

## NŒUDS, MOUVEMENTS DE REIDEMEISTER ET ALGORITHMES [d'après Lackenby]

par Arnaud de MESMAY

*O time, thou must untangle this, not I.  
It is too hard a knot for me t'untie.*

Shakespeare

### INTRODUCTION

Comme Shakespeare ci-dessus, le lecteur s'est peut-être déjà retrouvé face à un nœud particulièrement retors qu'il a eu bien du mal à dénouer. L'objectif de cet exposé est de présenter un résultat de Lackenby [Lac15] montrant qu'un nœud trivial n'est jamais *exponentiellement* ardu, c'est-à-dire qu'un nombre polynomial de mouvements suffit toujours à le démêler.

Formellement, nous nous intéressons dans cet exposé aux nœuds réguliers, c'est-à-dire aux plongements polygonaux de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Deux nœuds sont dits équivalents s'il existe une *isotopie ambiante* (une déformation continue) de  $\mathbb{R}^3$  envoyant l'un sur l'autre, et un nœud est trivial s'il est isotope au plongement standard de  $\mathbb{S}^1$ . Un problème central de la théorie des nœuds est le suivant :

PROBLÈME 1. — *Étant donné un nœud, comment déterminer si celui-ci est trivial ?*

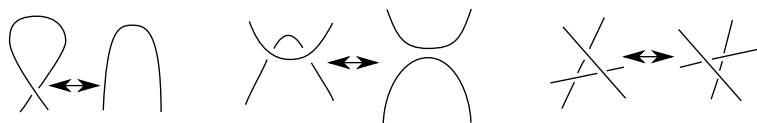


FIGURE 1. Les trois mouvements de Reidemeister.

Nous étudions ce problème dans le cadre combinatoire suivant. Une représentation courante d'un nœud est de projeter ce plongement sur un plan—de façon générique les points d'intersection ne seront pas plus que doubles. En précisant à chaque croisement quel brin passe au-dessus de l'autre, on obtient un *diagramme de nœud*. Génériquement, la projection d'une isotopie induit une isotopie, avec possiblement trois changements locaux autour des points doubles d'un diagramme de nœud, appelés *mouvements de Reidemeister*, voir la figure 1. Un *diagramme trivial* est un cercle plongé dans  $\mathbb{R}^2$ , et on obtient ainsi le théorème de Reidemeister, stipulant que partant d'un diagramme d'un

nœud trivial, il existe une suite de mouvements de Reidemeister et d'isotopies planaires transformant celui-ci en un diagramme trivial.

Une approche naturelle pour s'attaquer au problème 1 est donc de trouver cette suite de mouvements de Reidemeister, ou de prouver qu'il n'y en a pas. Mais la question du nombre de mouvements suffisants pour simplifier le diagramme d'un nœud trivial est notoirement épineuse, comme le montre par exemple la discussion initiée par Gowers sur le forum MathOverflow [Mat11]. Une des raisons est que la suite de mouvements de Reidemeister n'est pas nécessairement *monotone* : pour certains nœuds triviaux, il est nécessaire d'augmenter le nombre de croisements d'un diagramme avant de pouvoir le simplifier. Un exemple d'un tel nœud, dû à Goeritz, est illustré ci-contre, et des familles infinies de tels nœuds triviaux « difficiles » ont été construites par Kauffman et Lambropoulou [KL14]. Le théorème de Lackenby montre que malgré cette difficulté, on peut toujours dénouer un nœud trivial en utilisant un nombre de mouvements qui est polynomial en la complexité du diagramme initial. La meilleure borne connue précédemment, due à Hass et Lagarias, était exponentielle [HL01].



**THÉORÈME 0.1** (Lackenby [Lac15]). — *Soit  $D$  le diagramme d'un nœud trivial avec  $c$  croisements. Il existe une suite d'au plus  $(236c)^{11}$  mouvements de Reidemeister qui transforment  $D$  en le diagramme trivial.*

Hass et Nowik [HN10] montrent que certains nœuds nécessitent  $c^2/25$  mouvements de Reidemeister pour être simplifiés.

Un *entrelacs* est un plongement polygonal de deux <sup>(1)</sup> copies disjointes de  $\mathbb{S}^1$  dans  $\mathbb{R}^3$ , et un problème connexe est de déterminer si un entrelacs donné est *séparé*, c'est-à-dire s'il existe une sphère séparant les deux nœuds. Dans le même cadre combinatoire, un diagramme d'entrelacs *déconnecté* est un diagramme où les deux brins à chaque point double appartiennent entièrement à un nœud ou à l'autre : intuitivement les deux nœuds ont été séparés l'un de l'autre. Par des mouvements de Reidemeister, on peut transformer tout diagramme d'un entrelacs séparé en un diagramme déconnecté, et là encore, Lackenby montre qu'un nombre polynomial de mouvements suffit.

**THÉORÈME 0.2** (Lackenby [Lac15]). — *Soit  $D$  le diagramme d'un entrelacs séparé avec  $c$  croisements. Alors il existe une suite d'au plus  $(49c)^{11}$  mouvements de Reidemeister qui le transforment en un diagramme déconnecté.*

*Implications algorithmiques.* — Ces bornes polynomiales fournissent un algorithme très simple pour détecter si un nœud est trivial, ou si un entrelacs est séparé : il suffit d'essayer toutes les combinaisons de  $O(c^{11})$  de mouvements de Reidemeister possibles (avec la constante correspondant au problème), et de conclure positivement si et seulement si

1. La définition habituelle d'un entrelacs autorise un nombre arbitraire de composantes connexes, mais dans cet exposé il n'y en aura toujours que deux.

l'un des diagrammes obtenus est trivial/déconnecté. Le nombre d'opérations est exponentiel, ce n'est donc pas un algorithme bien efficace, mais notons qu'aucun algorithme polynomial n'est connu pour ces problèmes (même si en pratique, les meilleurs algorithmes connus ont des bonnes performances, voir Burton et Ozlen [BO12]). Du point de vue de la théorie de la complexité, cela montre également que ces problèmes sont dans la classe **NP**, c'est-à-dire que si le nœud est trivial (ou l'entrelacs séparé), il existe un certificat de taille polynomiale qui permet de le vérifier en temps polynomial. Ici, le certificat est simplement la suite de mouvements de Reidemeister à effectuer. Ce résultat avait déjà été établi par Hass, Lagarias et Pippenger [HLP99], mais leur certificat était bien moins naturel, en tout cas pour quelqu'un de non familier avec les surfaces normales.

Une avancée très récente, également due à Lackenby [Lac16a], est que le problème de déterminer si un nœud est trivial est également dans **co-NP**, c'est-à-dire que si un nœud n'est **pas** trivial, il existe également un certificat polynomial permettant de le vérifier. Ce certificat est beaucoup moins évident : on ne peut pas utiliser les mouvements de Reidemeister pour certifier ce sens inverse, et Lackenby utilise la théorie des *feuilletages tendus*, étudiés par Gabai [Gab83] et Thurston [Thu86].

Une généralisation directe du Problème 1 est de chercher un algorithme qui permette de reconnaître un nœud fixé, par exemple un nœud de trèfle droit. Dans un travail annoncé [Lac14] mais à ma connaissance pas encore publié, Lackenby étend le théorème 0.1 à ce cadre pour montrer que deux diagrammes d'un même nœud donné  $L$  diffèrent d'un nombre polynomial de mouvements de Reidemeister (où le polynôme dépend du nœud  $L$ ). Cela fournit donc un algorithme exponentiel pour ce problème, et montre qu'il est également dans **NP**.

Une autre généralisation, bien plus forte, du Problème 1 est, au lieu de reconnaître juste un nœud donné, de chercher un algorithme décidant si deux nœuds sont équivalents. Les connaissances actuelles sur cette question sont beaucoup plus réduites : depuis les travaux de Haken, on connaît un algorithme pour résoudre ce problème<sup>(2)</sup> mais sa complexité est gigantesque, et nous renvoyons le lecteur au livre de Matveev [Mat07] pour plus de détails.

Pour conclure cette introduction, mentionnons que les problèmes difficiles, voire indécidables, sont monnaie courante en algorithmique, mais une des spécificités des problèmes venus de la théorie des nœuds (ou plus largement de la topologie en basse dimension) est qu'on ne sait souvent pas *prouver* qu'ils sont difficiles. Malgré des progrès récents sur quelques questions (notamment, encore une fois, par Lackenby [Lac16b]), on ne sait par exemple pas si le problème d'équivalence des nœuds est **NP**-difficile (ce qui serait un très fort indice qu'il n'admet pas d'algorithme polynomial).

Pour une discussion plus en détail de ces questions algorithmiques (entre autres) de théorie des nœuds, nous renvoyons à l'excellent article de survol de Lackenby [Lac14].

---

2. Plus généralement, il permet de tester l'homéomorphisme des variétés de Haken.

*Organisation de cet exposé.* — La preuve des théorèmes 0.1 et 0.2 repose sur deux théories d'apparence assez distinctes, d'une part la théorie des *surfaces normales*, d'autre part celle des *présentations par arcs*. Comme chacune de ces approches fournit indépendamment une borne exponentielle sur le nombre de mouvements de Reidemeister, c'est également une bonne raison pour commencer par les exposer, ce qui est fait en sections 1, 2 et 3. Nous expliquons ensuite la contribution de Lackenby en combinant ces deux approches dans la section 4.

La borne polynomiale est obtenue suivant des idées identiques pour le problème de l'entrelacs séparé et du nœud trivial, mais dans le deuxième cas, d'importantes technicités apparaissent. Pour faciliter la présentation des idées principales, nous nous concentrons donc à partir de la section 3 sur le problème de l'entrelacs séparé, pour lequel nous pouvons expliquer presque toutes les étapes de la solution. Dans la section 5, nous discutons des différences à apporter pour traiter le cas du nœud trivial.

Enfin, pour améliorer la lisibilité, nous restons vagues sur les constantes et les polynômes apparaissant dans les preuves, utilisant la notation  $poly(c)$  pour désigner un certain polynôme en  $c$ , dont le degré augmentera au fur et à mesure des arguments.

*Remerciements.* — Je suis reconnaissant à Éric Colin de Verdière, Pierre Dehornoy, Francis Lazarus, Christine Lescop et Jean-Baptiste Meilhan pour leurs nombreux commentaires sur une version préliminaire de cet exposé.

## 1. SURFACES NORMALES ET UNE PREMIÈRE BORNE EXPONENTIELLE

Les surfaces normales sont la pierre angulaire de tout un pan de la théorie algorithmique des nœuds, entrelacs, et plus généralement des 3-variétés. Un très grand nombre de problèmes algorithmiques reviennent à trouver une certaine surface dans une 3-variété triangulée, et une observation fondamentale dont l'idée remonte à Kneser [Kne29] est que dans de nombreux cas, l'on peut supposer que cette surface n'est pas trop compliquée, c'est-à-dire qu'elle n'intersecte une triangulation donnée qu'en des morceaux élémentaires assez simples.

### 1.1. Triangulations

Pour décrire la théorie des surfaces normales, il est nécessaire de trianguler l'espace tridimensionnel que l'on considère, et pour des problèmes sur un nœud ou entrelacs  $L$ , cet espace est le complémentaire  $\mathbb{S}^3 \setminus N(L)$ , où  $N(L)$  désigne un voisinage régulier de  $L$ . Dans cet exposé, une triangulation d'une 3-variété (potentiellement à bord)  $M$  est un complexe simplicial pur de dimension 3 homéomorphe à  $M$ , tel que chaque point est localement homéomorphe à  $\mathbb{R}^3$  ou à un demi-espace<sup>(3)</sup>. Si  $L$  est un nœud, l'espace  $N(L)$

---

3. La théorie algorithmique des 3-variétés utilise généralement des triangulations plus souples, autorisant par exemple des tétraèdres à être recollés sur eux-mêmes, mais ce ne sera pas nécessaire ici.

est un tore plein, et la classe d'homologie sur  $\partial M = \partial N(L)$  qui borde un disque dans  $N(L)$  est appelée *méridienne*. Une classe d'homologie ayant intersection algébrique 1 avec la méridienne et non liée avec  $L$  est appelée *longitude*.

LEMME 1.1. — *Un nœud  $L$  est trivial si et seulement si il existe un disque plongé dans  $\mathbb{S}^3 \setminus N(L)$  dont le bord est une longitude.*

*Démonstration.* — S'il existe un tel disque, on peut l'utiliser pour obtenir une isotopie de  $L$  vers le nœud trivial. Réciproquement, un diagramme trivial fournit un disque ayant pour bord une longitude, et cette propriété est maintenue durant l'isotopie.  $\square$

Pour un nœud  $L$  décrit par une succession de  $n$  segments dans  $\mathbb{R}^3$ , ou bien pour un diagramme à  $c$  croisements, une triangulation de  $\mathbb{S}^3 \setminus N(L)$  peut être obtenue avec un nombre polynomial (en  $n$  ou en  $c$ ) de tétraèdres, par exemple en commençant avec  $L$  dans le 1-squelette d'une triangulation de  $\mathbb{S}^3$ , puis en itérant deux subdivisions barycentriques pour creuser et exclure un voisinage tubulaire de  $L$ . Nous ne nous attardons pas pour l'instant sur cette construction (voir par exemple Hass, Lagarias et Pippen-ger [HLP99, Lemme 7.2] pour plus de détails) parce qu'une autre, plus adaptée à notre objectif final, sera décrite en section 4.

## 1.2. Surfaces normales

Soit  $M$  une 3-variété munie d'une triangulation  $T$  avec  $t$  tétraèdres. On dit qu'une surface  $S$  est *proprement plongée* dans  $M$  si elle est plongée et si  $S \cap \partial M = \partial S$ . Une *isotopie normale* est une isotopie ambiante de  $M$  qui préserve la triangulation  $T$ . Une *surface normale* dans  $T$  est une surface plongée dans  $M$  qui intersecte chaque tétraèdre en une collection disjointe de *disques normaux*, qui sont soit :

- un *triangle*, qui sépare un sommet du tétraèdre des autres,
- ou un *quadrilatère*, qui sépare une paire de sommets des deux autres.

À isotopie normale près, il y a exactement 4 types de triangles et 3 types de quadrilatères dans un tétraèdre, représentés sur la figure 2. Le bord d'un disque normal sur un tétraèdre décrit une *courbe normale*, qui se décompose en *arcs normaux* sur chaque face du tétraèdre. Il y a donc à isotopie normale près trois types d'arcs normaux par face (les trois cordes d'un triangle).

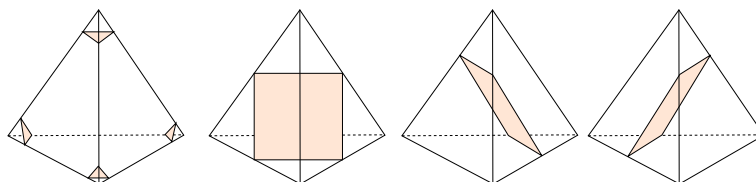


FIGURE 2. Les sept disques normaux dans un tétraèdre.

À isotopie normale près, une surface normale  $S$  peut être décrite par le nombre de triangles et de quadrilatères de chaque type dans chaque tétraèdre. Le vecteur de  $\mathbb{Z}^{7t}$  correspondant, noté  $[S]$ , forme les *coordonnées normales* de la surface. Il est naturel

de se demander quelles coordonnées normales correspondent à des surfaces proprement plongées, et la réponse est que celles-ci doivent satisfaire les conditions suivantes :

- *Positivité* : Les éléments de  $[S]$  doivent être positifs.
- *Équations d'appariement* : Pour chaque type d'arc normal sur une face entre deux tétraèdres, les nombres de disques normaux adjacents à ce type d'arc doivent être égaux de part et d'autre de la face.
- *Contraintes des quadrilatères* : Dans chaque tétraèdre, au plus un des trois types de quadrilatères a une coordonnée non nulle.

LEMME 1.2. — *Un vecteur  $[S] \in \mathbb{Z}^{7t}$  décrit une surface normale proprement plongée si et seulement si il vérifie ces trois contraintes. De plus, la surface normale est unique à isotopie normale près.*

*Démonstration.* — La positivité est une contrainte évidente, et les équations d'appariement stipulent que pour une face qui n'est pas sur le bord, il y a autant de surfaces qui rentrent que de surfaces qui sortent. De plus, dans un tétraèdre donné, on ne peut plonger de façon disjointe deux quadrilatères d'un type différent. Ces trois contraintes sont donc nécessaires. Réciproquement, à partir d'un vecteur, on obtient une surface en plaçant les triangles et les quadrilatères dans chaque tétraèdre (en mettant les triangles au plus près des sommets pour qu'il n'y ait pas d'intersections), et en les recollant : les équations d'appariement assurent que c'est possible. L'unicité découle de la construction.  $\square$

Si elles n'ont pas de quadrilatères en conflit, deux surfaces normales peuvent être additionnées en additionnant leurs coordonnées normales. Une surface normale est dite *fondamentale* si elle ne peut être écrite comme une somme  $[S] = [S_1] + [S_2]$  pour  $[S_1]$  et  $[S_2]$  deux surfaces normales non vides.

L'idée de base de la théorie des surfaces normales est que de nombreuses surfaces plongées « intéressantes » dans une 3-variété peuvent être mises sous forme normale. Ainsi, pour chercher une telle surface, il suffit de parcourir l'espace des surfaces normales, dont la structure est bien plus simple que l'espace des surfaces plongées. De plus, il suffit souvent de chercher parmi les surfaces normales fondamentales. Dans les cas qui nous intéressent, le résultat est dû à Haken :

THÉORÈME 1.3 (Haken [Hak61]). — *Si  $L$  est un nœud trivial, il existe une surface normale fondamentale qui est un disque dont le bord est une longitude. Si  $L$  est un entrelacs séparé, il existe une surface normale fondamentale qui est une sphère séparant les deux composantes de  $L$ .*

*Esquisse de preuve.* — Nous décrivons rapidement le cas du nœud trivial, l'entrelacs séparé étant similaire. Si  $L$  est un nœud trivial, on sait par le lemme 1.2 qu'il existe un disque ayant pour bord une longitude. Il s'agit alors de le *normaliser* : dans chaque tétraèdre, ce disque induit plusieurs composantes connexes. Quitte à réaliser des compressions (voir la figure 3), ces composantes connexes sont toutes des disques que l'on va

tendre le plus possible, jusqu'à ce qu'il ne reste que des disques normaux. Ensuite, pour montrer que la surface normale peut être supposée fondamentale, il s'agit d'observer que si on l'écrit comme une somme non triviale, l'un des termes convient nécessairement aussi. Ces deux étapes sont non triviales, et nous renvoyons à Matveev [Mat07, Chapitres 3 et 4] pour une preuve détaillée.  $\square$

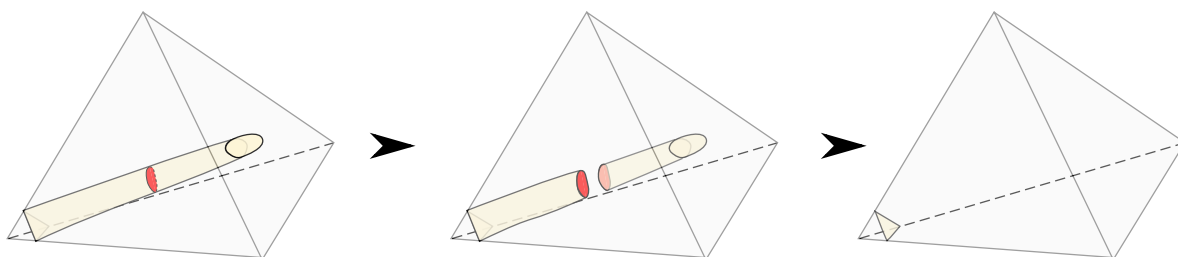


FIGURE 3. On normalise un tube en le comprimant le long d'un disque et en éliminant les sphères.

Le théorème suivant fournit une borne sur la taille des coordonnées normales d'une surface fondamentale.

THÉORÈME 1.4 (Hass, Lagarias et Pippenger [HLP99, Lemme 6.1])

*La taille des coordonnées normales d'une surface fondamentale  $[S] \in \mathbb{Z}^{7t}$  est bornée par  $||[S]_i|| \leq t \cdot 2^{7t+2}$ .*

Avec une analyse minutieuse, ces techniques donnent borne exponentielle suivante.

THÉORÈME 1.5 (Hass et Lagarias [HL01]). — *Tout diagramme d'un nœud trivial à  $n$  croisements peut être transformé en un diagramme trivial en utilisant au plus  $2^{c_1 n}$  mouvements de Reidemeister pour une certaine constante  $c_1$ .*

*Idée de la preuve.* — Partant d'un diagramme de nœud à  $n$  croisements, on peut obtenir un plongement polygonal du même nœud dans  $\mathbb{R}^3$  avec  $O(n)$  segments. Toute la théorie des surfaces normales ci-dessus peut ensuite être réalisée de façon linéaire, où les tétraèdres sont des vrais tétraèdres et les disques normaux de vrais triangles ou des quadrilatères composés de deux vrais triangles.

Par les théorèmes 1.3 et 1.4, il existe un disque normal dont les coordonnées ont une taille au plus exponentielle et ayant une longueur pour bord. On peut simplifier le nœud en le faisant glisser successivement le long de chaque disque normal qui lui est adjacent. Chacun de ces mouvements du nœud  $L$  dans  $\mathbb{R}^3$  induit une fois projeté un nombre borné de mouvements de Reidemeister sur le diagramme de  $L$ . À la fin, le nœud sera le bord d'un seul disque fondamental, et on se retrouve avec un diagramme trivial, ce qui conclut la preuve.  $\square$

Telle quelle, cette approche a peu d'espoir d'être optimisée pour fournir une borne polynomiale : en effet Hass, Snoeyink et Thurston [HST03] ont fourni des exemples de

nœuds triviaux constitués de  $O(n)$  segments, mais pour lesquels tout disque méridien a au moins  $2^{n-1}$  faces triangulaires.

*Remarque 1.6.* — Une approche similaire (voir Hayashi [Hay05]) permet d’obtenir une borne sur le nombre de Reidemeister pour séparer un entrelacs, mais (à l’inverse des travaux présentés dans la suite de cet exposé), c’est significativement plus difficile, et la borne obtenue est une tour d’exponentielles. Nous ne nous attardons pas là-dessus puisque la section suivante fournit une meilleure borne et de façon plus simple.

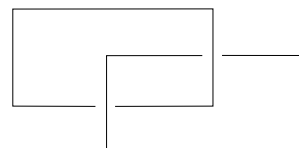
*Remarque 1.7.* — Il existe une notion plus forte que celle de surface normale fondamentale : une surface normale  $S$  est une surface normale *sommet* si elle est connexe et si  $n[S] = [S_1] + [S_2]$  pour un certain  $n$  implique que  $S_1$  et  $S_2$  sont des multiples de  $S$ . Jaco et Tollefson [JT95] ont montré que le théorème 1.3 est aussi vrai avec des surfaces normales sommet, et le théorème 1.4 a également un analogue, avec des meilleures bornes (mais toujours exponentielles). Pour des raisons techniques, Lackenby introduit une notion supplémentaire, celle de surface normale *sommet à bord* (*boundary vertex normal surface*) et prouve des théorèmes similaires. Pour rester simple, nous serons imprécis dans cet exposé et amalgamons toutes ces notions sous le terme de surface normale fondamentale.

## 2. PRÉSENTATION PAR ARCS ET UNE SECONDE BORNE EXPONENTIELLE

### 2.1. Présentation par arcs

Nous nous intéressons maintenant à la présentation par arcs des nœuds et des entrelacs. Introduite initialement par Birman et Menasco [BM94] pour étudier des tresses, puis étudiée par Cromwell [Cro95], c’est un outil essentiel utilisé par Dynnikov [Dyn06] puis par Lackenby dans l’étude des mouvements de Reidemeister.

Il y a deux façons équivalentes de décrire une présentation par arcs. Commençons par la plus combinatoire, en lien direct avec notre problématique. Un *diagramme rectangulaire* d’un nœud ou d’un entrelacs est un diagramme (au sens défini dans l’introduction) où tous les arcs sont soit horizontaux, soit verticaux, les arcs verticaux passent toujours au-dessus des horizontaux, et aucune paire d’arcs n’est colinéaire. La figure ci-contre montre un diagramme rectangulaire d’un entrelacs de Hopf. Dans un diagramme rectangulaire, il y a autant d’arcs horizontaux que verticaux, et leur nombre est l’*indice d’arcs* du diagramme.

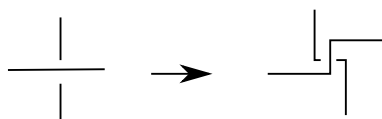


On peut facilement rendre tout diagramme de nœud ou d’entrelacs rectangulaire :

LEMME 2.1. — *Soit  $D$  le diagramme d’un nœud ou d’un entrelacs avec  $c$  croisements. Alors  $D$  est isotope à un diagramme rectangulaire avec indice d’arcs  $O(c)$ .*



*Esquisse de preuve.* — En considérant les croisements comme des sommets, le diagramme  $D$  est un graphe planaire à  $c$  sommets où tous les sommets ont degré 4. Il s'agit de trouver un nouveau plongement de ce graphe (homéomorphe au premier) où toutes les arêtes sont des concaténations d'un nombre contrôlé d'arcs horizontaux ou verticaux. C'est un vieux problème de dessin de graphes, voir Storer [Sto84]. En perturbant un peu pour éviter les arêtes colinéaires, et en utilisant le gadget ci-dessous lorsque les arêtes horizontales passent au-dessus des verticales, le résultat suit.  $\square$



Une autre façon de décrire ces diagrammes rectangulaires passe par les plongements dans un livre de  $\mathbb{S}^3$  avec un nombre fini de pages. Précisément, considérons  $\mathbb{S}^3$  comme le *joint*  $\mathbb{S}^1 * \mathbb{S}^1$ , où les deux cercles  $\mathbb{S}^1$  forment un entrelacs de Hopf. Cela fournit des coordonnées  $(\phi, \tau, \theta)$  pour  $\mathbb{S}^3$ , où  $\phi, \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  sont les coordonnées du cercle  $\mathbb{S}^1$ , et  $\tau \in [0, 1]$ . Les points  $(\phi, 0, \theta_1)$  et  $(\phi, 0, \theta_2)$  sont identifiés pour toutes valeurs de  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , tout comme  $(\phi_1, 1, \theta)$  et  $(\phi_2, 1, \theta)$  pour toutes valeurs de  $\phi_1$  et  $\phi_2$ . Les cercles  $\tau = 0$  et  $\tau = 1$  sont notés  $\mathbb{S}_\phi^1$  et  $\mathbb{S}_\theta^1$  respectivement, et les points satisfaisant  $\theta = t$  et  $\tau > 0$  décrivent une *page* notée  $D_t$ .

Un entrelacs  $L$  est *présenté par arcs* si  $L \cap \mathbb{S}_\phi^1$  est un ensemble fini de points (les *sommets* de  $L$ ), et pour tout  $t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , l'intersection  $D_t \cap L$  est soit vide, soit un arc reliant deux sommets distincts. Cela correspond à l'idée de dessiner  $L$  dans un livre ouvert, où la reliure est le cercle  $\mathbb{S}_\phi^1$  : voir la figure 4. L'*indice d'arcs* d'une telle présentation est le nombre de pages utilisées.

Il se trouve que les présentations par arcs et les diagrammes rectangulaires sont rigoureusement le même objet. En effet, remarquons d'abord qu'à isotopie près, pour décrire une présentation par arcs il suffit de préciser les coordonnées  $\phi_1, \dots, \phi_n$  des sommets, les pages  $\theta_1, \dots, \theta_n$  des arcs et sur quels sommets sont attachés les arcs. Pour en déduire un diagramme rectangulaire, il suffit d'utiliser les  $\theta_i$ , respectivement les  $\phi_i$ , comme les abscisses  $x_1, \dots, x_n$  des arcs verticaux, respectivement comme les ordonnées  $y_1, \dots, y_n$  des arcs horizontaux, et en attachant ceux-ci de la même façon que les arcs étaient attachés aux sommets.

Cette bijection peut se visualiser de la façon suivante, voir la figure 4 :

- Dans chaque page, tracer les arcs avec des demi-rectangles.
- Éloigner les sommets de la reliure par des arcs de cercle d'un petit rayon  $\varepsilon$ .
- « Refermer » presque entièrement le livre.
- Regarder par la tranche.

Par construction, les arcs verticaux se retrouvent toujours devant les arcs horizontaux, conformément à la définition d'un diagramme rectangulaire.

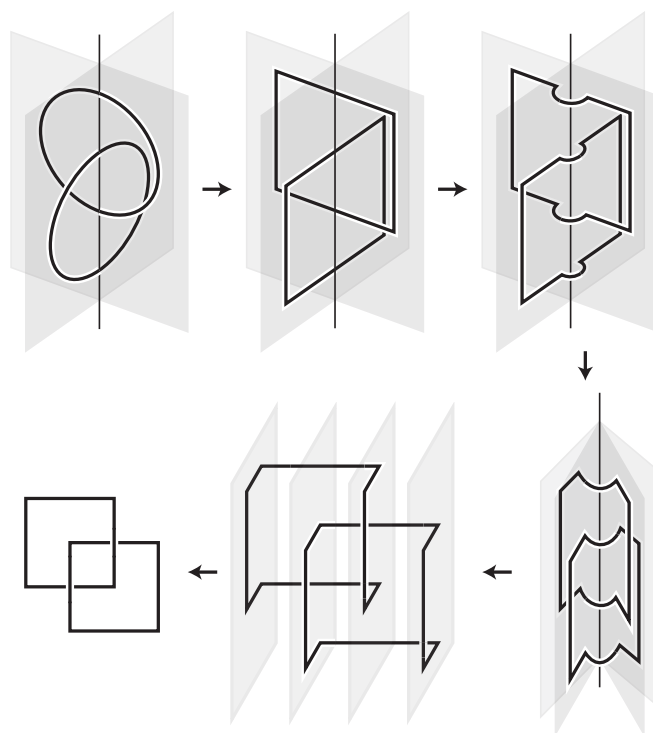


FIGURE 4. D'une présentation par arcs de l'entrelacs de Hopf à un diagramme rectangulaire.

## 2.2. Mouvements sur les diagrammes rectangulaires

La construction précédente n'est pas tout à fait bien définie puisque les angles sont définis modulo  $2\pi$  alors que les abscisses et ordonnées des segments sont des réels. Pour pallier ce problème, il est naturel de considérer les diagrammes rectangulaires modulo une permutation cyclique des arêtes verticales ou horizontales, voir la figure 5a. Deux autres types de mouvements vont également nous intéresser : les stabilisations/déstabilisations (figure 5b) et les échanges horizontaux ou verticaux (figure 5c)—ces derniers ne sont autorisés que lorsqu'il n'y a pas de segments entre les segments échangés et que les extrémités ne sont pas intercalées. Notons que ces mouvements préservent la classe d'isotopie de l'entrelacs, comme on peut le voir en les transcrivant dans le monde des présentations par arcs (figure 5d). En conséquence, ces mouvements peuvent être réalisés par des mouvements de Reidemeister, et le lemme suivant, dont la preuve est laissée en exercice, montre qu'il n'en faut pas trop.

LEMME 2.2. — *Soit  $D$  un diagramme rectangulaire d'indice d'arcs  $n$ . Une permutation cyclique, un mouvement d'échange ou une déstabilisation peuvent être réalisés par  $\text{poly}(n)$  mouvements de Reidemeister.*

Parmi les mouvements sur les diagrammes rectangulaires, seule la stabilisation augmente l'indice d'arcs du diagramme. Toute la force des diagrammes rectangulaires est alors illustrée dans le théorème de Dynnikov suivant :

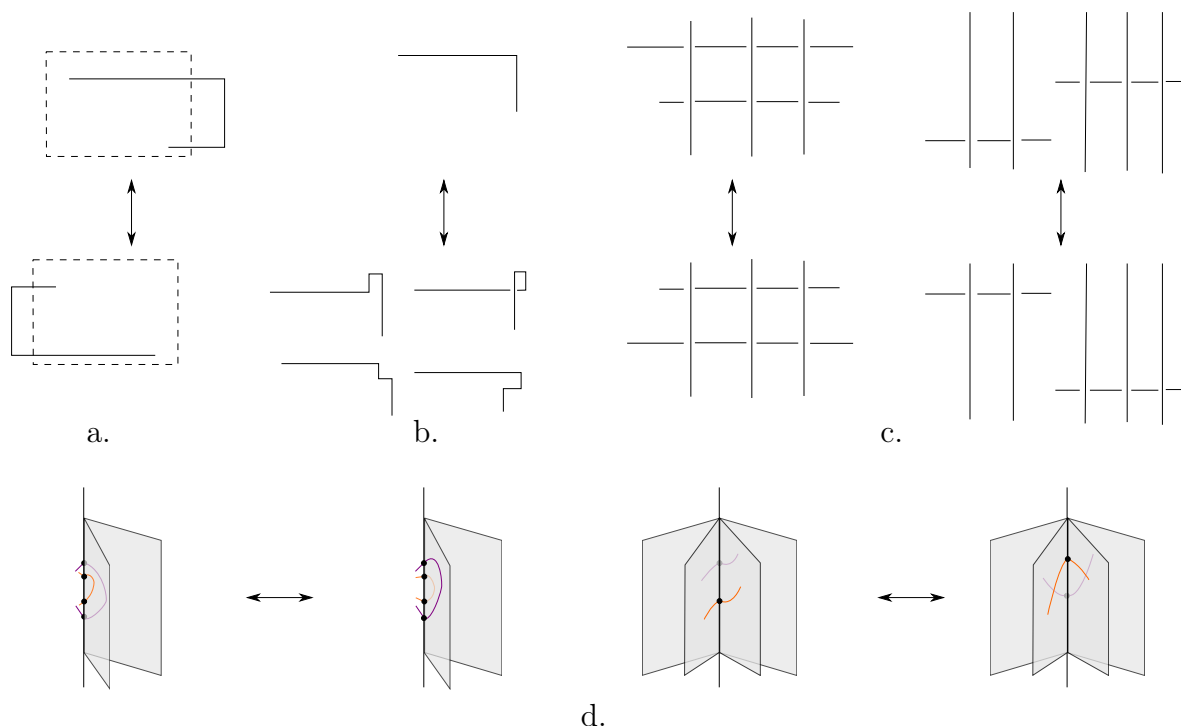


FIGURE 5. a. Permutation cyclique des arêtes verticales. b. Stabilisation (haut vers bas) et déstabilisation (bas vers haut). c. Mouvement d'échange horizontal. d. Mouvements d'échanges horizontaux et verticaux sur les présentations par arcs.

THÉORÈME 2.3 (Dynniov [Dyn06]). — Soit  $D$  le diagramme rectangulaire d'un nœud trivial (respectivement d'un entrelacs séparé), alors il existe une suite de permutations cycliques, déstabilisations et échanges transformant  $D$  en un diagramme trivial (respectivement en un diagramme déconnecté).

C'est un résultat de simplification *monotone* : la complexité du diagramme n'augmente jamais au cours de la simplification. Comme nous l'avons vu dans l'introduction, un tel résultat serait impossible avec des mouvements de Reidemeister. La complexité n'est pas strictement décroissante pour autant, puisque les permutations et les échanges ne la changent pas. Mais comme le nombre de cartes planaires de degré 4 est simplement exponentiel (voir par exemple Bousquet-Mélou [BM11]), le nombre de diagrammes rectangulaires d'indice d'arcs  $n$  est exponentiel en  $n^2$ , et cela fournit donc une borne exponentielle sur le nombre de mouvements nécessaire pour trivialisier un diagramme (ou séparer un diagramme d'entrelacs). En combinant cela avec les lemmes 2.1 et 2.2, cela donne également une borne exponentielle sur le nombre de mouvements de Reidemeister. On obtient de plus le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2.4 (Dynniov [Dyn06]). — Soit  $D$  le diagramme d'un nœud trivial avec  $c$  croisements. Alors il existe une suite de mouvements de Reidemeister le transformant en un diagramme trivial, telle que chaque diagramme a au plus  $\text{poly}(c)$  croisements.

Afin d'améliorer le théorème 2.3 et d'obtenir des bornes polynomiales, nous rentrons maintenant dans la preuve du théorème 2.3.

### 3. SIMPLIFICATION MONOTONE

#### 3.1. Surface caractéristique, feuilletage et graphe induit

Comme vu plus haut (lemme 1.2), un nœud est trivial si et seulement si il borde un disque plongé. Similairement, un entrelacs est séparé si et seulement si il existe une sphère disjointe de l'entrelacs séparant ses composantes connexes. Appelons ces deux surfaces les *surfaces caractéristiques* du problème correspondant. L'approche pour prouver le théorème 2.3 consiste, partant d'une présentation par arcs d'un nœud ou d'un entrelacs, à placer la surface caractéristique  $S$  dans une certaine position générale vis-à-vis des cercles  $S_\phi^1$ ,  $S_\theta^1$  et des pages  $D_t$ . Ensuite, les pages  $D_t$  induisent un feuilletage sur la surface  $S \setminus S_\phi^1$ . Ce feuilletage permet de définir un graphe sur la surface caractéristique, et un argument de caractéristique d'Euler montre que ce graphe possède nécessairement certaines sous-structures. Celles-ci pourront être utilisées pour identifier certains mouvements (qui n'utilisent pas de stabilisation !) sur la présentation par arcs du nœud ou de l'entrelacs qui permettent de simplifier le graphe et donc la surface. Une fois que celle-ci est aussi simple que possible, le diagramme rectangulaire que l'on obtient est trivial ou déconnecté et le théorème 2.3 est établi.

Pour rentrer un peu plus dans les détails, comme annoncé dans l'introduction nous nous concentrons à partir de maintenant sur le problème de la séparation d'un entrelacs. Remarquons que pour ce problème, les idées principales sont déjà présentes dans les travaux de Birman et Menasco [BM92] et Cromwell [Cro95], la contribution essentielle de Dynnikov étant de les appliquer au cas du nœud trivial.

Soit donc  $S$  une surface caractéristique d'un entrelacs séparé  $L$ , décrit par une présentation par arcs. Les pages  $D_t$  induisent un feuilletage  $\mathcal{F}$  sur  $S \setminus S_\phi^1$ , qui a peut-être des singularités. On dit que la surface caractéristique est sous forme *admissible* si :

1.  $S$  est lisse.
2.  $S$  intersecte l'axe  $S_\phi^1$  en un nombre fini de points, appelés *sommets*.
3. Le feuilletage  $\mathcal{F}$  a un nombre fini de singularités, qui sont des points de tangence entre  $S$  et les pages  $D_t$ .
4. Toutes les singularités sont de type Morse, c'est-à-dire des minima ou maxima locaux ou des selles.
5. Chaque page  $D_t$  contient au plus un arc de  $L$  ou une singularité de  $\mathcal{F}$  mais pas les deux.

Des arguments de position générale montrent qu'on peut toujours supposer qu'une surface caractéristique pour l'entrelacs  $L$  est sous forme admissible. La *complexité* de la surface  $S$  est son nombre de sommets, noté  $v$ . D'après la condition 4, les singularités

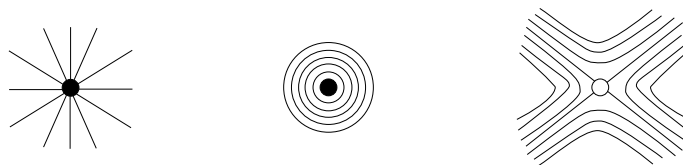


FIGURE 6. Les trois types de singularités du feuilletage  $\mathcal{F}$  : les sommets, les pôles et les selles.

du feuilletage  $\mathcal{F}$  sont soit des sommets, soit des maxima/minima, appelés *pôles*, soit des *selles*, voir la figure 6.

Parmi les feuilles du feuilletage, celles qui sont adjacentes à une selle sont appelées *séparatrices*. Considérons le graphe  $G$  dont les sommets <sup>(4)</sup> sont les sommets et les selles, et les arêtes sont les séparatrices. C'est un graphe planaire, puisque plongé sur la sphère  $S$ , et il a donc des *faces*. Par construction, les selles ont toujours quatre arêtes incidentes, désignons leur nombre par  $s$ , par  $v_i$  le nombre des sommets ayant *degré*  $i$  (c'est-à-dire  $i$  arêtes incidentes) et par  $p$  le nombre de pôles. La surface caractéristique est appelée *finale* si elle n'a pas de singularités et uniquement deux sommets de degré 0 : en effet le diagramme rectangulaire correspondant est alors déconnecté.

Les observations suivantes sont laissées en exercices (très instructifs) pour le lecteur :

1. Une séparatrice ne relie jamais deux selles distinctes.
2. Si la surface n'est pas finale,  $v_0 = 0$ .
3.  $v_1 = 0$ .
4. S'il n'y a pas de pôle, une séparatrice ne relie jamais une selle à elle-même.
5. S'il n'y a pas de pôle, toutes les faces du graphe  $G$  ont degré 4 (c'est-à-dire qu'elles sont adjacentes à quatre arêtes).

LEMME 3.1. — *Si  $S$  n'est pas finale, le feuilletage  $\mathcal{F}$  a au moins un pôle, ou bien le graphe  $G$  a au moins un sommet de degré 2 ou un sommet de degré 3.*

*Démonstration.* — Supposons que le feuilletage  $\mathcal{F}$  n'ait pas de pôle. D'après les observations précédentes,  $G$  est une quadrangulation bipartie de la sphère. La caractéristique d'Euler et un double comptage des arêtes nous donnent  $\sum_k kv_k + 4s = 4(\sum_k v_k + s) - 8$ , et donc  $2v_2 + v_3 = 8 + \sum_{k \geq 4} (k-4)v_k$ . En particulier,  $v_2$  ou  $v_3$  est strictement positif.  $\square$

### 3.2. Mouvements de simplification

Montrons maintenant que si la surface caractéristique contient une des structures indiquées par le lemme 3.1, on peut simplifier celle-ci, c'est-à-dire réduire sa complexité, en utilisant des mouvements sur l'entrelacs  $L$  qui n'utilisent pas de stabilisation.

4. La terminologie est un peu malheureuse.

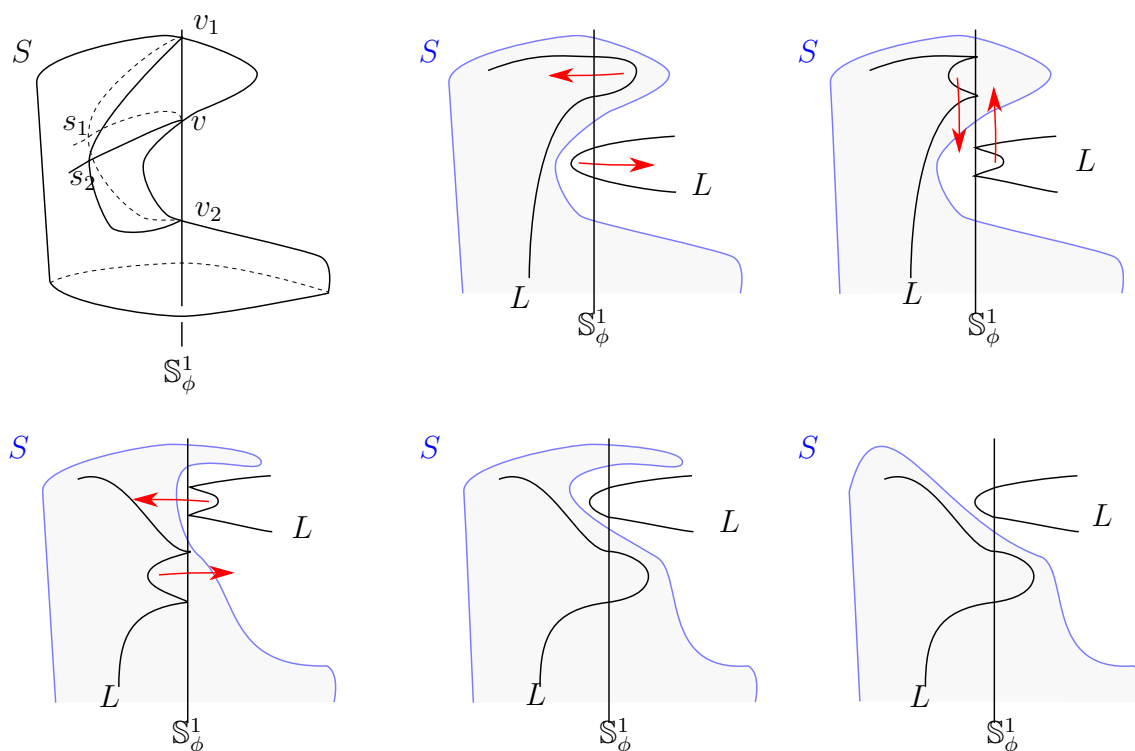
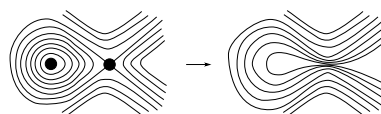


FIGURE 7. Élimination d'un sommet de degré 2.

*Suppression des pôles.* — Un pôle peut en fait être supprimé par une modification locale de la surface sans même déplacer l'entrelacs. En effet, un pôle est nécessairement entouré par une séparatrice reliant une selle à elle-même. En « poussant » sur le pôle, on peut faire disparaître celui-ci, ainsi que la selle par la même occasion, comme sur la figure ci-contre. Il convient de vérifier que l'entrelacs  $L$  ne peut pas être sur le chemin de cette poussée, ce qui est le cas puisque chacun de ses arcs est contenu dans une seule page  $D_t$ . On obtient donc ainsi une surface caractéristique admissible avec un pôle et une selle de moins.



Nous pouvons donc effectuer cette opération sur tous les pôles et supposer que le feuilletage  $\mathcal{F}$  n'a pas de pôle. Il a donc des sommets de degré 2 ou 3.

*Suppression des sommets de degré 2.* — Si  $G$  a un sommet de degré 2, désigné par  $v$ , ce sommet est relié à 2 selles notées  $s_1$  et  $s_2$ . Les deux faces adjacentes à  $v$ ,  $s_1$  et  $s_2$  contiennent chacune un autre sommet, appelés  $v_1$  et  $v_2$ . La situation est alors illustrée dans l'image en haut à gauche de la figure 7. Encore une fois, l'idée est de pousser la surface  $S$ , cette fois de sorte qu'au lieu d'intersecter  $S_\phi^1$  en trois points  $v$ ,  $v_1$  et  $v_2$ , elle ne l'intersecte plus qu'une fois. Le problème est que des brins de l'entrelacs  $L$  peuvent être sur le chemin de cette isotopie, et il est donc nécessaire de les déplacer également. La figure 7 montre comment déplacer les brins pour atteindre cet objectif *sans utiliser de stabilisation* : les mouvements sont juste une succession d'échanges horizontaux et verticaux (et peut-être de permutations cycliques sur le diagramme

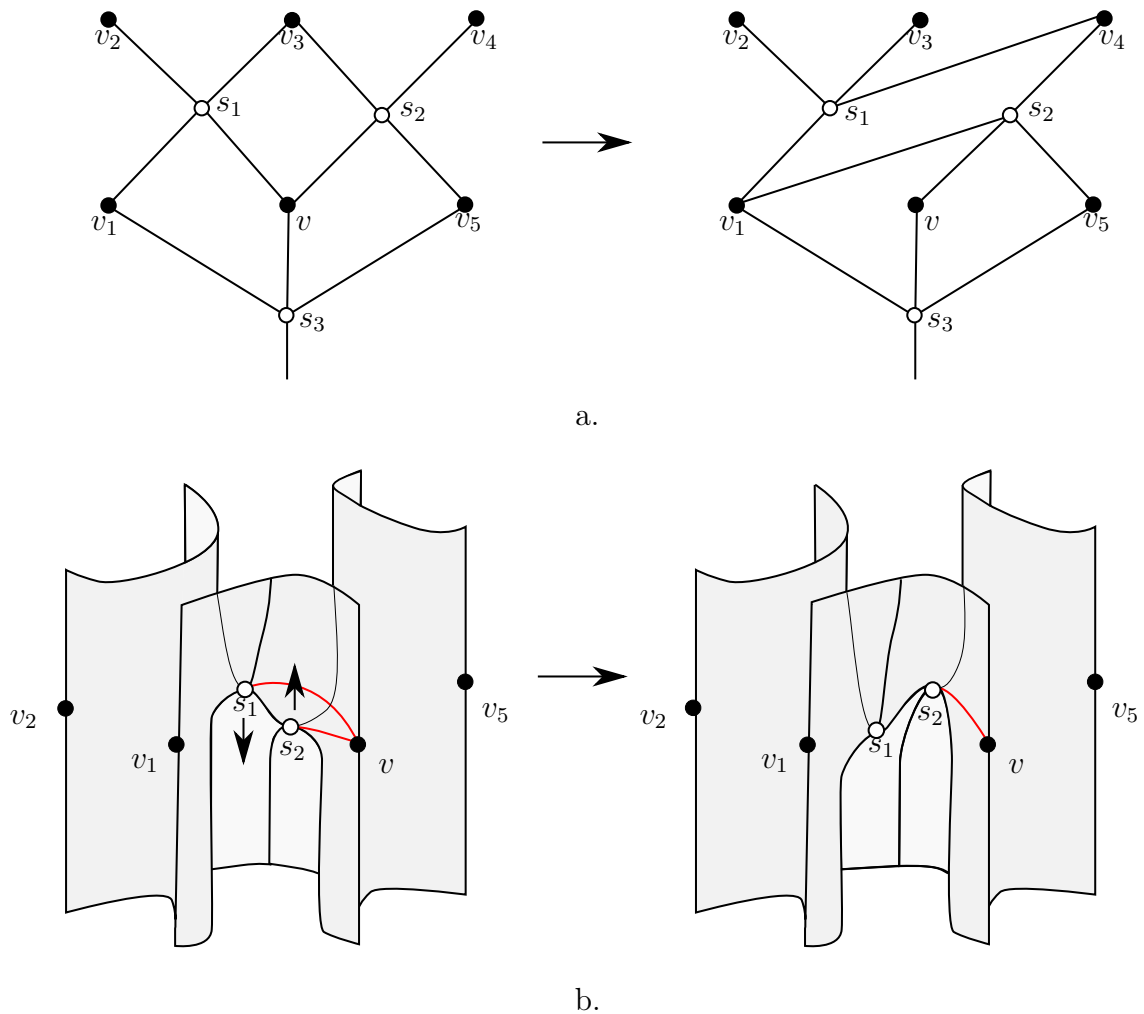


FIGURE 8. a. Élimination d'un sommet de degré 3. b. L'isotopie consiste à monter  $s_2$  de façon à ce qu'elle « cache »  $s_1$  depuis  $v$ .

rectangulaire). Cette illustration considère un cas simple où un seul arc de l'entrelacs est à déplacer de part et d'autre, mais si les arcs en question sont multiples, on peut réaliser les mêmes opérations sur tous les arcs en même temps : c'est ce que Dynnikov appelle un *mouvement d'échange généralisé*. À la dernière étape, l'entrelacs n'est plus sur le trajet de l'isotopie de la surface qu'on souhaite effectuer, il ne reste donc plus qu'à la faire pour éliminer le sommet de degré 2.

La série de mouvements d'échanges et de permutations cycliques effectués ici sera résumée sous le terme *mouvement de simplification*. Le nombre d'arcs à déplacer étant borné par l'indice d'arcs de l'entrelacs, il découle du lemme 2.2 qu'un tel mouvement de simplification utilise un nombre polynomial de mouvements de Reidemeister.

*Suppression des sommets de degré 3.* — Si  $G$  a un sommet  $v$  de degré 3, alors le graphe autour de  $v$  est illustré par la figure 8a, dont nous utiliserons les notations : les sommets, repérés avec des points noirs, sont  $v, v_1, v_2, v_3, v_4$  et  $v_5$  et les selles (avec des points blancs)

sont notées  $s_1, s_2$  et  $s_3$ . L'objectif est de transformer ce graphe comme indiqué par la figure, de sorte que le sommet  $v$  ait maintenant un degré 2, que l'on pourra éliminer par la méthode précédente. Dans cette transformation, seules les selles  $s_1$  et  $s_2$  nous intéressent. Géométriquement, la situation est celle de la figure 8b où l'on voit les 6 sommets adjacents à ces deux selles. Pour correspondre à la représentation habituelle d'une selle, le cercle  $\mathbb{S}_\phi^1$  est ici représenté comme un cercle horizontal, les pages sont alors en première approximation des plans horizontaux. À gauche,  $v$  est connecté à la fois aux selles  $s_1$  et  $s_2$ , mais en montant un peu l'une et en descendant l'autre, on peut faire en sorte que  $s_1$  soit « cachée » par  $s_2$ . Encore une fois, il faut déplacer les arcs de  $L$  (et peut-être d'autres morceaux de  $S$ ) sur le chemin de cette isotopie, ce qui se réalise avec des mouvements d'échange montant ou descendant ces arcs. Notamment, on n'utilise encore une fois pas de stabilisation. Le lemme 2.2 montre que ce mouvement de simplification utilise aussi un nombre polynomial de mouvements de Reidemeister.

Ainsi, d'après le lemme 3.1, si la surface caractéristique est non triviale il y a forcément un sommet de degré 2 ou 3, et nous avons vu comment simplifier ceux-ci sans utiliser de stabilisation. En itérant, cela montre le théorème 2.3 dans le cas d'un entrelacs séparé. Notons que si l'on disposait d'une borne sur la complexité de la surface caractéristique, cela en fournirait une sur le nombre de mouvements de Reidemeister effectués. Tout ceci nous amène à la section suivante.

#### 4. UNE BORNE POLYNOMIALE

Nous avons maintenant en main tous les éléments pour expliquer comment obtenir les théorèmes 0.1 et 0.2. L'idée essentielle de Lackenby est de combiner les mouvements de simplification monotone de la section précédente avec des surfaces normales. Il s'agit d'abord de travailler avec une triangulation adaptée aux présentations par arcs, et celle-ci permettra de supposer que la surface caractéristique est (plus ou moins) en position normale, et est même fondamentale. Sa complexité est alors directement corrélée avec la taille de ses coordonnées normales, qui est bornée par le théorème 1.4. Hélas, cette borne est *exponentielle*, ce qui a priori ne permet pas de progresser.

Mais puisqu'on travaille avec une triangulation ayant un nombre polynomial de tétraèdres, cela signifie qu'un nombre exponentiel de disques normaux seront *parallèles* (c'est-à-dire de même type). Et lorsqu'on opère un mouvement de simplification, on observe qu'il simplifie non seulement la singularité en question, mais également toutes celles sur des morceaux de la surface caractéristique qui lui sont parallèles. On peut donc s'attendre à ce qu'un nombre *polynomial* de mouvements de simplification suffise à simplifier la surface caractéristique de complexité exponentielle en une surface triviale.

Pour confirmer cette intuition, nous verrons qu'il s'agit de montrer que le nombre de sommets de degré 2 ou 3 représente une proportion importante des sommets du graphe  $G$ . Cela ne découle pas directement de l'argument de caractéristique d'Euler



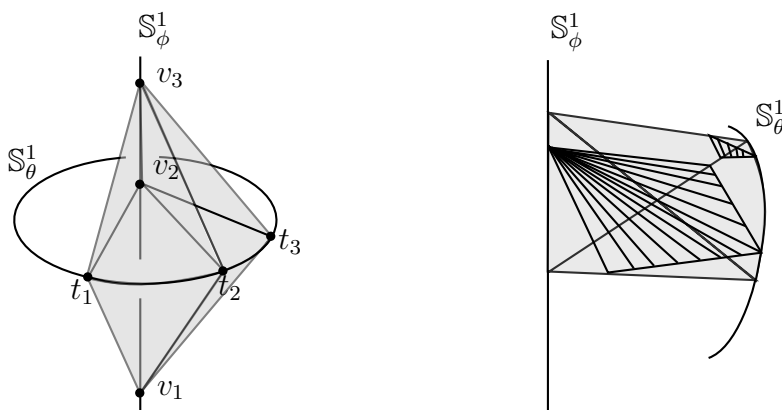


FIGURE 9. La triangulation de Dynnikov et le feuilletage induit sur des disques normaux.

du lemme 3.1 : en effet, la complexité exponentielle de la surface normale pourrait être concentrée autour de sommets de degré 4. La contribution clé de Lackenby est d’observer que dans ce cas-là, la surface normale n’est pas fondamentale, car une telle surface est la somme d’un tore et d’une surface non triviale. Trouver ce tore est une affaire délicate, qui constitue une part très technique de la contribution de Lackenby ; nous ne présenterons que quelques idées de la preuve à la fin de la section.

#### 4.1. La triangulation de Dynnikov

Partant d’un diagramme d’entrelacs  $L$  rendu rectangulaire, on obtient une présentation par arcs de  $L$ , d’indice d’arcs  $n = O(c)$ . Dynnikov a observé qu’une présentation par arcs induit naturellement une triangulation de  $\mathbb{S}^3$  contenant l’entrelacs étudié dans son 1-squelette. Partant du joint  $\mathbb{S}^3 = \mathbb{S}_\theta^1 * \mathbb{S}_\phi^1$ , un entrelacs  $L$  en présentation par arcs d’indice d’arcs  $n$  intersecte  $\mathbb{S}_\phi^1$  en  $n$  points. Dans chaque page non vide, on peut supposer à isotopie près que  $L$  est une concaténation de deux segments adjacents à  $\mathbb{S}_\theta^1$ , et qui peuvent donc chacun être décrits par des coordonnées  $(\phi, \tau, \theta)$ , avec  $\phi$  et  $\theta$  fixés et  $0 \leq \tau \leq 1$ . Notons  $v_1 < \dots < v_n$  les sommets de  $L \cap \mathbb{S}_\phi^1$ , et par  $t_1 < \dots < t_n$  les points de  $L \cap \mathbb{S}_\theta^1$ . Les simplexes  $[v_i, v_{i+1}] * [t_j, t_{j+1}]$  (numérotés modulo  $n$ ) triangulent alors  $\mathbb{S}^3$  et la triangulation obtenue, notée  $\mathcal{T}$ , contient  $L$  dans son 1-squelette, voir la figure 9. Cette triangulation contient  $O(c^2)$  tétraèdres.

Nous allons alors travailler avec les surfaces normales de cette triangulation comme des surfaces caractéristiques pour les arguments de la section 3. Cela pose des difficultés techniques : une telle surface n’est certainement pas lisse, et ses singularités peuvent ne pas être de type Morse. Néanmoins, la surface peut être réalisée de façon linéaire par morceaux : les triangles seront linéaires et les quadrilatères peuvent être séparés en deux triangles. Les singularités par rapport au feuilletage induit par les pages sont alors isolées, et le même genre d’étude qu’en section 3 peut être mené. On introduit donc une *surface PL-admissible*  $S$  plongée dans l’extérieur d’un entrelacs  $L$  dans ce nouveau contexte ainsi :

1.  $S$  sépare les deux composantes de  $L$ .

2.  $S$  est linéaire par morceaux dans chaque simplexe de  $\mathcal{T}$ .
3.  $S$  intersecte  $\mathbb{S}_\phi^1$  un nombre fini de fois.
4. Par rapport au feuilletage induit par les pages,  $S$  a un nombre fini de singularités.
5. Chaque page contient au plus un arc de  $L$  ou une singularité de  $S$ , mais pas les deux.

Une surface normale linéaire par morceaux vérifie ces hypothèses. On appelle comme précédemment un *sommet* tout point de  $S \cap \mathbb{S}_\phi^1$ , et comme en section 3, on définit un graphe  $G$  plongé sur  $S$  en prenant pour sommets les sommets et les singularités et pour arêtes les feuilles adjacentes aux selles. Notons que les singularités par rapport au feuilletage sont encore soit des pôles, soit des selles, mais les selles peuvent être des *selles généralisées*, c'est-à-dire qu'elles peuvent avoir un degré pair supérieur à 4 dans le graphe  $G$ .

*Remarque 4.1.* — Avant de continuer, adressons un avertissement au lecteur : nous étudions maintenant en même temps trois structures discrètes :

1. La triangulation  $\mathcal{T}$ .
2. La surface  $S$ , vue comme une surface normale, donc décomposée en disques normaux.
3. Le graphe  $G$  plongé sur la surface  $S$ , et qui découpe celle-ci en faces.

Il faut faire attention dans ce qui suit à ne pas confondre la deuxième et la troisième : par exemple une face de  $G$  peut contenir *plusieurs* disques normaux.

La *complexité* d'une surface normale PL-admissible est la somme de ses coordonnées normales. Par le théorème 1.4, cette complexité est au plus exponentielle en le nombre de croisements de  $L$ , et c'est une borne supérieure sur le nombre de sommets de  $S$ .

Encore une fois, on peut simplement se débarrasser des pôles.

LEMME 4.2. — *Une surface PL-admissible de complexité minimale n'a pas de pôle.*

*Idée de la démonstration.* — On observe d'abord que par construction, s'il y a un pôle, celui-ci est nécessairement sur une arête de  $\mathbb{S}_\theta^1$ , et qu'il n'est adjacent qu'à des triangles. De façon similaire à l'opération de la section 3.2, on peut alors « pousser » sur ce pôle pour le faire disparaître, ce qui réduira la complexité de la surface, contredisant l'hypothèse de minimalité.  $\square$

## 4.2. Mouvements de simplification parallèles

Concrétisons maintenant cette notion de surfaces parallèles. L'*étoile* d'un sommet  $v$  du graphe  $G$  est l'union des faces de  $G$  qui le contiennent. Deux sommets  $v_1$  et  $v_2$  de  $S \cap \mathbb{S}_\phi^1$  sont dits *de même type* si leurs étoiles sont *normalement parallèles*, c'est-à-dire qu'une isotopie normale envoie l'une sur l'autre.

LEMME 4.3. — *Le nombre de types de sommets dans  $S$  est polynomial en  $c$ .*

*Démonstration.* — Dans la surface normale  $S$ , considérons les disques normaux extrêmes, c'est-à-dire ceux qui ne sont pas intercalés entre deux disques normaux du même type. Puisqu'il y a 7 types de disques normaux par tétraèdre, et  $O(c^2)$  tétraèdres, il y a également  $O(c^2)$  disques normaux extrêmes. Pour chaque type de sommet, l'étoile d'un des sommets de ce type contient nécessairement un tel disque extrême. Comme un disque normal appartient à au plus deux étoiles, cela prouve le lemme.  $\square$

Le nombre potentiellement exponentiel de sommets est donc partitionné en un nombre polynomial de types. De plus, lorsqu'on applique un mouvement de simplification à un sommet, on l'applique en fait également à tous les sommets de même type, comme le montre la proposition suivante.

PROPOSITION 4.4. — *Soit  $D$  une présentation par arcs d'un entrelacs  $L$ . Soit  $S$  une surface  $PL$ -admissible par rapport à la triangulation  $\mathcal{T}$ . Si  $S$  contient  $m$  sommets de degré 2, ou  $m$  sommets de degré 3, tous avec des étoiles normalement parallèles, alors il y a un mouvement de simplification réduisant le nombre de sommets de  $S$  de  $2m$ .*

La preuve consiste simplement à regarder de nouveau les figures 7 et 8 en remplaçant les surfaces par  $m$  surfaces parallèles : il suffit de réaliser un seul mouvement de simplification sur l'entrelacs  $L$  (le même que s'il y avait une seule surface), et l'on peut ensuite isotoper les  $m$  surfaces d'un coup pour faire disparaître  $2m$  sommets de  $S$ .

### 4.3. La fin de la preuve

Il « suffit » maintenant de montrer qu'un nombre important de sommets de  $S$  sont de degré 2 ou 3 du même type : alors la proposition 4.4 permet de les éliminer avec un unique mouvement de simplification. Regardons où nous mène le calcul du lemme 3.1 dans ce nouveau contexte. On sait qu'il n'y a pas de pôle, et la seule différence est donc que les selles peuvent avoir un degré supérieur à 4 ; notons  $s_k$  le nombre de selles de degré  $k$ , et on obtient maintenant  $\sum_k k(v_k + s_k) = \sum_k 4(v_k + s_k) - 8$  et donc  $8 = \sum_k (4 - k)(v_k + s_k)$ . On en déduit que si le nombre de sommets et de selles de degré 4 n'est pas trop grand par rapport au nombre de sommets, alors les sommets de degré 2 ou 3 doivent être nombreux pour compenser. La force de ce calcul s'arrête cependant ici : comme le montre l'exemple d'un cube où l'on subdivise les faces en petits carrés, il est tout à fait possible que l'essentiel des sommets soient de degré 4.

Dans ce cas-là, Lackenby s'intéresse à la *région euclidienne*  $E$  sur la surface  $S$  : celle-ci est définie en prenant l'union de toutes les faces, des arêtes entre celles-ci et des sommets ou selles de degré 4. La région euclidienne peut être équipée de la métrique euclidienne obtenue en considérant les faces comme des carrés. Son bord  $\partial E$  est simplement l'ensemble des sommets et selles de degré différent de 4. Le théorème clé, permettant de borner le nombre de sommets de degré 4, est alors le suivant :

THÉORÈME 4.5. — *Soit  $L$  un entrelacs séparé, présenté par arcs, d'indice d'arcs  $n$  et soit  $S$  une surface normale  $PL$ -admissible et fondamentale, et de complexité minimale parmi celles-ci. Alors tout point de  $E$  est à distance  $\text{poly}(n)$  du bord de  $E$ .*

Admettons pour l’instant ce résultat, et déduisons-en le corollaire suivant.

COROLLAIRE 4.6. — *Le nombre  $v_4$  de sommets de degré 4 est au plus  $poly(c)|\partial E|$ .*

*Démonstration.* — D’après le théorème 4.5, tout point de  $E$  est à distance  $poly(n) = poly(c)$  du bord de  $E$ . Donc  $E \subseteq \bigcup_{x \in \partial E} B(poly(c), x)$ , et donc l’aire de  $E$  est majorée par  $poly(c)|\partial E|$  (où le polynôme a été mis au carré). Comme chaque sommet de degré 4 contribue d’au plus 1 à l’aire de  $E$ , cela prouve le corollaire.  $\square$

Nous avons enfin tous les éléments pour obtenir une borne polynomiale sur le nombre de mouvements de Reidemeister pour séparer un entrelacs.

*Preuve du théorème 0.2.* — Nous avons établi plus haut que  $8 = \sum_k (4 - k)(v_k + s_k)$ , donc

$$2v_2 + v_3 = 8 + \sum_{k>4} (k - 4)v_k + \sum_{k>4} (k - 4)s_k \geq \sum_{k>4} v_k + \sum_{k>4} s_k.$$

De plus, par le corollaire 4.6,

$$\begin{aligned} v_4 &\leq poly(c)|\partial E| \leq poly(c) \left( \sum_{k \neq 4} v_k + \sum_{k>4} s_k \right) \\ \Rightarrow v_2 + v_3 &\geq \frac{v_4}{poly(c)} - \sum_{k>4} v_k - \sum_{k>4} s_k. \end{aligned}$$

En combinant les deux équations, on obtient :

$$\begin{aligned} 5v_2 + 3v_3 &\geq \frac{v_4}{poly(c)} + \sum_{k>4} v_k + \sum_{k>4} s_k \\ \Rightarrow 6v_2 + 4v_3 &\geq \frac{V}{poly(c)} \end{aligned}$$

où  $V$  est le nombre de sommets de  $G$ .

Donc non seulement il y a nécessairement des sommets de degré 2 ou 3, mais il y en a une fraction importante parmi tous les sommets. D’après le lemme 4.3, il n’y a qu’un nombre polynomial de types de sommets de degré 2 ou 3. Donc il y a une collection d’au moins  $V/poly(c)$  sommets de degré 2 ou 3, tous de même type. On applique maintenant la proposition 4.4 qui permet de réduire la complexité de  $S$  de  $V/poly(c)$  avec un seul mouvement de simplification. En renormalisant la surface  $S$  à chaque fois si nécessaire, on peut répéter cette simplification jusqu’à obtenir la sphère triviale. Rappelons enfin qu’initialement, le nombre de sommets  $V$  est en  $2^{poly(c)}$  par le théorème 1.4. En notant  $x$  le nombre de mouvements de simplifications à effectuer pour obtenir un diagramme séparé, nous avons donc :

$$2^{poly(c)} \left( 1 - \frac{1}{poly(c)} \right)^{x-1} \geq 1.$$

On obtient  $x \leq \text{poly}(c)$ , ce qui conclut la preuve puisqu'un mouvement de simplification utilise un nombre polynomial de mouvements de Reidemeister.  $\square$

#### 4.4. Borner la taille de la région euclidienne

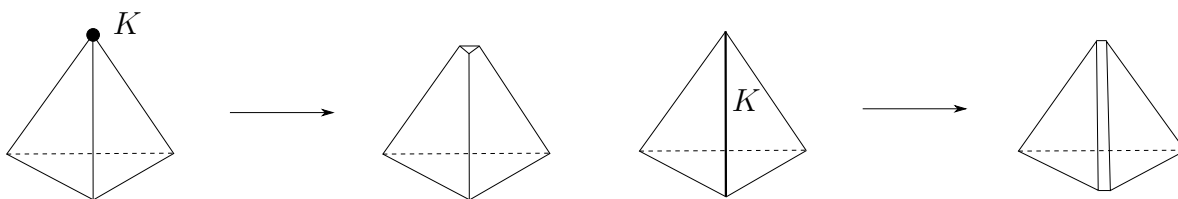
Il reste à démontrer le théorème 4.5, mais la preuve est très technique et dépasse les ambitions de cet exposé. Nous nous contenterons d'en raconter certains points saillants et renvoyons à l'excellente exposition de Lackenby [Lac15, sections 8 et 9] pour plus de détails.

- Supposons que  $E$  contienne un point très éloigné de son bord. Alors, autour de ce point, il y a une large région euclidienne  $E$ . La taille de la triangulation de Dynnikov étant polynomiale, si *large* signifie plus grand que ce polynôme, alors  $E$  « revient sur elle-même », c'est-à-dire qu'elle contient des disques normaux parallèles. Lorsque un point revient sur lui-même, cela permet de définir une application de *premier retour*, envoyant un point sur le même point sur le premier disque parallèle. La stratégie est de montrer que lorsque la région euclidienne est large, les coordonnées normales d'un de ses sous-ensembles décrivent un tore, ce qui contredit l'hypothèse que la surface  $S$  est fondamentale (modulo la remarque 1.7).
- Pour ce faire, Lackenby utilise des *surfaces branchées*, qui sont les 2-complexes obtenus en identifiant tous les disques normaux parallèles dans les divers simplexes. Cela permet de donner un sens géométrique au tore que l'on cherche : il s'agit de le trouver comme un sous-complexe de la surface de branchement induite par  $S$ .
- On montre d'abord que si  $E$  contient une large région sans bord, elle contient en fait une grande sous-région où tous les points reviennent sur eux-mêmes (et donc l'application de premier retour est définie). Cet argument utilise de manière essentielle le fait que  $S$  soit une surface normale fondamentale.
- Enfin, on observe que l'application de premier retour est covariante par translation sur cette grande sous-région. Cela permet de trouver un segment qui revient sur lui-même, formant un cylindre, et même un cylindre où les deux bords sont identifiés par l'application de premier retour, ce qui donne un tore.

## 5. DE L'ENTRELACS SÉPARÉ AU NŒUD TRIVIAL

Concluons cet exposé par quelques mots sur les changements à effectuer pour traiter le cas d'un nœud trivial  $L$  au lieu d'un entrelacs séparé. L'approche générale est identique, mais la surface caractéristique  $S$  devient un disque au lieu d'une sphère, et la présence de ce bord induit un certain nombre de difficultés techniques.

Un problème essentiel est que les surfaces normales par rapport à la triangulation de Dynnikov sont par essence disjointes ou transverses à  $L$ , alors que la surface caractéristique est un disque qui a ce nœud pour bord. Pour concilier les deux, on modifie donc la triangulation en découpant les tétraèdres de sorte à exclure un voisinage de  $L$ , voir la figure 10. Les tétraèdres deviennent alors des tétraèdres tronqués, et Lackenby travaille

FIGURE 10. Les tétraèdres sont tronqués dans un voisinage du nœud  $L$ .

avec des surfaces normales dans ces tétraèdres modifiés. La théorie reste globalement la même, mais les constantes explosent (au lieu de 7, il y a maintenant  $10^6$  types de disques fondamentaux dans un tétraèdre tronqué). Le nœud  $L$  est isotope à une certaine courbe  $C$  de complexité polynomiale qui est sur le bord de cette triangulation tronquée et transverse à son 1-squelette : cette courbe sera le bord de la surface caractéristique  $S$ . Un problème est que les disques normaux ne sont maintenant plus des triangles ou des quadrilatères, et si on peut les réaliser de façon linéaire par morceaux, cette réalisation n'est pas simple. En particulier, on peut maintenant trouver les selles généralisées du paragraphe 3 à l'intérieur d'un disque normal lorsque celui-ci touche le bord. C'est la source de nombreuses complications, par exemple le lemme 4.2 n'est plus vrai et il peut y avoir des pôles sur  $S$ .

Mais l'observation clé est que les pathologies n'ont lieu que sur ou près du bord, qui a une complexité polynomiale. Ainsi, les selles intérieures aux faces, tout comme les pôles et de nombreuses autres pathologies ne sont également qu'en nombre polynomial. Similairement, la région euclidienne de la section 4.3 devient trop pathologique près du bord et il convient de l'arrêter avant, mais par le même argument, elle reste suffisamment large. Son bord peut maintenant avoir dimension 1 et n'être plus une union disjointe de sommets, mais cela change peu les arguments qui la concernent, notamment pas la preuve du théorème 4.5.

Ces bornes polynomiales permettent d'effectuer un calcul similaire à celui de la section 4.3 et de conclure que si  $S$  a une grande complexité, alors les sommets de degré 2 ou 3 (non pathologiques) occupent une fraction importante du nombre total de sommets. On peut alors les supprimer et recommencer un nombre polynomial de fois, jusqu'à ce que la complexité du disque soit polynomiale.

Mais il est nécessaire de s'arrêter là : il est possible que tout ce qui reste soit pathologique. Pour finir, on observe que le disque PL-admissible de complexité polynomiale que l'on a atteint peut être modifié pour donner un disque admissible lisse au sens de Dynnikov (comme au paragraphe 3.1) de complexité polynomiale – à ceci près que dans la définition d'une surface caractéristique admissible, il faut maintenant aussi contrôler ce qu'il se passe sur le bord. En effet, il est nécessaire d'autoriser la surface à avoir des selles sur le bord, ainsi qu'un *sommet d'enroulement*, qui est un point de  $\partial S \cap S_\varphi^1$  autour duquel le disque décrit un angle supérieur à  $2\pi$ .

La complexité du disque étant polynomiale, l'approche de la section 3 sera maintenant assez puissante pour montrer qu'il suffit d'un nombre additionnel polynomial

de mouvements pour conclure. Mais les selles sur le bord et le sommet d'enroulement causent des complications et il est nécessaire d'utiliser non seulement les mouvements de simplification que nous avons introduits en section 3, mais aussi d'autres sur le bord. Chacun de ces mouvements réduisant la complexité du disque, il suffit ensuite d'en effectuer un nombre polynomial pour arriver, enfin, au nœud trivial.

○

## RÉFÉRENCES

- [BM92] J. BIRMAN & W. MENASCO – « Studying links via closed braids. I : A finiteness theorem », *Pacific Journal of Mathematics* **154** (1992), no. 1, p. 17–36.
- [BM94] J. S. BIRMAN & W. W. MENASCO – « Special positions for essential tori in link complements », *Topology* **33** (1994), no. 3, p. 525–556.
- [BM11] M. BOUSQUET-MÉLOU – « Counting planar maps, coloured or uncoloured », in *23rd British Combinatorial Conference*, vol. 392, 2011, p. 1–50.
- [BO12] B. A. BURTON & M. OZLEN – « A fast branching algorithm for unknot recognition with experimental polynomial-time behaviour », *Mathematical Programming* (2012), to appear.
- [Cro95] P. R. CROMWELL – « Embedding knots and links in an open book I : Basic properties », *Topology and its Applications* **64** (1995), no. 1, p. 37–58.
- [Dyn06] I. A. DYNNIKOV – « Arc-presentations of links : Monotonic simplification », *Fundamenta Mathematicae* **190** (2006), no. 1, p. 29–76 (eng).
- [Gab83] D. GABAI – « Foliations and the topology of 3-manifolds », *Bulletin of the American Mathematical Society* **8** (1983), no. 1, p. 77–80.
- [Hak61] W. HAKEN – « Theorie der Normalflächen, ein Isotopiekriterium für den Kreisnoten », *Acta Mathematica* **105** (1961), p. 245–375.
- [Hay05] C. HAYASHI – « The number of Reidemeister moves for splitting a link », *Mathematische Annalen* **332** (2005), no. 2, p. 239–252.
- [HL01] J. HASS & J. LAGARIAS – « The number of Reidemeister moves needed for unknotting », *Journal of the American Mathematical Society* **14** (2001), no. 2, p. 399–428.
- [HLP99] J. HASS, J. C. LAGARIAS & N. PIPPENGER – « The computational complexity of knot and link problems », *Journal of the ACM* **46** (1999), no. 2, p. 185–211.
- [HN10] J. HASS & T. NOWIK – « Unknot diagrams requiring a quadratic number of Reidemeister moves to untangle », *Discrete & Computational Geometry* **44** (2010), no. 1, p. 91–95.

- [HST03] J. HASS, J. SNOEYINK & W. P. THURSTON – « The size of spanning disks for polygonal curves », *Discrete and Computational Geometry* **29** (2003), no. 1, p. 1–18.
- [JT95] W. JACO & J. L. TOLLEFSON – « Algorithms for the complete decomposition of a closed 3-manifold », *Illinois J. Math* **39** (1995), no. 3, p. 358–406.
- [KL14] L. H. KAUFFMAN & S. LAMBROPOULOU – « Hard unknots and collapsing tangles », in *Introductory Lectures on Knot Theory*, 2014.
- [Kne29] H. KNESER – « Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten », *Jahresbericht Math. Verein.* **28** (1929), p. 248–260.
- [Lac14] M. LACKENBY – « Elementary knot theory », To be published by the Clay Mathematics Institute, 2014.
- [Lac15] M. LACKENBY – « A polynomial upper bound on Reidemeister moves. », *Ann. Math. (2)* **182** (2015), no. 2, p. 491–564.
- [Lac16a] M. LACKENBY – « The efficient certification of knottedness and Thurston norm », *arXiv :1604.00290* (2016).
- [Lac16b] ———, « Some conditionally hard problems on links and 3-manifolds », *arXiv :1602.08427* (2016).
- [Mat07] S. V. MATVEEV – *Algorithmic topology and classification of 3-manifolds*, vol. 9, Springer, 2007.
- [Mat11] MATHOVERFLOW – « Are there any very hard unknots? », <http://mathoverflow.net/questions/53471/are-there-any-very-hard-unknots>, 2011.
- [Sto84] J. A. STORER – « On minimal-node-cost planar embeddings », *Networks* **14** (1984), no. 2, p. 181–212.
- [Thu86] W. P. THURSTON – « A norm for the homology of 3-manifolds », *Memoirs of the American Mathematical Society* **59** (1986), no. 339, p. 99–130.

Arnaud de MESMAY

CNRS, Gipsa-Lab

11 rue des Mathématiques

Grenoble Campus, BP 46

F-38402 Saint Martin d'Hères Cedex

*E-mail* : [arnaud.de-mesmay@gipsa-lab.fr](mailto:arnaud.de-mesmay@gipsa-lab.fr)