x)$ sont indépendants.

Pour tout $\beta \in (0,1)$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\begin{aligned} (22)\quad & \mathbb{E}(|F(x)|^{-\beta}\|\nabla F(x)\|^{-\beta N}) \\ &= \frac{1}{(2\pi k(0))^{1/2}} \frac{1}{\det(2\pi C(0))^{1/2}} \int_{(y,v)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N} |y|^{-\beta}\|v\|^{-\beta N} e^{-\frac{y^2}{2k(0)}} e^{-\frac{^t v\cdot C(0)^{-1}v}{2}} dydv < +\infty. \end{aligned}$$

On peut alors montrer que, presque sûrement, $F$ et $\nabla F$ ne s'annulent pas simultanément (lemme de Bulinskaya). Mais de plus, on peut en déduire, de manière quantitative, qu'il est rare que $F$ et $\nabla F$ soient simultanément petits ; il est rare de même qu'un zéro de $F$ soit trop proche d'un point critique.

L'hypothèse ($\rho2$) est équivalente à la propriété d'*ergodicité* suivante : soit $X \subset C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ un ensemble mesurable pour la tribu borélienne de $C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Supposons $X$ invariant par l'action de $\mathbb{R}^N$ sur $C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ par translation. Alors

$$\mathbb{P}(F \in X) = 0 \text{ ou } 1$$

(théorème de Fomin-Grenander-Maruyama).

**Quelques notations.** Si $F \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, on note $Z_F = F^{-1}\{0\}$. On ne s'intéresse qu'au cas où 0 n'est pas valeur critique de $F$.

Si $W \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert convexe borné contenant l'origine, et si $R$ est un réel strictement positif, on note $RW = \{x \in \mathbb{R}^N, R^{-1}x \in W\}$.

On note $N_W(R,F)$ le nombre de composantes connexes de $Z_F$ contenues dans $RW$. Si $W = B_{\mathbb{R}^N}(0,1)$ est la boule unité, on note $N(R,F) = N_{B_{\mathbb{R}^N}(0,1)}(R,F)$. Si $x_0$ est un élément de $\mathbb{R}^N$, on note $\tau_{x_0}F$ la fonction $x \mapsto F(x+x_0)$. On note $N(x_0,R,F) = N(R,\tau_{x_0}F)$, c'est le nombre de composantes connexes de $Z_F$ contenues dans la boule ouverte $B_{\mathbb{R}^N}(x_0,R)$.

On notera aussi $\bar{N}(R,F)$ le nombre de composantes connexes de $Z_F$ qui intersectent la boule fermée $\bar{B}_{\mathbb{R}^N}(0,R)$, et $\bar{N}(x_0,R,F) = \bar{N}(R,\tau_{x_0}F)$ le nombre de composantes connexes de $Z_F$ qui intersectent la boule fermée $\bar{B}_{\mathbb{R}^N}(x_0,R)$.

### 3.2. Quelques estimées a priori

Voici pour commencer quelques estimées a priori données par Nazarov et Sodin sous les hypothèses ($\rho$1) et ($\rho$3).

**Peu de composantes ont un grand diamètre.** Pour $r > 0$, notons $N(r, F)$ le nombre de composantes connexes de $Z_F$ contenues entièrement dans la boule ouverte $B(0, r)$. Soit $N'(r, F)$ le nombre de composantes connexes de $Z_F$ qui intersectent la sphère $S(0, r)$. Alors il existe $C > 0$ tel que

$$\mathbb{E}(N(r, F)) \leq Cr^N, \tag{23}$$

$$\mathbb{E}(N'(r, F)) \leq Cr^{N-1}. \tag{24}$$

*Idée de preuve de* (23). Elle consiste à montrer une inégalité du même type en remplaçant $N(r, F)$ par le nombre de composantes connexes de $B(0, r) \setminus Z_F$ (domaines nodaux) qui ne touchent pas le bord de $B(0, r)$.

Le nombre de domaines nodaux de $F$ dans $B(0, r)$, qui contiennent entièrement une boule de rayon $1/1000$, est évidemment borné par $(1000r)^N$.

Examinons les autres domaines nodaux. Tout domaine nodal de $F$ qui ne touche pas le bord de $B(0, r)$ contient un point critique $y$ de $F$. Si notre domaine ne contient pas de boule de rayon $1/1000$, alors $B(y, 1/1000)$ intersecte $Z_F$, on a donc un point critique assez proche d'un zéro. Cela ne peut pas arriver trop souvent, sinon cela mettrait (22) en défaut. Une argumentation plus attentive montre que l'espérance du nombre de ces domaines nodaux trop « fins » est finie quand $r$ est fixé. Par additivité, cette espérance doit croître au plus en $Cr^N$ quand $r \longrightarrow +\infty$. $\square$

Soit alors $D > 0$. Appelons $N_{long}(r, D, F)$ le nombre de composantes connexes de $Z_F$ contenues dans la boule ouverte $B(0, r)$ et qui sont de diamètre supérieur à $D$. En recouvrant $B(0, r)$ par environ $(r/D)^d$ boules de diamètre $D$, et en utilisant l'invariance par translation, on voit qu'il existe $C, \tilde{C} > 0$ tels que pour $r$ assez grand

$$\mathbb{E}(N_{long}(r, D, F)) \leq C(r/D)^d \mathbb{E}(N'(D, F)) \leq \tilde{C} r^N D^{-1}. \tag{25}$$

Ceci implique que

$$\mathbb{P}(N_{long}(r, D, F) \geq D^{-1/2} r^N) \leq \tilde{C} D^{-1/2}. \tag{26}$$

Il y a donc relativement peu de composantes de $Z_F$ qui sont de diamètre supérieur à $D$.

**Peu de composantes bordent un domaine de petit volume.** On peut borner le nombre de composantes de $Z_F$ qui sont trop petites. Soit $N_{petit}(r, \xi, F)$ le nombre de composantes connexes de $Z_F$ contenues dans la boule ouverte $B(0, r)$ et qui bordent un domaine nodal de volume inférieur à $\xi$. Alors il existe $c, C > 0$ tels que

$$\mathbb{E}(N_{petit}(r, \xi, F)) \leq Cr^N \xi^c.$$

Il y a donc relativement peu de composantes de $Z_F$ qui sont « petites ».

**La plupart des composantes de $Z_F$ sont « stables »** au sens suivant.

Fixons $D > 0$. Recouvrons $B(0,r)$ par environ $(r/D)^N$ boules de rayon $D$, $B(x_i, D), i = 1, \dots, (r/D)^N$.

Pour tous $\epsilon > 0$ et $\eta > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que : avec probabilité au moins $1 - \epsilon$, le nombre de boules $B(x_i, D)$ sur lesquelles on a $\min_{x \in B(x_i,D)} \max\{|F(x)|, |\nabla F(x)|\} \leq \beta$ est au plus $\eta(r/D)^N$.

Sur les $(1-\eta)(r/D)^N$ boules restantes, on a, pour tout $x$, $|F(x)| > \beta$ ou $|\nabla F(x)| > \beta$. Ceci implique que les composantes connexes de $Z_F$ contenues dans ces boules sont « stables » : elles ne sont pas détruites par une perturbation de $F$, suffisamment petite en norme $C^1$, et de plus, la topologie après perturbation reste la même.

Ceci permet de montrer que la quantité $\frac{N(r,F)}{r^N}$ possède une propriété de semi-continuité inférieure (à $\eta$ près) en topologie $C^1$ sur $F$.

### 3.3. Théorème ergodique, et application à la topologie du lieu des zéros

Comme plus haut, $W$ est un ouvert convexe borné (non vide) de $\mathbb{R}^N$. Nazarov et Sodin relient $N_W(R,F)$ à des quantités de type « moyennes ergodiques » grâce à l'encadrement suivant (qui résulte essentiellement du théorème de Fubini), valable pour tous $R > 0$, $r < R$ :

$$\frac{1}{\operatorname{Vol} RW} \int_{(R-r)W} \frac{N(x,r,F)}{\operatorname{Vol} B_{\mathbb{R}^N}(0,r)} dx \leq \frac{N_W(R,F)}{\operatorname{Vol} RW} \leq \frac{1}{\operatorname{Vol} RW} \int_{(R+r)W} \frac{\bar{N}(x,r,F)}{\operatorname{Vol} B_{\mathbb{R}^N}(0,r)} dx.$$

Rappelons que $N(x,r,F) = N(r, \tau_x F)$ et $\bar{N}(x,r,F) = \bar{N}(r, \tau_x F)$. En posant

$$\Phi_r(F) = \frac{N(r,F)}{\operatorname{Vol} B(0,r)}$$

et

$$\Psi_r(F) = \frac{\bar{N}(r,F)}{\operatorname{Vol} B(0,r)}$$

on peut donc récrire l'encadrement comme

$$\frac{1}{\operatorname{Vol} RW} \int_{(R-r)W} \Phi_r(\tau_x F) dx \leq \frac{N_W(R,F)}{\operatorname{Vol} RW} \leq \frac{1}{\operatorname{Vol} RW} \int_{(R+r)W} \Psi_r(\tau_x F) dx.$$

Fixons momentanément $r$ et prenons la limite $R \longrightarrow +\infty$. Les deux quantités de part et d'autre sont des moyennes ergodiques sur les ensembles $(R-r)W$, $(R+r)W$. Quand $R \longrightarrow +\infty$, le théorème ergodique de Wiener [Be] permet de dire que les membres de droite et de gauche convergent $\mathbb{P}$-presque sûrement et dans $L^1(\Omega, \mathbb{P})$. Sous l'hypothèse d'ergodicité ($\rho 2$), les deux limites sont constantes, égales respectivement à $\mathbb{E}(\Phi_r(F))$ et $\mathbb{E}(\Psi_r(F))$. Remarquons de plus que d'après (24)

$$0 \leq \mathbb{E}(\Psi_r(F)) - \mathbb{E}(\Phi_r(F)) \leq \frac{N'(r,F)}{\operatorname{Vol} B(0,r)} = O(r^{-1}),$$

qui tend vers 0 quand $r \longrightarrow +\infty$. Il en résulte le théorème suivant :

Théorème 3.1. — $\frac{N_W(R,F)}{\operatorname{Vol} RW}$ *converge quand* $R \longrightarrow +\infty$*,* $\mathbb{P}$*-presque sûrement et dans* $L^1(\Omega, \mathbb{P})$*, vers* $\nu = \lim_{r \longrightarrow +\infty} \mathbb{E}(\Phi_r(F))$.

**Stricte positivité de $\nu$.** Les conditions ($\rho$1), ($\rho$2), ($\rho$3) ne suffisent pas à assurer que $\nu > 0$. Cherchons maintenant une condition suffisante à cela. La preuve a montré que $\nu \geq \mathbb{E}(\Phi_r(F))$ pour tout $r > 0$, il suffit donc de trouver un $r > 0$ tel que $\mathbb{E}(\Phi_r(F)) > 0$, autrement dit $\mathbb{E}(N(r, F)) > 0$. Appelons $\gamma$ la mesure image de $\mathbb{P}$ par l'application $\omega \mapsto F_\omega$ : c'est une mesure de probabilité sur l'ensemble $C^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ muni de la topologie de convergence $C^0$ sur les compacts, et de la tribu borélienne associée. La condition recherchée s'écrit $\int N(r, f)d\gamma(f) > 0$, et elle est satisfaite dès que $\gamma\{f, N(r, f) > 0\} > 0$.

*Remarque 3.2.* — Toute la discussion qui suit reste valable en remplaçant partout $C^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ par $C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$.

Pour assurer que $\nu > 0$, il suffit donc d'exhiber une fonction $f \in C^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, contenue dans le support de $\gamma$, et un voisinage $U$ de $f$ dans $C^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, tels que tous les éléments de $U$ ont une hypersurface nodale entièrement contenue dans la boule ouverte $B(0, r)$.

Or, Nazarov et Sodin identifient précisément le support de $\gamma$. Rappelons que nous notons $\rho$ la transformée de Fourier du noyau de covariance (21). Soit $\mathcal{H}(\rho) = L^2_h(\mathbb{R}^N, \rho)$ l'espace de Hilbert formé des fonctions de carré intégrable pour $\rho$, et hermitiennes, c'est-à-dire vérifiant $h(x) = \overline{h(-x)}$. À $h \in \mathcal{H}(\rho)$ on associe la transformée de Fourier de la mesure $h\rho$,

$$\mathcal{F}(h\rho) = \int e^{2\pi i \lambda \cdot x} h(x) d\rho(x),$$

qui est une fonction à valeurs réelles. L'espace $\mathcal{FH}(\rho)$ des fonctions ainsi obtenues est inclus dans $C^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Nazarov et Sodin montrent que le support de $\gamma$ est précisément l'adhérence de $\mathcal{FH}(\rho)$ dans $C^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Un argument semblable à celui de la « barrière » de la section 2 est caché dans la preuve (omise) de cette assertion, cet argument n'a donc pas disparu du résultat abstrait !

Le support de $\gamma$ contient en particulier l'ensemble des transformées de Fourier $\mathcal{F}\mu$, où $\mu$ décrit l'ensemble des mesures complexes à support compact, hermitiennes (i.e. $\mu(B) = \overline{\mu(-B)}$ pour tout borélien $B$) et dont le support est contenu dans $\operatorname{supp} \rho$. Ceci conduit à la condition suivante, suffisante à assurer que $\nu > 0$ :

($\rho$4) Il existe une mesure complexe à support compact, hermitienne, dont le support est contenu dans $\operatorname{supp} \rho$, et un ouvert borné $W \subset \mathbb{R}^N$, tels que :

$$\mathcal{F}\mu < 0 \text{ sur } \partial W, \text{ et il existe } x_0 \in W \text{ tel que } \mathcal{F}\mu(x_0) > 0.$$

*Exemple 3.3.* — Supposons que le support de $\rho$ contienne une sphère centrée en 0 et de rayon $a$. Prenons $\mu = \sigma_a$ la mesure de volume sur cette sphère. Sa transformée de Fourier $\mathcal{F}\sigma_a$ est donc dans le support de $\gamma$. La fonction $\mathcal{F}\sigma_a$ est radiale, et il est connu qu'elle change de signe transversalement dans une boule $B(0, r)$, si $r$ est choisi assez grand. Ceci implique l'existence d'un voisinage $U$ de $\mathcal{F}\sigma_a$ dans $C^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ tel que toutes les fonctions $g \in U$ ont une composante nodale contenue dans $B(0, r)$. On a donc dans ce cas $\gamma\{f, N(r, f) > 0\} > 0$, et $\nu > 0$.

### 3.4. Familles de processus gaussiens sur des variétés

On s'intéresse maintenant à une famille $(f_L)$ de processus gaussiens réels continus sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^N$ (ou plus tard une variété $M$ sans bord de dimension $N$), indexée par un paramètre $L$ qui varie dans un ensemble dénombrable et qui tend vers l'infini. On note $K_L : U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ le noyau de covariance de $f_L$.

*Exemple 3.4.* — Les exemples 0.8 et 1.1 font intervenir une famille $(\mathcal{H}_L)$ d'espaces de Hilbert de dimension *finie*, qui s'injectent continûment dans $C^0(M, \mathbb{R})$, et vérifient que $\dim \mathcal{H}_L \underset{L \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} +\infty$. Si $(e_k)$ est une base orthonormée de $(\mathcal{H}_L)$, on pose $f_L(x) = \sum_k \xi_k e_k(x)$, où les $\xi_k$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes, suivant des lois gaussiennes centrées réduites. La loi de $f_L$ ne dépend pas du choix de la base $(e_k)$, c'est la mesure gaussienne sur $\mathcal{H}_L$ (Définition 0.1). Le noyau de covariance est

$$K_L(x, y) = \mathbb{E}(f_L(x) f_L(y)) = \sum_k e_k(x) e_k(y).$$

Quitte à remplacer $f_L(x)$ par $\frac{f_L(x)}{\sqrt{K(x,x)}}$, ce qui ne change pas le lieu d'annulation de $f_L$, on peut supposer que $K_L(x, x) = 1$ pour tout $x$, ce que nous ferons par la suite.

Dans les exemples 0.8 et 1.1, le noyau de covariance converge après renormalisation près de la diagonale, vers un noyau de covariance invariant par translation. Ceci permet à Nazarov et Sodin d'approcher $f_L$, sur des boules de petit rayon, par un processus gaussien stationnaire sur $\mathbb{R}^N$, auquel on appliquera le théorème 3.1 pour compter les zéros. Cette approximation locale est subtile, et la nécessité de rendre rigoureuse cette intuition justifie l'intérêt des définitions techniques suivantes

Nous commençons par le cas d'un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^N$. Pour tout $x$ dans $U$, définissons le noyau de convergence renormalisé

$$K_{x,L}(u, v) = K_L\left(x + \frac{u}{L}, x + \frac{v}{L}\right),$$

correspondant au processus $f_L$ « zoomé » au voisinage de $x$, défini par

$$f_{x,L}(u) = f_L\left(\frac{u}{L}\right).$$

Définition 3.5. — *On dit que la famille de processus gaussiens $(f_L)$ est L-oscillante si les conditions (i) et (ii) suivantes sont réunies.*

*(i) Pour tout compact $Q \subset U$,*

$$\limsup_{L \longrightarrow +\infty} \max_{|\alpha|,|\beta| \leq 2} \max_{x,y \in Q} L^{-|\alpha|-|\beta|} |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta K_L(x, y)| < +\infty.$$

*(ii) Pour tout $x \in U$, soit $\left(C_{ij}^L(x) = \partial_{x_i} \partial_{y_j} K_L(x, y)_{|y=x}\right)_{1 \leq i,j \leq N}$ la matrice de covariance du vecteur gaussien $\nabla f_L(x)$. On demande que, pour tout compact $Q \subset U$,*

$$\liminf_{L \longrightarrow +\infty} \inf_{x \in Q} L^{-2d} \det C^L(x) > 0.$$

*On dit que la famille de processus gaussiens $(f_L)$ est stationnaire et ergodique à l'échelle L si les conditions (iii) et (iv) suivantes sont réunies.*

*(iii) Pour tout $x \in U$, il existe une fonction $k_x : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2$ telle que, pour tous $u, v$,*

$$\lim_{L \longrightarrow +\infty} K_{x,L}(u,v) = k_x(u-v).$$

*(iv) La fonction symétrique, définie positive $k_x$ s'écrit $k_x(u) = \int e^{-2\pi i \lambda \cdot u} d\rho_x(u)$, où $\rho_x$ est une mesure positive finie symétrique* sans atomes.

Nous avons traduit le simple mot « tame » employé par Nazarov et Sodin par plusieurs expressions : l'expression « $L$-oscillante » couramment employée en analyse semi-classique, pour exprimer le fait que $\nabla f_L$ est typiquement de taille $L$ ; et l'expression « stationnaire et ergodique à l'échelle $L$ » pour exprimer que sur des boules de rayon $L^{-1}$ le processus est presque stationnaire, et ergodique. L'hypothèse (i), qui empêche des oscillations trop sauvages de $K_L$, impose une borne supérieure sur la vitesse d'oscillation de $f_L$. L'hypothèse (ii) va dans l'autre sens en empêchant la loi de $L^{-1}\nabla f_L$ de dégénérer.

L'hypothèse (iii) (avec (i)) implique que pour tout $x$ le processus $f_{x,L}$ converge en loi vers un processus gaussien $F_x$ sur $\mathbb{R}^N$, continu presque sûrement, stationnaire, et de mesure spectrale $\rho_x$. Les hypothèses (i), (ii) et (iii) impliquent que chaque mesure spectrale limite $\rho_x$ vérifie les hypothèses ($\rho 1$) et ($\rho 3$), l'hypothèse (iv) demande qu'en plus $\rho_x$ vérifie l'hypothèse d'ergodicité ($\rho 2$). En particulier le théorème 3.1 s'applique à chaque processus $F_x$, et fournit une quantité $\nu_x \geq 0$. Nazarov et Sodin montrent que la fonction $x \mapsto \nu_x$ est mesurable, et bornée sur tout compact de $U$.

Théorème 3.6 ([NS2]). — *Soit $(f_L)$ une famille de processus gaussiens sur $U$, $L$-oscillante, stationnaire et ergodique à l'échelle $L$. Soit $U'$ un ouvert relativement compact de $U$, dont la frontière est de mesure nulle. Soit $N(f_L, U')$ le nombre de composantes connexes de $Z_f$ qui intersectent $U'$. Alors*

$$\mathbb{E}\left(\left|\frac{1}{L^N}N(f_L,U') - \int_{U'} \nu_\infty(dx)\right|\right) \underset{L\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$$

*où $\nu_\infty(dx) = \nu_x dx.au$*

L'idée de la preuve est grossièrement la suivante. Les zéros de $f_L$ sur une boule $B(x, R/L)$ de rayon $R/L$ sont ceux de $f_{x,L}$ sur $B(0,R)$, et suivent donc approximativement la même loi que $F_x$. Si $R$ est grand, il y a donc, d'après le théorème 3.1, à peu près $\nu_x \omega_N R^N$ composantes connexes de $Z_{f_L}$ dans $B(x, R/L)$. En intégrant l'estimée précédente par rapport à $x \in U'$, pour la mesure de Lebesgue $dx$, chaque composante connexe est recouverte environ $\omega_N (R/L)^N$ fois. Donc $N(f_L, U')$ vaut approximativement $\omega_N R^N (\omega_N (R/L)^N)^{-1} \int_{U'} \nu_x dx = L^N \int_{U'} \nu_x dx$.

L'approximation du lieu des zéros de $f_{x,L}$ par celui de $F_x$ constitue un travail technique considérable, que nous éludons ici. Les notes de cours [So] et l'article [NS2] ne suivent pas exactement la même démarche : dans [NS2] on utilise juste le fait que $f_{x,L}$ et $F_x$ sont proches en loi, alors que dans [So] on raisonne par couplage : on montre qu'il est possible de trouver un couple de variables aléatoires $(f'_{x,L}, F'_x)$ définies sur un même espace de probabilités, telles que $f'_{x,L}$ ait même loi que $f_{x,L}$ et $F'_x$ ait même loi que $F_x$, et telles qu'avec grande probabilité $f'_{x,L}$ et $F'_x$ soient proches en norme $C^1$.

Cette approximation montre en particulier qu'à $x \in U$ et $\epsilon > 0$ fixés,

$$\lim_{R \longrightarrow +\infty} \limsup_{L \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}\left( \left| \frac{N(f_L, B(x, R/L))}{\mathrm{Vol}(B(0,R))} - \nu_x \right| \geq \epsilon \right) = 0.$$

Elle montre aussi que les estimées a priori de la section 3.2 restent vraies pour $f_{x,L}$ au lieu de $F_x$ (pour $L$ grand). Par exemple, l'estimation (25) se traduit par le fait que le nombre de composantes de $Z_{f_L}$ de diamètre supérieur à $D/L$ est en moyenne $O(D^{-1})L^N$, donc relativement petit pour $D$ grand.

Le théorème reste vrai en remplaçant l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^N$ par une variété sans bord $M$. On demande maintenant que pour toute carte $\pi : \Omega \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow M$, le processus gaussien $(f_L \circ \pi)$ soit $L$-oscillant, stationnaire et ergodique à l'échelle $L$, approché par un processus stationnaire $F_{\pi,x}$. On note alors $\nu_\pi(x)$ la quantité obtenue en appliquant le théorème 3.1 au processus $F_{\pi,x}$. Dans le théorème 3.6, la mesure $\nu_\infty$ sur $M$ est maintenant celle dont l'expression dans toute carte $\pi : \Omega \longrightarrow X$ est $\nu_\pi(x)dx$.

*Exemple 3.7* (obtention du théorème 0.11 comme corollaire du théorème 3.6)

Reprenons l'exemple 1.1 avec, pour fixer les idées, $\alpha(\lambda) = \lambda$, ce qui correspond à la valeur $\ell = 1$ dans le théorème 0.11. Prenons $L = \lambda^{1/2}$, et soit $f_L$ une fonction aléatoire dont la loi est la mesure gaussienne sur l'espace de Hilbert de dimension finie $\mathcal{H}_L = \mathcal{H}_{[0,\lambda]}$. On a $K_L = K_{[0,\lambda]}$. Soit $\pi : \Omega \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow M$ une carte. Le développement asymptotique (10) nous dit exactement que $f_L \circ \pi$ est $L$-oscillant, et approché au voisinage de $x$ par le processus stationnaire $F_{\pi,x}$ dont le noyau de covariance est

$$k_x(\zeta) = \frac{1}{\omega_N} \mathcal{J}_N(\|\zeta\|_x) = \frac{1}{\omega_N} \mathcal{J}_N(({}^t\zeta \cdot G(x)\zeta)^{1/2})$$

pour $\zeta \in \mathbb{R}^N$ (il faut se souvenir que Nazarov et Sodin normalisent les noyaux de covariance de sorte que leur valeur en $\zeta = 0$ donne 1, d'où la division par $\omega_N$). Nous avons noté $G(x) = (g_{ij}(x))$ la matrice représentant la forme quadratique $\zeta \mapsto \|\zeta\|_x^2$ dans la base canonique, autrement dit l'expression de la métrique $g$ en coordonnées locales. Un changement de coordonnées linéaire montre que $\nu_\pi(x) = \nu_{eucl}\sqrt{\det G(x)}$, où $\nu_{eucl}$ est la valeur de $\nu$ donnée par le théorème 3.1 pour le noyau de covariance $k(\zeta) = \frac{1}{\omega_N}\mathcal{J}_N(({}^t\zeta \cdot \zeta)^{1/2})$. La mesure $\nu_\infty$ vaut donc $\nu_{eucl}$ fois la mesure de volume riemannien. Le théorème 0.11 pour $\ell = 1$ s'obtient à partir du théorème 3.6 en prenant $U' = M$, et en posant $\nu_{1,N} = \nu_{eucl}$. La valeur numérique de la constante $\nu_{eucl}$ est inconnue.

## 3.5. Résultats de Sarnak et Wigman sur la topologie des composantes connexes

Sarnak et Wigman [SW] ont repris la méthode de Nazarov et Sodin pour obtenir des résultats sur la topologie et l'« emboîtement » des composantes de $Z_F$, comme l'ont fait Gayet et Welschinger (remarque 0.15). Si 0 est valeur régulière de $F$, et si $c$ est une composante connexe de $Z_F$, on note $\bar{c} \in H(N-1)$ son type de difféomorphisme. Comme dans l'introduction, on associe aussi à $c$ un arbre fini enraciné $t(c)$, qui décrit comment les autres composantes de $Z_F$ s'emboîtent « à l'intérieur » de $c$.

On note $\mathcal{C}(r,F)$ l'ensemble des composantes connexes de $Z_F$ contenues dans la boule ouverte $B(0,r)$. Pour $r>0$, on associe à $F$ les mesures de probabilité

$$\mu_{F,r}^{H(N-1)} = \frac{1}{N(r,F)} \sum_{c \in \mathcal{C}(r,F)} \delta_{\bar{c}}$$

sur $H(N-1)$ et

$$\mu_{F,r}^{\mathcal{T}} = \frac{1}{N(r,F)} \sum_{c \in \mathcal{C}(r,F)} \delta_{t(c)}$$

sur $\mathcal{T}$. Remarquons que, si $S \in H(N-1)$, $\mu_{F,r}^{H(N-1)}(S)$ est la proportion de composantes connexes $c$ de $Z_F$ contenues dans $B(0,r)$ telles que $\bar{c} = S$. De même si $T \in \mathcal{T}$, $\mu_{F,r}^{\mathcal{T}}(T)$ est la proportion de composantes connexes $c$ de $Z_F$ contenues dans $B(0,r)$ telles que $t(c) = T$.

Théorème 3.8 ([SW]). — *Soit $F$ un processus gaussien stationnaire sur $\mathbb{R}^N$, continu presque sûrement. On suppose que sa mesure spectrale $\rho$ vérifie les hypothèses ($\rho$1) avec $p \geq 6$, ($\rho$2), ($\rho$3), ($\rho$4).*

*Alors il existe une mesure de probabilité $\mu^{H(N-1)}$ sur $H(N-1)$ et une mesure de probabilité $\mu^{\mathcal{T}}$ sur $\mathcal{T}$ telles qu'on ait, $\mathbb{P}$-presque sûrement et dans $L^1(\Omega,\mathbb{P})$,*

$$\mu_{F,r}^{H(N-1)}(S) \underset{r\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \mu^{H(N-1)}(S)$$

*et*

$$\mu_{F,r}^{\mathcal{T}}(T) \underset{r\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \mu^{\mathcal{T}}(T)$$

*pour tout $S \in H(N-1)$ et tout $T \in \mathcal{T}$.*

L'existence des limites $\mu^{H(N-1)}(H)$ et $\mu^{\mathcal{T}}(T)$ résultent de nouveau d'une application du théorème ergodique de Wiener. Comme les ensembles $H(N-1)$ et $\mathcal{T}$ sont infinis, on peut seulement dire a priori que $\mu^{H(N-1)}$ et $\mu^{\mathcal{T}}$ sont des mesures positives de masse totale inférieure à 1. Sarnak et Wigman ont montré que la famille de probabilités $\mathbb{E}(\mu_{F,r}^{H(N-1)})$ est tendue, ce qui implique que sa limite $\mu^{H(N-1)}$ est de masse totale 1. Ils utilisent pour cela est le théorème de finitude de Cheeger : pour tous $D$, $\xi$ et $K>0$, le nombre de classes de difféomorphismes de variétés riemanniennes compactes de dimension $N-1$, de diamètre inférieur à $D$, de volume supérieur à $\xi$ et de courbure sectionnelle comprise dans $[-K,K]$, est fini. Or, les estimées a priori de la section 3.2 impliquent que les composantes nodales de $Z_F$ ne peuvent typiquement avoir un diamètre trop grand, ni un volume trop petit, ni une courbure trop grande (ce dernier point vient de l'hypothèse ($\rho$1) avec $p \geq 6$, qui implique que $F$ est désormais de classe $C^{3-}$ presque sûrement, avec un bon contrôle de sa norme $C^2$). Pour tout sous-ensemble $A \subset H(N-1)$, appelons alors $N(r,A^c,F)$ le nombre de composantes connexes de $Z_F$ contenues dans $B(0,r)$ et dont la classe de difféomorphismes n'est pas dans $A$. Sarnak et Wigman montrent que pour tout $\eta > 0$, il existe un ensemble fini $A \subset H(N-1)$ tel que

$$\mathbb{E}(N(r, A^c, F)) < \eta r^N, \tag{27}$$

pour $r > \eta^{-1}$. C'est exactement dire que la famille $\mathbb{E}(\mu_{F,r}^{H(N-1)})$ est tendue.

Comme plus haut, on peut alors chercher des conditions suffisantes pour affirmer que $\mu^{H(N-1)}(S) > 0$ pour tout $S$ ; c'est-à-dire que toutes les classes de difféomorphismes apparaissent typiquement dans $Z_F$ avec fréquence positive. Pour avoir $\mu^{H(N-1)}(S) > 0$, on raisonne comme on l'avait fait plus haut pour la positivité de $\nu$ : on a, pour tout $r > 0$, $\mu^{H(N-1)}(S) \geq \mathbb{E}(\mu_{F,r}^{H(N-1)}(S))$, donc il suffit de trouver un $r$ tel que $\gamma\{f, \mu_{f,r}^{H(N-1)}(S) > 0\} > 0$. Il suffit pour cela d'être capable d'exhiber une mesure complexe à support compact, hermitienne, dont le support est contenu dans $\operatorname{supp}\rho$, telle que le lieu des zéros de la transformée $\mathcal{F}\mu$ contienne une composante connexe (contenue dans une boule $B(0,r)$) dans la classe de difféomorphisme $S$, et sur laquelle $\nabla\mathcal{F}\mu$ ne s'annule pas. Ces propriétés restent alors vraies sur tout un voisinage $U$ de $\mathcal{F}\mu$ dans $C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Comme $\mathcal{F}\mu$ est dans le support de $\gamma$, on a $\gamma(U) > 0$ et donc $\gamma\{f, \mu_{f,r}^{H(N-1)}(S) > 0\} > 0$.

Sarnak et Wigman savent montrer de la sorte qu'on a $\mu^{H(N-1)}(S) > 0$ pour tout $S$, dès que le support de la mesure spectrale $\rho$ a un intérieur non vide. Canzani et Sarnak parviennent à la même conclusion si le support de $\rho$ contient une sphère centrée en 0 [CS].

## 4. « GRANDES DÉVIATIONS »

Il n'existe pas, en toute généralité, de résultats concernant la vitesse de convergence vers 0 dans le théorème 0.11. On ne dispose pas, par exemple, d'estimées sur la variance de $\frac{b_0(Z_f)}{\lambda^{N/2}}$. Pourtant, les travaux initiaux de Nazarov et Sodin comme ceux de Gayet et Welschinger visaient des résultats de grandes déviations : nous entendons par là des bornes exponentiellement petites explicites sur la probabilité d'événements rares [NS1, GW1].

Venant du monde de la géométrie algébrique, Gayet et Welschinger sont entrés dans le monde probabiliste en s'interrogeant sur la probabilité qu'une courbe projective de degré $d$ aléatoire satisfasse le cas d'égalité de la borne supérieure de Harnack, c'est-à-dire qu'elle possède $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)+1$ composantes connexes [GW1]. Travaillant toujours avec l'ensemble de Fubini–Study complexe, ils ont montré que pour tout $c > 0$, il existe $C, D > 0$ tels que, pour tout $d$,

$$\mathbb{P}\left(P \in \mathbb{R}_{d,hom}(X_0, X_1, X_2),\ b_0(Z_P) \geq \frac{d^2}{2} - cd\right) \leq Ce^{-Dd}. \tag{28}$$

De manière plus générale, la question des grandes déviations pour les courants aléatoires dans des systèmes de diviseurs qui ne sont pas maximaux a été étudiée par Dinh et Sibony [DS]. Si l'on a $b_0(Z_P) \geq \frac{d^2}{2} - cd$, un résultat de De Thélin [DeT] implique que le courant d'intégration $\frac{1}{d}\mathcal{Z}_P = \frac{i}{d}\partial\bar{\partial}\log|P|^2$ sur les zéros complexes de $P$ reste dans un compact de courants laminaires, et donc loin du courant $\omega$ donné par la forme de Fubini-Study sur $\mathbb{CP}^2$. Les résultats de Shiffman et Zelditch évoqués après le théorème 1.6 nous disent que $\mathbb{P}\left(\frac{1}{d}\mathcal{Z}_P \text{ est loin de } \omega\right) \underset{d\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$, et un calcul explicite de tous les moments de $\frac{1}{d}\mathcal{Z}_P$ donne la borne explicite en $Ce^{-Dd}$. Nous l'avons vu, les travaux ultérieurs ont montré que $b_0(Z_P)$ est en fait typiquement d'ordre $d$, la racine carrée de la borne de Harnack. Rappelons au passage que si l'on travaille avec l'ensemble de Fubini-Study *réel*, $b_0(Z_P)$ devient presque sûrement proche de $\frac{1}{2}ad^2$, où $a$ est la constante apparaissant dans le théorème 0.9. La valeur de $a$ n'est pas connue, mais des simulations numériques semblent montrer que $a$ est de l'ordre de 0.04 [Na].

Dans l'article [NS1], le résultat de concentration exponentielle (6) s'explique par le fait que l'on travaille dans ce cas avec de véritables fonctions propres aléatoires, au lieu de clusters aléatoires de fonctions propres. Une fonction propre possède des propriétés de régularité qui impliquent que certaines estimées de la section 3.2, énoncées comme vraies avec une grande probabilité, sont maintenant *toujours* vraies. Quelques exemples : l'inégalité de Faber-Krahn implique qu'il existe $C > 0$ tel que *tous* les domaines nodaux d'une harmonique sphérique de degré $d$ aient une aire supérieure à $Cd^{-2}$. La formule de la moyenne permet de contrôler la valeur d'une harmonique sphérique en *tout* point $x$ par sa norme $L^2$ sur une boule centrée en $x$. Enfin, sur la sphère, ou plus généralement sur une surface analytique, on sait que la longueur totale des lignes nodales pour une harmonique sphérique de degré $d$ est en $O(d)$ [DF, DF2]. Ce comportement extrêmement gentil des harmoniques sphériques confère à la fonction $f \in \mathcal{HS}_2(d) \mapsto \frac{b_0(Z_f)}{d^2}$ une propriété de semi-continuité inférieure, *si* $\mathcal{HS}_2(d)$ *est muni de la topologie héritée de celle de* $L^2(\mathbb{S}^2)$ (la semicontinuité en topologie $C^1$ est beaucoup plus facile à obtenir !). Nazarov et Sodin invoquent alors un résultat de concentration de la mesure pour les lois gaussiennes en grande dimension, dû à Sudakov et Tsirelson [SuTs] et à Borell [Bor], pour conclure que si $f$ est choisie aléatoirement selon une telle loi, $\frac{b_0(Z_f)}{d^2}$ se concentre exponentiellement vite autour de sa médiane.

## RÉFÉRENCES


[Be] M. E. BECKER – *Multiparameter groups of measure-preserving tranformations : a simple proof of Wiener's ergodic theorem*, Ann. Prob. 9 (1981), 504–509.

[BH1] P. BÉRARD, B. HELFFER – *Dirichlet eigenfunctions of the square membrane : Courant's property, and A. Stern's and A. Pleijel's analyses*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics (2015), MIMS-GGTM conference in memory of M. S. Baouendi. Ali Baklouti, Aziz El Kacimi, Sadok Kallel, and Nordine Mir Editors.

[BH2] P. BÉRARD, B. HELFFER – *A. Stern's analysis of the nodal sets of some families of spherical harmonics revisited*, à paraître dans Monatshefte Math.

[Bih] F. BIHAN – *Asymptotiques de nombres de Betti d'hypersurfaces projectives réelles*, http ://arxiv.org/abs/math/0312259

[Bor] C. BORELL – *The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space*, Invent. Math. 30 (1975), 207–216.

[BK] D. BELIAEV, Z. KERETA – *On Bogomolny-Schmit conjecture*, J. Phys. A : Mathematical and Theoretical, Nov. 2013.

[BSZ] P. BLEHER, B. SHIFFMAN, S. ZELDITCH – *Universality and scaling of correlations between zeros on complex manifolds*, Invent. Math. 142 (2000), no. 2, 351–395.

[BP32] A. BLOCH, G. POLYA – *On the roots of certain algebraic equations*, Proceedings of the London Mathematical Society, 2(1) :102–114, 1932.

[BS1] E. BOGOMOLNY, C. SCHMIT – *Percolation model for nodal domains of chaotic wave functions*, 2002 Phys. Rev. Lett. 88(11) 114102.

[BS2] E. BOGOMOLNY, C. SCHMIT – *Random wave functions and percolation*, J. Phys. A 40 (2007) no. 47, 14033–14043.

[BNH] V. BONNAILLIE-NOEL, B. HELFFER – *Nodal and spectral minimal partitions – The state of the art in 2015*, arXiv :1506.07249.

[Bur] P. BÜRGISSER – *Average Euler characteristic of random real algebraic varieties*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 345 (2007), 507–512.

[CS] Y. CANZANI, P. SARNAK – *On the topology of the zero sets of monochromatic random waves*, arXiv :1412.4437

[CK] J. CHEEGER, J. M. KISTER – *Counting topological manifolds*, Topology 9 no. 19 (1970), 149–151.

[DeT] H. DE THÉLIN – *Sur la laminarité de certains courants*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 37 (2004), no. 2, 304–311.

[DS] T.-C. DINH, N. SIBONY – *Distribution des valeurs de transformations méromorphes et applications*, Comment. Math. Helv. 81 (2006) no. 1, 221–258.

[DNV] Y. DO, O. NGUYEN, V. VU – *Roots of random polynomials with arbitrary coefficients*, arXiv :1507.04994v3

[DF] H. DONNELLY, C. FEFFERMAN – *Nodal sets of eigenfunctions on Riemannian manifolds*, Invent. Math. 93 (1988), 161-183.

[DF2] H. DONNELLY, C. FEFFERMAN – *Growth and geometry of eigenfunctions of the Laplacian*, Analysis and partial differential equations, 635–655, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 122, Dekker, New York, 1990.

[DSZ1] M. DOUGLAS, B. SHIFFMAN, S. ZELDITCH – *Critical points and supersymmetric vacua*, Comm. Math. Phys. 252 (2004), 325-358.

[DSZ2] M. DOUGLAS, B. SHIFFMAN, S. ZELDITCH – *Critical points and supersymmetric vacua, II : Asymptotics and extremal metrics*, J. Diff. Geom. 72 (2006), 381-427.

[EO] P. ERDÖS, A. OFFORD – *On the number of real roots of a random algebraic equation*, Proceedings of the London Mathematical Society, 3(1) :139–160, 1956.

[Far] J. FARAUT – *Analysis on Lie groups. An introduction*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 110. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[FLL] Y. V. FYODOROV, A. LERARIO, E. LUNDBERG – *On the number of connected components of random algebraic hypersurfaces*, J. Geom. Phys. 95 (2015), 1–20.

[G] L. GÅRDING – *On the asymptotic distribution of the eigenvalues and eigenfunctions of elliptic differential operators*, Math. Scand. 1 (1953), 237–255.

[GW1] D. GAYET, J.-Y. WELSCHINGER – *Exponential rarefaction of real curves with many components*, Publ. Math. IHÉS, no. 113 (2011), 69–96.

[GW2] D. GAYET, J.-Y. WELSCHINGER – *What is the total Betti number of a random real hypersurface ?*, J. reine angew. Math. 689 (2014), 137–168.

[GW3] D. GAYET, J.-Y. WELSCHINGER – *Lower estimates for the expected Betti numbers of random real hypersurfaces*, J. Lond. Math. Soc. (2) 90 (2014), no. 1, 105–120.

[GW4] D. GAYET, J.-Y. WELSCHINGER – *Expected topology of random real algebraic submanifolds*, J. Inst. Math. Jussieu 14 (2015), no. 4, 673–702.

[GW5] D. GAYET, J.-Y. WELSCHINGER – *Betti numbers of random real hypersurfaces and determinants of random symmetric matrices*, J. Eur. Math. Soc. 18 (2016) no. 4, 733–772.

[GW6] D. GAYET, J.-Y. WELSCHINGER – *Betti numbers of random nodal sets of elliptic pseudo-differential operators*, à paraître dans Asian J. of Math.

[GW7] D. GAYET, J.-Y. WELSCHINGER – *Universal components of random nodal sets*, à paraître dans Comm. Math. Phys.

[Ha] A. HARNACK – *Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven*, Math. Ann. 10 (1876), no. 2, 189–198.

[H] L. HÖRMANDER – *The spectral function of an elliptic operator*, Acta Math. 121 (1968), 193–218.

[IM1] I. A. IBRAGIMOV, N. B. MASLOVA – *On the expected number of real zeros of random polynomials i. coefficients with zero means*, Theory of Probability and Its Applications, 16(2) 228–248, 1971.

[IM2] I. A. IBRAGIMOV, N. B. MASLOVA – *On the expected number of real zeros of random polynomials. ii. coefficients with non-zero means*, Theory of Probability and Its Applications, 16(3) 485–493, 1971.

[JJ] S.U. JANG, J. JUNG – *Quantum unique ergodicity and the number of nodal domains of eigenfunctions*, arXiv :1505.02548.

[JZ] J. JUNG, S. ZELDITCH – *Number of nodal domains of eigenfunctions on non-positively curved surfaces with concave boundary*, Math. Ann. 364 (2016), no. 3-4, 813–840.

[Kac] M. KAC – *On the average number of real roots of a random algebraic equation.* Bull. Amer. Math. Soc, 49 (1943), 314–320.

[Kac2] M. KAC – *On the average number of real roots of a random algebraic equation (ii).* Proceedings of the London Mathematical Society, 2(1) 390–408, 1948.

[Kh72] V. KHARLAMOV – *Maximum number of components of a surface of degree 4 in* $\mathbb{RP}^3$, Funkc. Anal. i Prilozh., vol 6 (1972) no. 4, 101.

[ItKh] V. KHARLAMOV, I. ITENBERG – *Towards the maximal number of components of a non-singular surface of degree 5 in* $\mathbb{RP}^3$, Topology of real algebraic varieties and related topics, 111–118, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 173, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[Kh] V. KHARLAMOV – *Overview of topological properties of real algebraic surfaces*, Algebraic geometry and geometric modeling, 103–117, Math. Vis., Springer, Berlin, 2006.

[Kl] F. KLEIN – *Ueber den Verlauf der Abel'schen Integrale bei den Curven vierten Grades*, Math. Ann. 10 (3) (1876), 365–397.

[Kon] K. KONRAD – *Asymptotic statistics of nodal domains of quantum chaotic billiards in the semiclassical limit*, Senior Thesis, Dartmouth College, 2012.

[Ko] E. KOSTLAN – *On the distribution of roots of random polynomials.* From Topology to Computation : Proceedings of the Smalefest (Berkeley, CA, 1990), pages 419–431. Springer, New York, 1993.

[KW] R.S. KULKARNI, J. W. WOOD – *Topology of nonsingular complex hypersurfaces*, Adv. Math 35 (1980), 239–263.

[LL] A. LERARIO, E. LUNDBERG – *Statistics on Hilbert's 16th problem*, IMRN 2015 no. 12, 4293–4321.

[Let] T. LETENDRE – *Expected volume and Euler characteristic of random submanifolds*, J. Funct. Anal. 270 (2016), no. 8, 3047–3110.

[LO] J.E. LITTLEWOOD, A.C. OFFORD – *On the number of real roots of a random algebraic equation II*, Proceedings of the Cambridge philosophical society 35, 134–148, April 1939.

[Lew] H. LEWY – *On the minimum number of domains in which the nodal lines of spherical harmonics divide the sphere*, Comm. Partial Differential Equations 2 (1977), 1233–1244.

[MM] X. MA, G. MARINESCU – *Holomorphic Morse inequalities and Bergman kernels*, Progress in Mathematics, 254. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.

[Mil] J. MILNOR – *On the Betti numbers of real varieties*, Proc. AMS 15 (1964), 275–280.

[Na] M. NASTASESCU – *The number of ovals of a real plane curve*, Senior Thesis, Princeton 2011.

[NS1] F. NAZAROV, M. SODIN – *On the number of nodal domains of random spherical harmonics*, Amer. J. Math. 131 (2009), no. 5, 1337–1357.

[NS2] F. NAZAROV, M. SODIN – *Asymptotic laws for the spatial distribution and the number of connected components of zero sets of Gaussian random functions*, Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom., 12 (2016), 205–278.

[NS3] F. NAZAROV, M. SODIN – *Random complex zeroes and random nodal lines.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume III, 1450–1484, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010.

[Nic] L. I. NICOLAESCU – *Critical sets of random smooth functions on compact manifolds*, Asian Journal of Mathematics, Vol. 19 (2015) No. 3.

[ORW] F. ORAVECZ, Z. RUDNICK, I. WIGMAN – *The Leray measure of nodal sets for random eigenfunctions on the torus*, Annales de l'Institut Fourier 58 (1), (2008), 299–335.

[Ore] Yu. OREVKOV – *Real quintic surface with 23 components*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 333 (2001), no. 2, 115–118.

[Petr] I. G. PETROWSKY – *Selected works. Part I. Systems of partial differential equations and algebraic geometry*, Introductory material by A. N. Kolmogorov and O. A. Oleinik. Translated from the Russian by G. A. Yosifian. With a foreword by Lars Gårding. Edited and with a preface by Oleinik. Classics of Soviet Mathematics, 5. Gordon and Breach Publishers, Amsterdam, 1996.

[P] I. G. PETROWSKY – *On the diffusion of waves and the lacunas for hyperbolic equations*, Rec. Math. [Mat. Sbornik] N. S. 17(59), (1945). 289–370.

[PO] I. G. PETROVSKII, O.A. OLEINIK – *On the topology of real algebraic surfaces*, (Russe) Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 13, (1949). 389–402.

[Ple] Å. PLEIJEL – *Remarks on Courant's nodal line theorem*, Comm. Pure Appl. Math. 9 (1956), 543–550.

[Pod1] S. S. PODKORYTOV – *The mean value of the Euler characteristic of an algebraic hypersurface*, (Russe) Algebra i Analiz 11 (1999), no. 5, 185–193 ; traduit en anglais dans St. Petersburg Math. J. 11 (2000), no. 5, 853–860.

[Pod2] S. S. PODKORYTOV – *On the Euler characteristic of a random algebraic hypersurface*, (Russe) Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 252 (1998), Geom. i Topol. 3, 224–230, 252–253 ; traduit en anglais dans J. Math. Sci. (New York) 104 (2001), no. 4, 1387–1393.

[Roz] Y. ROZENSHEIN – *The number of nodal nomponents of arithmetic random waves*, http ://arxiv.org/abs/1604.00638

[Ri] S. O. RICE – *Mathematical analysis of random noise*, Bell System Tech. J. 23 (1944), 282–332.

[RW1] Z. RUDNICK, I. WIGMAN – *On the volume of nodal sets for eigenfunctions of the Laplacian on the torus*, Annales Henri Poincaré 9 (2008), 109-130.

[RWY] Z. RUDNICK, I. WIGMAN, N. YESHA – *Nodal intersections for random waves on the 3-dimensional torus*, à paraître dans Ann. Inst. Fourier.

[RW2] Z. RUDNICK, I. WIGMAN – *Nodal intersections for random eigenfunctions on the torus*, à paraître dans Amer. J. of Math.

[SW] P. SARNAK, I. WIGMAN – *Topologies of nodal sets of random band limited functions*, arXiv :1510.08500

[Seif] H. SEIFERT – *Algebraische Approximation von Mannigfaltigkeiten*, Math. Z., 41(1) 1–17, 1936.

[SZ] B. SHIFFMAN, S. ZELDITCH – *Distribution of zeros of random and quantum chaotic sections of positive line bundles*, Comm. Math. Phys. 200 (1999), no. 3, 661–683.

[ShSm] M. SHUB, S. SMALE – *Complexity of Bezout's theorem. II. Volumes and probabilities.* In Computational algebraic geometry (Nice, 1992), volume 109 of Progr. Math., pages 267–285. Birkhäuser Boston, 1993.

[Smi] P. A. SMITH – *The topology of transformation groups*, Bull. A.M.S. 44 no. 8 (1938), 497–514.

[So] M. SODIN – *Lectures on random nodal portraits*, St. Petersburg School in Probability and Statistical Physics, June 18-29, 2012. AMS Proc. Symposia in Pure Math. 91 (2016), 395–422.

[St] A. STERN – *Bemerkungen über asymptotisches Verhalten von Eigenwerten und Eigenfunktionen*, Diss. Göttingen (30 Juli 1924). Extraits et annotations de P. Bérard and B. Helffer, http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/∼pberard/R/stern-1925-thesis-partial-reprod.pdf

[Stev] D. C. STEVENS – *The average number of real zeros of a random polynomial*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 22(4) 457–477, 1969.

[SuTs] V. N. SUDAKOV, B. S. CIREL'SON – *Extremal properties of half-spaces for spherically invariant measures*, Problems in the theory of probability distributions, II. Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 41 (1974), 14–24 (Russian).

[TV] T. TAO, V. VU – *Local universality of zeroes of random polynomials*, International Mathematics Research Notices, page ♠, 2014.

[Th] R. THOM – *Sur l'homologie des variétés algébriques réelles*, Differential and Combinatorial Topology (A Symposium in Honor of Marston Morse), Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1965, pp. 255–265.

[Ti] G. TIAN – *On a set of polarized Kähler metrics on algebraic manifolds*, J. Differential Geometry 32 (1990), 99–130.

[U] K. UHLENBECK – *Generic properties of eigenfunctions*, Amer. J. Math 98 (1976) no. 4, 1059–1078.

[Vi] O. Ya. VIRO – *Gluing of algebraic hypersurfaces, smoothing of singularities and construction of curves* (russe) Proc. Leningrad Int. Topological Conf., Leningrad, Aug. 1982, Nauka, Leningrad, 1983, pp. 149–197.

[Z1] S. ZELDITCH – *Real and complex zeros of Riemannian random waves*, Spectral analysis in geometry and number theory, 321–342, Contemp. Math., 484, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[Z2] S. ZELDITCH – *Szegö kernels and a theorem of Tian*, Internat. Math. Res. Notices 1998, no. 6, 317–331.

[Z3] S. ZELDITCH – *Logarithmic lower bound on the number of nodal domains*, arXiv :1510.05315.



Nalini ANANTHARAMAN

Université de Strasbourg
IRMA
UMR 7501 du CNRS
7, rue René Descartes
F–67084 Strasbourg Cedex
*E-mail* : `anantharaman@math.unistra.fr`