

L'INÉGALITÉ DE CORRÉLATION GAUSSIENNE [d'après Thomas Royen]

par Franck BARTHE

INTRODUCTION

Les mesures gaussiennes jouent un rôle « central » en théorie des probabilités. Leurs propriétés géométriques et analytiques ont été largement étudiées, et mises en application dans des domaines variés (théorie des processus, statistiques, géométrie des espaces de Banach, théorie des algorithmes,...). De nombreuses techniques sont maintenant disponibles pour les établir (symétrisation d'Ehrhard, interpolation par le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck, formules issues du calcul stochastique, transport optimal, entre autres), mais elles semblent plus efficaces pour les propriétés qui font intervenir tous les ensembles mesurables, comme l'isopérimétrie gaussienne. Elles n'ont pas permis, jusqu'à présent, d'établir la célèbre conjecture de corrélation gaussienne, qui fait intervenir des ensembles convexes symétriques. La conjecture est devenue un théorème en 2014, grâce au travail remarquable de Royen :

THÉORÈME 0.1 ([R3]). — *Soit $n \geq 1$. Soit γ une mesure de probabilité gaussienne sur \mathbb{R}^n , de moyenne 0. Pour tous les sous-ensembles $A, B \subset \mathbb{R}^n$ convexes et symétriques par rapport à l'origine, on a*

$$(1) \quad \gamma(A \cap B) \geq \gamma(A)\gamma(B).$$

Royen prouve en fait un résultat pour la famille plus vaste des lois gamma multivariées au sens de Krishnamoorthy et Parthasarathy. Même dans le cas particulier gaussien, sa démonstration utilise de manière astucieuse les propriétés de ces lois (et s'adresse à des lecteurs qui en sont spécialistes). Latała et Matlak [L-M] ont écrit une version auto-contenue et détaillée de l'argument de Royen dans le cas des mesures gaussiennes.

1. FORMULATIONS ÉQUIVALENTES ET BREF HISTORIQUE

En jouant sur les transformations linéaires, on peut donner des formulations équivalentes de la corrélation gaussienne, formellement plus faibles, et ce de deux manières.

Comme toute mesure gaussienne centrée sur \mathbb{R}^n est image linéaire de la mesure gaussienne standard de dimension n ,

$$\gamma_n(dx) = e^{-|x|^2/2} \frac{dx}{(2\pi)^{n/2}},$$

le théorème 0.1 revient à

$$\gamma_n(A \cap B) \geq \gamma_n(A)\gamma_n(B)$$

pour tous les convexes symétriques de \mathbb{R}^n . Cet énoncé a souvent été formulé en termes fonctionnels, afin d'introduire des techniques analytiques. Toute fonction mesurable $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{A_t}(x) dt,$$

où les $A_t := \{y \in \mathbb{R}; f(y) \geq t\}$ sont les ensembles de niveaux de f . On dit que f est quasi-concave si ses ensembles de niveau sont tous convexes. On obtient la formulation suivante de la corrélation gaussienne :

THÉORÈME 1.1. — *Soit $n \geq 1$. Soient $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ des fonctions paires et quasi-concaves. Alors*

$$\int fg d\gamma_n \geq \int f d\gamma_n \int g d\gamma_n.$$

Dans une autre direction, on peut conserver une mesure gaussienne générale sur \mathbb{R}^d et simplifier les ensembles convexes à traiter. Par approximation, il suffit de considérer des polytopes convexes symétriques, qui sont des intersections de bandes symétriques

$$A = \bigcap_{i=1}^{n_1} \{x \in \mathbb{R}^d; |\langle x, u_i \rangle| \leq t_i\}, \quad B = \bigcap_{i=1+n_1}^n \{x \in \mathbb{R}^d; |\langle x, u_i \rangle| \leq t_i\},$$

pour n entier, des $t_i \geq 0$ et des vecteurs unitaires $u_i \in \mathbb{R}^d$. Si Y est un vecteur aléatoire sur \mathbb{R}^d de loi gaussienne γ , l'inégalité $\gamma(A \cap B) \geq \gamma(A)\gamma(B)$ revient à

$$\mathbb{P}(\forall i, |\langle Y, u_i \rangle| \leq t_i) \geq \mathbb{P}(\forall i \leq n_1, |\langle Y, u_i \rangle| \leq t_i) \mathbb{P}(\forall i > n_1, |\langle Y, u_i \rangle| \leq t_i),$$

où l'on a sous-entendu la condition $i \in \{1, \dots, n\}$. Si $t_i \neq 0$, on définit $X_i = \langle Y, u_i \rangle / t_i$. Si $t_i = 0$, comme $\langle Y, u_i \rangle$ est une variables aléatoire gaussienne centrée, $\mathbb{P}(|\langle Y, u_i \rangle| = 0) = 0$ peut seulement valoir 0 ou 1. Dans le premier cas l'inégalité de corrélation est évidente, dans le second on peut enlever la condition toujours vraie. On obtient ainsi un vecteur gaussien X . En réécrivant l'inégalité précédente en fonction de X on arrive à une autre formulation équivalente du théorème 0.1 :

THÉORÈME 1.2. — *Soient $n \geq n_1 \geq 1$ des entiers et $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur gaussien centré (i.e. d'espérance nulle) à valeurs dans \mathbb{R}^n . Alors*

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n} |X_i| \leq 1\right) \geq \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n_1} |X_i| \leq 1\right) \mathbb{P}\left(\max_{n_1 < i \leq n} |X_i| \leq 1\right).$$

D'après [DG], l'histoire de ce problème remonte à un article de Dunnett et Sobel datant de 1955 [D-S]. Elle a été marquée par les travaux indépendants de Khatri [K] et Šidák [S] en 1967, qui établissent le théorème 1.2 lorsque $n_1 = 1$, ce qui revient à (1) lorsque l'un des convexes est une bande symétrique de la forme $\{x; |\langle x, u \rangle| \leq 1\}$. En 1977, Pitt [P] a démontré l'inégalité de corrélation (1) en dimension 2, voir [B] pour une extension. Une étape importante vers la confirmation de la conjecture est franchie dans l'article de Schechtman, Schlumprecht et Zinn [S-S-Z], qui établit (1) pour les couples d'ellipsoïdes, et pour les ensembles contenus dans la boule centrée à l'origine et de rayon $c\sqrt{n}$ pour une certaine constante c . Plus récemment, des progrès substantiels ont été effectués par Hargé : il a établi (1) lorsqu'un seul des convexes est un ellipsoïde [H1], puis il a montré une inégalité de corrélation négative entre une fonction paire convexe et une fonction paire log-concave, ce qui est un cas limite du théorème 1.1 lorsque l'une des fonctions est une perturbation d'une constante [H2]. On pourrait citer bien d'autres travaux, dont certains ont exploré l'affaiblissement des hypothèses (mesures non gaussiennes, ensembles non convexes, notions de centrage plus faibles que la symétrie par rapport à 0) ou ont proposé des versions « à constante près » de l'inégalité de corrélation, comme [Sh] qui présente des applications aux probabilités de petites boules pour les mouvements browniens fractionnaires.

2. PRÉLIMINAIRES

2.1. Notations

Même si ce n'est pas indispensable, il est commode de munir \mathbb{R}^n du produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La norme euclidienne est notée $|\cdot|$. On notera $\mathbb{R}_+^n := [0, +\infty[^n$. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note $[m]$ l'ensemble $\{1, \dots, m\}$. Si S est un ensemble fini $|S|$ représente son cardinal. Si $x \in \mathbb{R}^n$ et $S \subset [n]$, on pose $x_S = (x_i)_{i \in S}$. On note $M_{m,n}$ l'ensemble des matrices réelles à m lignes et n colonnes. Si $A \in M_{m,n}$ et $S \subset [m]$ et $T \subset [n]$, $A_{S,T}$ désigne la sous-matrice $(a_{i,j})_{i \in S, j \in T}$. Lorsque $A \in M_n := M_{n,n}$ est une matrice carrée, on note (encore!) $|A|$ pour son déterminant. De plus, si $S \subset [n]$, on note simplement A_S la sous-matrice carrée $A_{S,S} = (a_{i,j})_{i,j \in S}$. Si $x \in \mathbb{R}^n$, $\text{diag}(x) = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$ est la matrice diagonale associée. On note A^* la transposée de la matrice A . Enfin $A > 0$ signifie que A est une matrice symétrique définie positive. On note $A \geq 0$ si elle est seulement (semi-définie) positive ; \sqrt{A} désigne alors son unique racine carrée positive. Enfin la matrice identité de taille n est notée I_n .

2.2. Mesures gaussiennes

Les mesures de probabilités gaussiennes sur \mathbb{R} sont notées $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+$. Lorsque $\sigma > 0$, ces mesures sont à densité

$$\mathcal{N}(m, \sigma^2)(dt) = e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} \frac{dt}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

De plus $\mathcal{N}(m, 0)$ est la masse de Dirac en m . Une mesure sur \mathbb{R}^n est dite gaussienne si ses images par toutes les formes linéaires sont des mesures gaussiennes sur \mathbb{R} . Elles sont caractérisées par leur espérance $m \in \mathbb{R}^n$ et leur matrice de covariance $C \geq 0$, $C \in M_n$. On les note logiquement $\mathcal{N}_n(m, C)$. Si G_1, \dots, G_n sont des variables aléatoires réelles indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, alors le vecteur $G = (G_1, \dots, G_n)$ suit la loi $\mathcal{N}_n(0, I_n)$ que nous avons déjà notée γ_n . Pour $m \in \mathbb{R}^n$ et $C \in M_n$ positive, le vecteur $m + \sqrt{C}G$ suit la loi $\mathcal{N}_n(m, C)$. Lorsque $C > 0$ cette loi est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$\mathcal{N}_n(m, C)(dx) = e^{-\frac{1}{2}\langle x-m, C^{-1}(x-m) \rangle} \frac{dx}{(2\pi)^{n/2}|C|^{1/2}}.$$

L'inégalité de corrélation gaussienne fait intervenir des vecteurs centrés, i.e. $m = 0$.

2.3. Quelques transformées de Laplace utiles

Dans sa preuve, Royen ne travaille avec les lois de probabilités que par l'intermédiaire de leur transformée de Laplace et tire habilement parti de leur forme simple. Comme l'énoncé que l'on cherche à prouver (le théorème 1.2) ne fait intervenir que les variables positives $|X_i|$, on va définir, pour une mesure μ sur \mathbb{R}_+^n , sa transformée de Laplace par

$$L_\mu(\lambda) = \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-\langle \lambda, x \rangle} \mu(dx), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^n.$$

Ainsi elle prend toujours des valeurs finies pour les mesures de probabilité. On étendra la définition aux mesures signées. Si X est un vecteur à valeurs dans \mathbb{R}_+^n , on définit sa transformée de Laplace comme celle de sa loi \mathbb{P}_X , ce qui revient à $L_X(\lambda) = \mathbb{E}e^{-\langle \lambda, X \rangle}$. Il est connu que dès que la transformée de Laplace d'une mesure (finie ou signée) est finie sur un ouvert, la donnée de ses valeurs sur l'ouvert caractérise la mesure. Commençons par calculer la transformée des « carrés » de vecteurs gaussiens centrés.

LEMME 2.1. — *Soit X un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}_n(0, C)$, et $Z = (\frac{X_1^2}{2}, \dots, \frac{X_n^2}{2})$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$,*

$$L_Z(\lambda) = |I_n + \Lambda C|^{-1/2},$$

où $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Si $C > 0$, la loi de Z est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}_+^n .

PREUVE — Soit G de loi $\mathcal{N}_n(0, I_n)$. On utilise que X a même loi que $\sqrt{C}G$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp \left(- \sum_{i \leq n} \lambda_i \frac{X_i^2}{2} \right) &= \mathbb{E} \exp \left(- \frac{1}{2} \langle \Lambda X, X \rangle \right) = \mathbb{E} \exp \left(- \frac{1}{2} \langle \Lambda \sqrt{C} G, \sqrt{C} G \rangle \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left(- \frac{1}{2} \langle \sqrt{C} \Lambda \sqrt{C} x, x \rangle - \frac{1}{2} \langle x, x \rangle \right) \frac{dx}{(2\pi)^{n/2}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left(- \frac{1}{2} \langle M x, x \rangle \right) \frac{dx}{(2\pi)^{n/2}}, \end{aligned}$$

où $M := I_n + \sqrt{C}\Lambda\sqrt{C} > 0$. En effectuant le changement de variables $y = \sqrt{M}x$, on obtient

$$L_Z(\lambda) = |\sqrt{M}|^{-1} = |I_n + \sqrt{C}\Lambda\sqrt{C}|^{-1/2} = |I_n + \Lambda C|^{-1/2},$$

en utilisant en dernier lieu que pour des matrices carrées A, B de même taille, AB et BA ont même polynôme caractéristique.

Si $C > 0$, la loi de X est à densité. On en déduit la densité de Z en découpant \mathbb{R}^n en 2^n orthants. Sur chacun d'eux, les coordonnées sont de signe constant, et le changement de variables $x_i^2/2 = z_i$ est bijectif. On obtient que

$$\mathbb{P}_Z(dz) = \mathbf{1}_{]0, +\infty[^n}(z) \frac{|C|^{-1/2} (4\pi)^{-n/2}}{\prod_{i \leq n} \sqrt{z_i}} \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} \exp(-\langle C^{-1}(\varepsilon \cdot \sqrt{z}), (\varepsilon \cdot \sqrt{z}) \rangle) dz,$$

où $\varepsilon \cdot \sqrt{z} = (\varepsilon_i \sqrt{z_i})_{i=1}^n$. □

Nous aurons besoin d'identifier d'autres transformées de Laplace qui sont liées à la précédente.

LEMME 2.2. — Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $C \geq 0$ une matrice de taille n . Alors il existe une mesure de probabilité μ sur \mathbb{R}_+^n telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$,

$$L_\mu(\lambda) = |I_n + \Lambda C|^{-k/2},$$

où $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Si $C > 0$ alors μ est à densité sur \mathbb{R}_+^n , $\mu(dz) = h(z)dz$. De plus, lorsque $k \geq 3$, on a pour tout ensemble $S \subset [n]$ les propriétés suivantes

1. La dérivée « diagonale » $\frac{\partial^{|S|}}{\partial x_S} h$ existe sur $]0, +\infty[^n$ et appartient à $L^1(\mathbb{R}_+^n)$.
2. Si $i \in [n] \setminus S$, alors $\lim_{x_i \rightarrow 0^+} \frac{\partial^{|S|}}{\partial x_S} h(x) = 0$.
3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$, la transformée de Laplace de la dérivée diagonale vaut

$$L_{\frac{\partial^{|S|}}{\partial x_S} h}(\lambda) = |I_n + \Lambda C|^{-k/2} \prod_{i \in S} \lambda_i.$$

PREUVE (esquisse) — Lorsque $k = 1$ la loi du vecteur Z étudié dans le lemme précédent convient. Pour $k \geq 2$, il suffit de considérer des copies indépendantes Z_1, \dots, Z_k de Z . Par indépendance, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$,

$$L_{Z_1 + \dots + Z_k}(\lambda) = \mathbb{E} \prod_{i=1}^k e^{-\langle \lambda, Z_i \rangle} = \prod_{i=1}^k L_{Z_i}(\lambda) = |I_n + \Lambda C|^{-k/2}.$$

Lorsque $C > 0$ la loi de Z est à densité sur \mathbb{R}_+^n . La loi de $Z_1 + \dots + Z_k$ est donc encore à densité sur \mathbb{R}_+^n , donnée par la puissance de convolution d'ordre k de la densité de \mathbb{P}_Z .

Lorsque $k \geq 3$, le point 3) revient à

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i} \frac{\partial^{|S|}}{\partial x_S} h(x) dx = \prod_{i \in S} \lambda_i \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i} h(x) dx.$$

Ceci se démontre par intégrations par parties successives par rapport aux variables x_i pour $i \in S$. L'absence de terme de bord dans l'intégration par parties provient du point 2) pour le bord en 0 et du point 1) pour le bord en $+\infty$. En principe nous avons à ce stade assez d'information sur h pour montrer directement les points 1) et 2). Nous présenterons plus loin une preuve conceptuelle, qui requiert un cadre plus large. Terminons cependant en expliquant heuristiquement le rôle de la condition $k \geq 3$: en utilisant $C \geq \varepsilon I_n$ pour un $\varepsilon > 0$, on obtient

$$\left| L_{\frac{\partial |S|}{\partial x_S} h}(\lambda) \right| = |I_n + \Lambda C|^{-k/2} \prod_{j \in S} \lambda_j \leq \prod_{j=1}^n (1 + \varepsilon \lambda_j)^{-k/2} \prod_{j \in S} \lambda_j.$$

Donc si $i \notin S$ et $k > 2$, on obtient $\lim_{\lambda_i \rightarrow +\infty} \lambda_i L_{\frac{\partial |S|}{\partial x_S} h}(\lambda) = 0$. En exploitant le principe « de la valeur initiale » (qui dit en dimension 1 que $\lim_{p \rightarrow +\infty} p L_f(p) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$), on peut se convaincre du point 2). \square

3. DÉMONSTRATION DE L'INÉGALITÉ GAUSSIENNE

3.1. Interpolation

Une approche classique de l'inégalité de corrélation consiste à interpoler entre les termes sur la formulation donnée dans le théorème 1.1 : on écrit

$$\int f g d\gamma_n = \mathbb{E} f(X_1) g(Y_1) \quad \text{et} \quad \left(\int f d\gamma_n \right) \left(\int g d\gamma_n \right) = \mathbb{E} f(X_0) g(Y_0),$$

avec des vecteurs gaussiens de lois

$$\mathbb{P}_{(X_1, Y_1)} = \mathcal{N}_{2n} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}, \quad \mathbb{P}_{(X_0, Y_0)} = \mathcal{N}_{2n} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

On peut alors faire varier continûment les termes non diagonaux de la covariance entre ces deux cas extrêmes et étudier le sens de variation de l'espérance, ce qui revient à appliquer le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck à une des fonctions.

Royen applique une approche par interpolation sur la formulation donnée dans le théorème 1.2. La principale nouveauté de sa démarche réside dans sa manière de contrôler le signe des termes qui apparaissent après dérivation. L'énoncé suivant dégage son argument d'interpolation :

PROPOSITION 3.1. — *Soit $C : [0, 1] \rightarrow M_n$ une application de classe \mathcal{C}^1 telle que $\forall t, C(t) > 0$. Pour chaque t , on considère un vecteur gaussien $X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$ de loi $\mathcal{N}_n(0, C(t))$.*

Si pour tout $S \subset [n]$ non vide, l'application $t \mapsto |C(t)_S|$ est décroissante, alors

$$\mathbb{P} \left(\max_{i \leq n} |X_i(1)| \leq 1 \right) \geq \mathbb{P} \left(\max_{i \leq n} |X_i(0)| \leq 1 \right).$$

PREUVE — Définissons $Z(t) = (X_i(t)^2/2)_{i=1}^n$. Le lemme 2.1 nous renseigne sur ses propriétés. Notons $f(t, \cdot)$ la densité de la loi de $Z(t)$, et considérons le cube $Q := [0, 1/2]^n$. Notre but est de montrer la croissance de la fonction φ définie sur $[0, 1]$ par

$$\varphi(t) := \mathbb{P}\left(\max_{i \leq n} |X_i(t)| \leq 1\right) = \mathbb{P}(Z(t) \in Q) = \int_Q f(t, x) dx,$$

en montrant que sa dérivée est positive.

On peut dériver sous le signe somme (la formule explicite de $f(t, \cdot)$ et l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout t , $\varepsilon I_n \leq C(t) \leq \varepsilon^{-1} I_n$ permettent de voir que $g(x) := \sup_{t \in [0, 1]} |\frac{\partial}{\partial t} f(t, x)|$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^n , voir [L-M]) :

$$\varphi'(t) = \int_Q \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) dx.$$

Pour identifier la fonction $x \mapsto \frac{\partial}{\partial t} f(t, x)$, Royen n'utilise pas la formule explicite directement ; il passe par les transformées de Laplace : pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-\langle \lambda, x \rangle} \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) dx &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-\langle \lambda, x \rangle} f(t, x) dx = \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E} e^{-\langle \lambda, Z(t) \rangle} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (|I_n + \Lambda C(t)|^{-1/2}) \end{aligned}$$

où $\Lambda = \text{diag}(\lambda)$, d'après le lemme 2.1. En utilisant la multilinéarité du déterminant, on a

$$|I_n + \Lambda C(t)| = 1 + \sum_{\emptyset \neq S \subset [n]} |(\Lambda C(t))_S| = 1 + \sum_{\emptyset \neq S \subset [n]} |C(t)_S| \prod_{i \in S} \lambda_i.$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-\langle \lambda, x \rangle} \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) dx = -\frac{1}{2} |I_n + \Lambda C(t)|^{-3/2} \sum_{\emptyset \neq S \subset [n]} \frac{\partial}{\partial t} |C(t)_S| \prod_{i \in S} \lambda_i.$$

Par le lemme 2.2 appliqué pour $k = 3$, il existe une densité de probabilité sur \mathbb{R}_+^n , que nous notons ici h_t , dont la transformée de Laplace vaut $|I_n + \Lambda C(t)|^{-3/2}$. Le point 3) du lemme 2.2 nous permet d'identifier l'expression précédente comme la transformée de Laplace de la fonction

$$k_t := -\frac{1}{2} \sum_{\emptyset \neq S \subset [n]} \frac{\partial}{\partial t} |C(t)_S| \frac{\partial^{|S|}}{\partial x_S} h_t.$$

Par injectivité de la transformée de Laplace, on obtient que $\frac{\partial}{\partial t} f(t, x) = k_t(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}_+^n$. Cette expression non triviale va permettre de montrer la positivité de

$$\varphi'(t) = \int_Q \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) dx = \sum_{\emptyset \neq S \subset [n]} \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |C(t)_S| \right] \int_Q \frac{\partial^{|S|}}{\partial x_S} h_t.$$

Par hypothèse les termes entre crochets sont positifs. Les intégrales sont aussi positives, en effet

$$\int_{[0,1/2]^n} \frac{\partial^{|S|}}{\partial x_S} h_t = \int_{[0,1/2]^{S^c}} h_t \circ J_S \geq 0,$$

où pour $y = (y_i)_{i \in S^c}$, $J_S(y)$ est le vecteur de \mathbb{R}^n donc la i -ème coordonnée vaut y_i si $i \in S^c$ et $1/2$ si $i \in S$. Ceci se voit facilement en intégrant d'abord sur les variables x_i pour $i \in S$: si pour fixer les idées $1 \in S$, en posant $T := S \setminus \{1\}$,

$$\begin{aligned} \int_{[0,1/2]} \frac{\partial^{|S|}}{\partial x_S} h_t(x) dx_1 &= \int_{[0,1/2]} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial^{|T|}}{\partial x_T} h_t(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \\ &= \frac{\partial^{|T|}}{\partial x_T} h_t(1/2, x_2, \dots, x_n) - \lim_{x_1 \rightarrow 0^+} \frac{\partial^{|T|}}{\partial x_T} h_t(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^{|T|}}{\partial x_T} h_t(1/2, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

en invoquant le point 2) du lemme 2.2. \square

3.2. Preuve du théorème 1.2

Soient $n \geq n_1 \geq 1$ et X un vecteur gaussien centré sur \mathbb{R}^n . Notons sa loi $\mathcal{N}_n(0, C)$. Tout d'abord, on remarque qu'il suffit de traiter le cas où la covariance C est définie positive. En effet, lorsque k tend vers l'infini, la loi $\mathcal{N}_n(0, C + \frac{1}{k}I_n)$ converge étroitement vers $\mathcal{N}_n(0, C)$; de plus comme $\mathbb{P}(|X_i| = 1) = 0$ le bord des ensembles convexes considérés n'est pas chargé par la mesure limite, donc la convergence étroite assure la convergence de leurs mesures.

Notons $N_1 = [n_1] = \{1, \dots, n_1\}$ et $N_2 = \{1 + n_1, \dots, n\}$. Pour $t \in [0, 1]$, soit $X(t)$ un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}_n(0, C(t))$ où

$$C(t) := \begin{pmatrix} C_{N_1} & tC_{N_1, N_2} \\ tC_{N_2, N_1} & C_{N_2} \end{pmatrix}.$$

On note que $C(1) = C$ donc $X(1)$ a même loi que X . De plus $C(t) > 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ et $C(0)$ correspond à un vecteur dont les deux blocs sont indépendants, et ont chacun même loi que les blocs de X . Ainsi

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n} |X_i(0)| \leq 1\right) = \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq n_1} |X_i| \leq 1\right) \mathbb{P}\left(\max_{n_1 < i \leq n} |X_i| \leq 1\right),$$

donc il nous suffit pour conclure de vérifier les hypothèses de la proposition 3.1. Soit $S \subset [n]$ non vide. En posant $S_i = S \cap N_i$ on obtient l'expression de la sous-matrice

$$C(t)_S = \begin{pmatrix} C_{S_1} & tC_{S_1, S_2} \\ tC_{S_2, S_1} & C_{S_2} \end{pmatrix} > 0.$$

Par le lemme 3.2 ci-dessous, son déterminant se calcule par blocs :

$$|C(t)_S| = |C_{S_1}| |C_{S_2}| \left| I_{|S_1|} - t^2 C_{S_1}^{-1/2} C_{S_1, S_2} C_{S_2}^{-1} C_{S_2, S_1} C_{S_1}^{-1/2} \right|.$$

De plus, pour $t = 1$ le lemme nous assure que $0 \leq C_{S_1}^{-1/2} C_{S_1, S_2} C_{S_2}^{-1} C_{S_2, S_1} C_{S_1}^{-1/2} \leq I_{|S_1|}$, donc cette matrice (diagonalisable) a toutes ses valeurs propres dans $[0, 1]$. On les note

$\lambda_i, i = 1, \dots, |S_1|$. Il s'ensuit que

$$|C(t)_S| = |C_{S_1}| |C_{S_2}| \prod_{i=1}^{|S_1|} (1 - t^2 \lambda_i)$$

est une fonction décroissante de $t \in [0, 1]$. Ceci termine la preuve de l'inégalité de corrélation gaussienne. \square

Nous avons utilisé une version de la formule du déterminant de Schur pour les matrices définies positives :

LEMME 3.2. — Soit $n = n_1 + n_2$ et $A > 0$ une matrice symétrique définie positive de taille n , écrite par blocs $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$ avec $A_{i,j} \in M_{n_i, n_j}$ et $A_{2,1} = A_{1,2}^*$. Alors

$$|A| = |A_{1,1}| |A_{2,2}| \left| I_{n_1} - A_{1,1}^{-1/2} A_{1,2} A_{2,2}^{-1} A_{2,1} A_{1,1}^{-1/2} \right|,$$

et de plus $0 \leq A_{1,1}^{-1/2} A_{1,2} A_{2,2}^{-1} A_{2,1} A_{1,1}^{-1/2} \leq I_{n_1}$.

PREUVE — L'hypothèse $A > 0$ implique $A_{1,1} > 0$ et $A_{2,2} > 0$. La décomposition

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1}^{1/2} & 0 \\ 0 & A_{2,2}^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n_1} & A_{1,1}^{-1/2} A_{1,2} A_{2,2}^{-1/2} \\ A_{2,2}^{-1/2} A_{2,1} A_{1,1}^{-1/2} & I_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1,1}^{1/2} & 0 \\ 0 & A_{2,2}^{1/2} \end{pmatrix}$$

montre qu'il suffit d'établir le lemme pour des matrices $A = \begin{pmatrix} I_{n_1} & B \\ B^* & I_{n_2} \end{pmatrix}$ positives. Dans ce cas, la relation

$$\begin{pmatrix} I_{n_1} & -B \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ -B^* & I_{n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n_1} - BB^* & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}$$

montre que $I_{n_1} - BB^* \geq 0$ et $|A| = |I_{n_1} - BB^*|$. \square

4. LES LOIS GAMMA MULTIVARIÉES

Royen démontre l'inégalité de corrélation dans un cadre plus général que les mesures gaussiennes : celui des lois gamma multivariées. Nous présentons rapidement les bases de ce sujet, auquel Royen a largement contribué. Cette approche générale permet, même dans le cas gaussien, de démontrer de manière rapide les propriétés techniques qui ont été mentionnées à la fin du lemme 2.2.

4.1. Rappels sur les lois gamma univariées

Pour $\alpha > 0$, la loi gamma de paramètre α , notée $\gamma(\alpha)$, est la mesure de probabilité sur \mathbb{R}^+ donnée par

$$\gamma(\alpha)(dx) := e^{-x}x^{\alpha-1}\mathbf{1}_{x>0}\frac{dx}{\Gamma(\alpha)},$$

où Γ est la fonction gamma d'Euler. Un calcul direct donne sa transformée de Laplace :

$$L_{\gamma(\alpha)}(s) = (1+s)^{-\alpha}, \quad s \in \mathbb{R}^+.$$

La forme puissance de ces transformées montre que les lois gamma forment un semi-groupe de convolution $\gamma(\alpha) * \gamma(\beta) = \gamma(\alpha + \beta)$.

Ces lois sont parfois appelées lois gamma *centrées*. Pour comprendre ce terme il faut revenir en arrière : Si g_1, \dots, g_k sont des variables aléatoires réelles indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, alors $\frac{1}{2}(g_1^2 + \dots + g_k^2)$ suit une loi $\gamma(k/2)$, appelée aussi loi du $\mathcal{X}^2(k)$ (pour carrés de vecteur gaussien centré à k degrés de liberté). Notez que ce fait classique est redémontré dans les lemmes 2.1 et 2.2 pour une dimension $n = 1$. Si les g_i suivent la loi gaussienne non centrée $\mathcal{N}(m, 1)$, alors un calcul direct donne la transformée de Laplace de $Z = \frac{1}{2}(g_1^2 + \dots + g_k^2)$:

$$L_Z(s) = (1+s)^{-k/2}e^{-\frac{km^2}{2}\frac{s}{1+s}}, \quad s \in \mathbb{R}^+.$$

Par extension, on peut dire qu'une loi μ sur \mathbb{R} suit une loi gamma *non centrée* de paramètres $\alpha > 0$ et $y > 0$, si pour tout $s \geq 0$

$$(2) \quad L_\mu(s) = (1+s)^{-\alpha}e^{-y\frac{s}{1+s}}.$$

Encore faut-il que de telles lois existent. On peut le montrer par la méthode de Poissonisation : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi (disons sur \mathbb{R}^+), et N une variable indépendante des (X_n) qui suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(y)$, i.e. $\mathbb{P}(N = k) = e^{-y}y^k/(k!)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Alors la variable aléatoire $S := \sum_{1 \leq i \leq N} X_i$ (avec la convention qu'une somme vide est nulle) vérifie pour $s \geq 0$:

$$\begin{aligned} L_S(s) &= \mathbb{P}(N = 0) + \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(N = k) \mathbb{E}e^{-s(X_1 + \dots + X_k)} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-y} \frac{y^k}{k!} L_{X_1}(s)^k = e^{y(L_{X_1}(s)-1)}. \end{aligned}$$

Si l'on choisit les $(X_n)_{n \geq 1}$ de loi $\gamma(1)$ (loi exponentielle $e^{-x}\mathbf{1}_{x>0}dx$), et X_0 de loi $\gamma(\alpha)$ indépendante de N et des $(X_n)_{n \geq 1}$, alors la variable $Z := X_0 + S = \sum_{i=0}^N X_i$ vérifie pour $s \geq 0$

$$L_Z(s) = L_{X_0}(s)e^{y(L_{X_1}(s)-1)} = (1+s)^{-\alpha}e^{y((1+s)^{-1}-1)} = (1+s)^{-\alpha}e^{-y\frac{s}{1+s}}.$$

Ceci montre l'existence des lois gamma décentrées. On peut en simplifier la présentation en notant que la loi conditionnelle de Z sachant $N = k$ est celle de $X_0 + \dots + X_k$, c'est-à-dire $\gamma(\alpha + k)$. Avec des notations très concises $Z \sim \gamma(\alpha + \mathcal{P}(y))$. Ceci permet de donner une description complètement explicite de sa loi :

DÉFINITION 4.1. — Soient $\alpha > 0, x > 0$ et $y \geq 0$. On définit

$$g_\alpha(x, y) := \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-x} \frac{x^{\alpha+k-1}}{\Gamma(\alpha+k)} e^{-y} \frac{y^k}{k!}.$$

Alors la mesure de probabilité $g_\alpha(x, y) \mathbf{1}_{x>0} dx$ est la loi gamma décentrée de paramètres α et y . On la notera ici $\gamma(\alpha, y)$.

On retiendra pour la suite que sa transformée de Laplace est donnée par (2), ainsi que les deux propriétés suivantes, qui sont faciles à vérifier sur la formule :

$$(3) \quad \forall x > 0, g_\alpha(x, y) \leq 2x^{\alpha-1}(1+x) \quad \text{et, si } \alpha > 1, \quad \frac{\partial}{\partial x} g_\alpha = g_{\alpha-1} - g_\alpha.$$

4.2. Un détour par les matrices aléatoires

Soit $C \in M_n$ une matrice symétrique positive $C \geq 0$ et $\alpha > 0$. On dit qu'une matrice aléatoire M à valeurs dans les matrices symétriques de taille n suit la loi de Wishart $W_n(\alpha, C)$ si sa transformée de Laplace (matricielle) est donnée par la formule

$$\mathbb{E} e^{-\text{Tr}(\Lambda M)} = |I_n + \Lambda C|^{-\alpha},$$

pour toute matrice $\Lambda \geq 0$ dans M_n .

Par un théorème de Gyndikin, ces lois existent pour $\alpha \in \frac{1}{2}\mathbb{N}^* \cap]\frac{n-1}{2}, +\infty[$. Le cas des indices demi-entiers est très classique : on considère des vecteurs aléatoires Z_1, \dots, Z_k indépendants et de même de loi $\mathcal{N}_n(0, C)$. Alors si l'on voit les vecteurs de \mathbb{R}^n comme des matrices colonnes,

$$M := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k Z_i Z_i^*$$

est de loi $W_n(\frac{k}{2}, C)$. On le vérifie par un calcul analogue à ceux des lemmes 2.1 et 2.2.

4.3. Lois gamma multidimensionnelles

Il existe plusieurs notions différentes de loi gamma multivariées, voir e.g. [K-B-J]. Celle de Krishnamoorthy et Parthasarathy [K-P] est basée sur une formule de transformée de Laplace qui étend naturellement celle du cas univarié.

DÉFINITION 4.2. — Soit $C \in M_n$ une matrice symétrique positive $C \geq 0$ et $\alpha > 0$. On dit qu'un vecteur aléatoire X à valeurs dans \mathbb{R}^n suit une loi $\Gamma_n(\alpha, C)$ si sa transformée de Laplace vaut pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$,

$$\mathbb{E} e^{-\langle \lambda, X \rangle} = |I_n + \Lambda C|^{-\alpha},$$

où $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Encore une fois, l'existence de telles lois n'est pas assurée. Les lois $\Gamma_n(\alpha, C)$ existent pour tous $C \geq 0$ lorsque $\alpha \in \frac{1}{2}\mathbb{N}^* \cap]\frac{n-2}{2}, +\infty[$. Le cas des α demi-entiers est vérifié dans le lemme 2.2. Il est clair sur les définitions que si M est une matrice de Wishart $W_n(\alpha, C)$ alors le vecteur constitué par ses coefficients diagonaux suit la loi $\Gamma_n(\alpha, C)$. Ainsi le résultat d'existence de lois de Wishart donne l'existence des lois gamma multivariées lorsque $2\alpha > n - 1$. Il reste donc à traiter le cas $2\alpha \in]n - 2, n - 1]$, pour lequel Royen a proposé dans des travaux antérieurs [R2, R1] une représentation qui en plus de l'existence des lois, permet d'établir des propriétés analytiques. Nous allons présenter rapidement cette approche et ses conséquences pour les inégalités de corrélation.

Remarque 4.3. — Il existe des conditions individuelles sur α et C , sans même supposer $C \geq 0$; elles font intervenir des permanents de matrices associées. Les vecteurs aléatoires correspondants sont aussi appelés vecteurs permanentaux. Nous renvoyons entre autres à l'article [E] pour les références et les inégalités de corrélation positive qu'il contient.

Le lemme suivant montre l'existence des lois $\Gamma_n(\alpha, C)$ lorsque C est singulière, en utilisant les lois de Wishart de taille $n - 1$:

LEMME 4.4. — *Soit $C \in M_n$ une matrice positive non inversible. Il existe $B \in M_{n-1, n}$ telle que $C = B^*B$. Pour $i \in [n]$, soit $b_i \in \mathbb{R}^{n-1}$ le i -ème vecteur colonne de B .*

Soit S une matrice aléatoire de loi $W_{n-1}(\alpha, I_{n-1})$; elle existe lorsque

$$\alpha \in \frac{1}{2}\mathbb{N}^* \cap]\frac{(n-1)-1}{2}, +\infty[= \frac{1}{2}\mathbb{N}^* \cap]\frac{n-2}{2}, +\infty[.$$

Alors le vecteur $V = (\langle b_i, S b_i \rangle)_{i=1}^n$ est de loi $\Gamma_n(\alpha, C)$.

PREUVE — La vérification est directe : soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$, alors

$$\langle \lambda, V \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{Tr}(b_i^* S b_i) = \text{Tr}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i b_i^* S\right) = \text{Tr}(B \Lambda B^* S),$$

avec $\Lambda = \text{diag}(\lambda)$. Donc,

$$\mathbb{E}e^{-\langle \lambda, V \rangle} = \mathbb{E}e^{-\text{Tr}(B \Lambda B^* S)} = |I_{n-1} + B \Lambda B^*|^{-\alpha} = |I_n + \Lambda B^* B|^{-\alpha} = |I_n + \Lambda C|^{-\alpha},$$

grâce au lien entre polynômes caractéristiques de AB et BA dans le cas rectangulaire. \square

Il reste ensuite à passer des matrices C positives singulières aux matrices définies positives. Royen y parvient en utilisant des mélanges de produits de lois gamma décentrées :

PROPOSITION 4.5. — *Soit $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ et Y de loi $\Gamma_n(\alpha, C)$. On définit un vecteur aléatoire X par sa loi conditionnelle sachant Y :*

$$\mathcal{L}(X|Y) := \gamma(\alpha, Y_1/\mu) \otimes \cdots \otimes \gamma(\alpha, Y_n/\mu).$$

Alors μX est de loi $\Gamma_n(\alpha, \mu I_n + C)$.

PREUVE — Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ et Λ la matrice diagonale associée. En utilisant la définition, et la formule (2) de la transformée de Laplace des lois gamma décentrées, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{-\langle \lambda, \mu X \rangle} &= \mathbb{E} \int e^{-\langle \mu \lambda, x \rangle} \prod_{i=1}^n \gamma(\alpha, Y_i/\mu)(dx_i) = \mathbb{E} \prod_{i=1}^n \int e^{-\mu \lambda_i x_i} \gamma(\alpha, Y_i/\mu)(dx_i) \\ &= \mathbb{E} \prod_{i=1}^n (1 + \mu \lambda_i)^{-\alpha} e^{-\frac{Y_i}{\mu} \frac{\mu \lambda_i}{1 + \mu \lambda_i}} = |I_n + \mu \Lambda|^{-\alpha} \mathbb{E} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 + \mu \lambda_i} Y_i} \\ &= |I_n + \mu \Lambda|^{-\alpha} |I_n + (I_n + \mu \Lambda)^{-1} \Lambda C|^{-\alpha} = |I_n + \Lambda(\mu I_n + C)|^{-\alpha}. \end{aligned}$$

□

Si $\alpha > (n - 2)/2$ et $C > 0$, on peut choisir pour μ la plus petite valeur propre de C . Alors $C = \mu I_n + \tilde{C}$ où \tilde{C} est positive singulière. Le lemme 4.4, donne un vecteur de loi $\Gamma_n(\alpha, \tilde{C})$, à partir duquel la proposition précédente permet de construire un vecteur distribué suivant $\Gamma_n(\alpha, C)$. Comme nous allons le voir, cette construction a l'avantage de révéler des propriétés de régularité de la loi $\Gamma_n(\alpha, C)$. À cette fin, on peut procéder de même pour $\alpha \in \mathbb{N}^*/2$, même si la construction des lois $\Gamma_n(k/2, C)$ ne pose pas de problème. Partant de $C > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\tilde{C} := C - \varepsilon I_n > 0$. Alors le lemme 2.2 donne une construction élémentaire d'un vecteur de loi $\Gamma_n(k/2, \tilde{C})$, à partir duquel la construction de la proposition 4.5 avec $\mu = \varepsilon$ fournit un vecteur $\Gamma_n(k/2, C)$.

Pour finir, voyons comment la construction de la proposition 4.5 permet de montrer des propriétés fines des densités des lois $\Gamma_n(\alpha, C)$ lorsque $\alpha > 1$ et $C > 0$. Nous allons considérer une construction un peu plus générale : soit Z un vecteur aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}_+^n et $a \in]0, +\infty[^n$, on définit alors un vecteur X dans \mathbb{R}_+^n par sa loi conditionnelle :

$$\mathcal{L}(X|Y) := \gamma(a_1, Y_1/\mu) \otimes \cdots \otimes \gamma(a_n, Y_n/\mu).$$

Sa loi est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}_+^n , de densité

$$h_a(x) = \mathbb{E} \prod_{i=1}^n g_{a_i}(x_i, Z_i), \quad x \in \mathbb{R}_{+,*}^n.$$

En utilisant les propriétés (3) des densités des lois gamma décentrées, on obtient tout d'abord que

$$h_a(x) \leq 2^n \prod_{i=1}^n x_i^{a_i-1} (1 + x_i), \quad x \in \mathbb{R}_{+,*}^n.$$

En particulier si $a_i > 1$, il vient $\lim_{x_i \rightarrow 0^+} h_a(x) = 0$.

D'autre part, en exploitant $\frac{\partial}{\partial x} g_\alpha = g_{\alpha-1} - g_\alpha$ qui est valable pour $\alpha > 1$, on montre que

$$\text{si } a_i > 1, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} h_a = h_{a-e_i} - h_a,$$

où e_i est le i -ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n . Par récurrence, on obtient que si $a = (\alpha, \dots, \alpha)$ avec $\alpha > 1$, pour $S \subset [n]$,

$$\frac{\partial^{|S|}}{\partial x_S} h_a = \sum_{T \subset S} (-1)^{|S \setminus T|} h_{a - \sum_{i \in T} e_i}.$$

Cette fonction est intégrable sur \mathbb{R}_+^n car chacune des fonctions h_β est une densité de probabilité. De plus, si $j \notin S$ alors pour tout $T \subset S$, $(a - \sum_{i \in T} e_i)_j = \alpha > 1$ donc

$$\lim_{x_j \rightarrow 0} \frac{\partial^{|S|}}{\partial x_S} h_a(x) = 0, \quad j \notin S.$$

Ceci permet de démontrer les points 1), 2) (et 3) qui s'en déduit) du lemme 2.2, pour les lois $\Gamma_n(\alpha, C)$ lorsque $\alpha > 1$ et $C > 0$. L'argument que nous avons présenté dans le cas gaussien se déroule sans encombre pour des lois $\Gamma_n(\alpha, C)$ avec $\alpha \in \frac{1}{2}\mathbb{N}^* \cap \left] \frac{n-2}{2}, +\infty \right[$ (l'argument d'interpolation, après dérivation du déterminant, fait apparaître une loi $\Gamma_n(\alpha + 1, C)$). Ceci permet à Royen de montrer que si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est de loi $\Gamma_n(\alpha, C)$ avec $\alpha \in \frac{1}{2}\mathbb{N}^* \cap \left] \frac{n-2}{2}, +\infty \right[$, alors pour $n_1 \leq n$ et tous $t_i \geq 0$,

$$\mathbb{P}(\forall i \leq n, X_i \leq t_i) \geq \mathbb{P}(\forall i \leq n_1, X_i \leq t_i) \mathbb{P}(\forall i > n_1, X_i \leq t_i).$$

La corrélation gaussienne correspond à $\alpha = 1/2$.

RÉFÉRENCES

- [B] C. BORELL – *A Gaussian correlation inequality for certain bodies in \mathbb{R}^n* , Math. Ann. 256 (1981), no. 4, 569–573.
- [DG] S. DAS GUPTA, M. L. EATON, I. OLKIN, M. PERLMAN, L. SAVAGE et M. SOBEL – *Inequalities on the probability content of convex regions for elliptically contoured distributions*, Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Probab. (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971), Vol. II : Probability theory, pp. 241–265. Univ. California Press, Berkeley, Calif., 1972.
- [D-S] C. W. DUNNETT et M. SOBEL – *Approximations to the probability integral and certain percentage points of a multivariate analogue of Student's t -distribution*, Biometrika 42 (1955). 258–260.
- [E] N. EISENBAUM – *Characterization of positively correlated squared Gaussian processes*, Ann. Probab. 42 (2014), no. 2, 559–575.
- [K] C. G. KHATRI – *On certain inequalities for normal distributions and their applications to simultaneous confidence bounds*, Ann. Math. Statist. 38 (1967), 1853–1867.
- [K-P] A. S. KRISHNAMOORTHY et M. PARTHASARATHY – *A multi-variate gamma-type distribution*, Ann. Math. Statistics 22 (1951), 549–557.

- [H2] G. HARGÉ – *A convex/log-concave correlation inequality for Gaussian measure and an application to abstract Wiener spaces*, Probab. Theory Related Fields 130 (2004), no. 3, 415–440.
- [H1] G. HARGÉ – *A particular case of correlation inequality for the Gaussian measure*, Ann. Probab. 27 (1999), no. 4, 1939–1951.
- [K-B-J] S. KOTZ, N. BALAKRISHNAN et N. L. JOHNSON – *Continuous multivariate distributions. Vol. 1. Models and applications*, Second edition. Wiley Series in Probability and Statistics : Applied Probability and Statistics. Wiley-Interscience, New York, 2000.
- [L-M] R. LATAŁA et D. MATLAK – *Royen’s proof of the Gaussian correlation inequality*, ArXiv :1512.08776
- [P] L. D. PITT – *A Gaussian correlation inequality for symmetric convex sets*, Ann. Probability 5 (1977), no. 3, 470–474.
- [R3] T. ROYEN – *A simple proof of the Gaussian correlation conjecture extended to some multivariate gamma distributions*, Far East J. Theor. Stat. 48 (2014), no. 2, 139–145.
- [R2] T. ROYEN – *Integral representations and approximations for multivariate gamma distributions*, Ann. Inst. Statist. Math. 59 (2007), no. 3, 499–513.
- [R1] T. ROYEN – *On some central and non-central multivariate chi-square distributions*, Statist. Sinica 5 (1995), no. 1, 373–397.
- [S-S-Z] G. SCHECHTMAN, T. SCHLUMPRECHT et J. ZINN – *On the Gaussian measure of the intersection*, Ann. Probab. 26 (1998), no. 1, 346–357.
- [Sh] Q-M. SHAO – *A Gaussian correlation inequality and its applications to the existence of small ball constant*, Stochastic Process. Appl. 107 (2003), no. 2, 269–287.
- [S] S. ŠIDÁK – *Rectangular confidence regions for the means of multivariate normal distributions*, J. Amer. Statist. Assoc. 62 (1967), 626–633.

Franck BARTHE

Université Paul Sabatier

Institut de Mathématiques de Toulouse

UMR CNRS 5219

118 route de Narbonne

F-31062 Toulouse cedex 9

E-mail : franck.barthe@math.univ-toulouse.fr