

**VOLUME D'ENSEMBLES NODAUX DE FONCTIONS PROPRES DU
LAPLACIEN**

[D'après Logunov, Malinnikova, ainsi que Yau, Brüning,
Donnelly–Feffermann, Hardt–Simon, . . .]

par **Maxime Ingremeau**

1. INTRODUCTION

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte sans bord de dimension n , et soit Δ_g l'opérateur de Laplace–Beltrami sur M . On considérera ici les fonctions propres de cet opérateur c'est-à-dire les fonctions $\varphi_\lambda \in C^2(M; \mathbb{R})$ vérifiant

$$(1) \quad -\Delta_g \varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda.$$

Rappelons que, par régularité elliptique⁽¹⁾, les solutions de (1) sont automatiquement lisses, que les λ pour lesquels il existe une solution non triviale de (1) forment une suite de réels positifs tendant vers $+\infty$, et qu'il existe une base orthonormale de $L^2(M)$ formée de solutions de (1).

Si φ_λ est une solution de (1), on définit son *ensemble nodal* comme

$$\mathcal{N}(\varphi_\lambda) = \{x \in M; \varphi_\lambda = 0\}.$$

L'objet de cet exposé est de présenter des résultats récents de LOGUNOV (2018a,b) sur la façon dont le volume $\mathcal{N}(\varphi_\lambda)$ dépend de λ . Avant de présenter ces résultats, rappelons comment ce volume est défini.

Définition du volume des ensembles nodaux. — On définit l'ensemble singulier de φ_λ comme $\mathcal{S}(\varphi_\lambda) := \{x \in M; \varphi_\lambda = 0, \nabla \varphi_\lambda = 0\}$. Par le théorème des fonctions implicites, l'ensemble $\mathcal{N}(\varphi_\lambda) \setminus \mathcal{S}(\varphi_\lambda)$ est une sous-variété de M de dimension $n - 1$. Cette sous-variété est alors naturellement munie d'une structure riemannienne, et on peut définir son volume

$$H^{n-1}(\mathcal{N}(\varphi_\lambda)) := \text{Vol}(\mathcal{N}(\varphi_\lambda) \setminus \mathcal{S}(\varphi_\lambda)).$$

Le lemme suivant, dû à CAFFARELLI et FRIEDMAN (1985), nous affirme que $\mathcal{S}(\varphi_\lambda)$ est un objet de dimension au plus $n - 2$:

1. Dans une carte locale, ces fonctions sont solutions d'une équation elliptique, que nous rappellerons au début de la section 3.

LEMME 1.1. — Si φ_λ est une solution de (1), alors il existe une famille dénombrable $(S_j)_{j \in J}$ de sous-variétés de M de dimension $n - 2$ telles que

$$\mathcal{S}(\varphi_\lambda) \subset \bigcup_{j \in J} S_j.$$

Ce lemme (que nous démontrerons dans la section 4.3) implique que $H^{n-1}(\mathcal{N}(\varphi_\lambda))$ peut-être vue comme la mesure de Hausdorff $(n - 1)$ -dimensionnelle de $\mathcal{N}(\varphi_\lambda)$. Nous n'utiliserons pas cette notion ici, et renvoyons le lecteur à FEDERER (1969) pour plus de détails.

La conjecture de Yau. — Une question naturelle est celle de la dépendance de $H^{n-1}(\mathcal{N}(\varphi_\lambda))$ par rapport à λ , en particulier quand $\lambda \rightarrow +\infty$. La conjecture suivante a été faite dans YAU (1982).

CONJECTURE 1.2. — Soit (M, g) une variété riemannienne compacte sans bord. Il existe des constantes $c_1(M, g), c_2(M, g) > 0$ telles que, pour toute fonction $\varphi_\lambda \in C^\infty(M)$ vérifiant $-\Delta_g \varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda$, on a

$$(2) \quad c_1(M, g) \sqrt{\lambda} \leq H^{n-1}(\mathcal{N}(\varphi_\lambda)) \leq c_2(M, g) \sqrt{\lambda}.$$

Remarquons que ces constantes c_1 et c_2 dépendent nécessairement de la variété : la fonction $\sin(\sqrt{\lambda}x)$ est une fonction propre de valeur propre λ sur $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ et sur $\mathbb{R}/(2k\pi\mathbb{Z})$, mais elle a k fois plus de zéros dans le deuxième cas.

La conjecture de Yau ne disant donc rien sur les constantes c_1 et c_2 , l'inégalité (2) n'est intéressante que dans la limite où $\lambda \rightarrow +\infty$. Elle donne donc des informations sur les fonctions propres de grande valeur propre : on dit qu'il s'agit d'un résultat d'*analyse semi-classique*.

Résultats précédents concernant la conjecture de Yau. — La conjecture 1.2 a été démontrée dans DONNELLY et FEFFERMAN (1988) dans le cas où (M, g) est analytique.

Lorsque la variété n'est pas analytique, la conjecture est encore ouverte. On dispose de résultats plus précis en dimension $n = 2$. La borne inférieure a été prouvée par Brüning, et redécouverte par Yau, tandis que la borne supérieure est due à DONNELLY et FEFFERMAN (1990), améliorant le résultat de NADIRASHVILI (1988). Une autre preuve de la borne supérieure a été donnée dans DONG (1992).

THÉORÈME 1.3 (BRÜNING, 1978; DONNELLY et FEFFERMAN, 1990)

Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension 2 compacte sans bord. Il existe $c_1, c_2 > 0$ ne dépendant que de la variété (M, g) telles que, pour toute fonction $\varphi_\lambda \in C^\infty(M)$ vérifiant $-\Delta_g \varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda$, on a

$$c_1 \sqrt{\lambda} \leq H^1(\mathcal{N}(\varphi_\lambda)) \leq c_2 \lambda^{3/4}.$$

La preuve de la borne inférieure n'est pas très compliquée, et nous la rappellerons dans la section 2.2.

Lorsque la variété (M, g) est de dimension $n \geq 3$ et n'est pas analytique, les résultats connus avant les travaux récents de Logunov et Malinnikova étaient beaucoup moins précis.

THÉORÈME 1.4 (HARDT et SIMON, 1989). — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte sans bord. Il existe $c > 0$ ne dépendant que de la variété (M, g) telle que, pour toute fonction $\varphi_\lambda \in C^\infty(M)$ vérifiant $-\Delta_g \varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda$, on a*

$$H^{n-1}(\mathcal{N}(\varphi_\lambda)) \leq c\lambda^{c\sqrt{\lambda}}.$$

THÉORÈME 1.5 (COLDING et MINICOZZI, 2011). — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte sans bord. Il existe $c > 0$ ne dépendant que de la variété (M, g) telle que, pour toute fonction $\varphi_\lambda \in C^\infty(M)$ vérifiant $-\Delta_g \varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda$, on a*

$$(3) \quad H^{n-1}(\mathcal{N}(\varphi_\lambda)) \geq c\lambda^{\frac{3-n}{4}}.$$

Ce résultat a été prouvé par COLDING et MINICOZZI (2011), puis retrouvé par des méthodes très différentes par HEZARI et SOGGE (2012) en améliorant les techniques développées dans SOGGE et ZELDITCH (2011) puis HEZARI et WANG (2012), qui s'inspirent d'une formule d'intégration par parties découverte dans DONG, 1992. Enfin, cette borne a été retrouvée par STEINERBERGER (2014) par une méthode complètement différente, reposant sur l'équation de la chaleur.

Les résultats de Logunov et Malinnikova. — Récemment, la borne supérieure de DONNELLY et FEFFERMAN (1990) pour les surfaces a été légèrement améliorée par LOGUNOV et MALINNIKOVA (2018).

THÉORÈME 1.6 (LOGUNOV et MALINNIKOVA, 2018). — *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension 2 compacte sans bord. Il existe $c_2 > 0$ et $\beta \in]0, 1/4[$ ne dépendant que de la variété (M, g) telles que, pour toute fonction $\varphi_\lambda \in C^\infty(M)$ vérifiant l'équation $-\Delta_g \varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda$, on a*

$$H^1(\mathcal{N}(\varphi_\lambda)) \leq c_2 \lambda^{3/4-\beta}.$$

Enfin, la borne inférieure optimale a été prouvée⁽²⁾ en toute dimension dans LOGUNOV (2018b), et une borne supérieure polynomiale en λ a été obtenue dans LOGUNOV (2018a), améliorant ainsi grandement les estimées de HARDT et SIMON (1989) :

THÉORÈME 1.7 (LOGUNOV, 2018a,b). — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n , sans bord. Il existe $c_1, c_2 > 0$ ne dépendant que de la variété (M, g) , et $\alpha > 0$ ne dépendant que de n , telles que, pour toute fonction $\varphi_\lambda \in C^\infty(M)$ vérifiant l'équation $-\Delta_g \varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda$, on a*

$$c_1 \sqrt{\lambda} \leq H^{n-1}(\mathcal{N}(\varphi_\lambda)) \leq c_2 \lambda^\alpha.$$

2. En dimension 3, une borne inférieure de la forme λ^α , pour un $\alpha > 0$ a aussi été obtenue dans LOGUNOV et MALINNIKOVA (2018). Cet article a été publié en même temps que LOGUNOV (2018b), mais est beaucoup moins technique.

Notons que, dans ce théorème, la constante α (tout comme la constante β dans le théorème 1.6) n'est pas très explicite, comme on s'en rendra compte dans la section 6.

Concernant l'attribution du théorème 1.7, les remerciements des articles LOGUNOV (2018a,b) indiquent que « *This work was started in collaboration with Eugenia Malinnikova who suggested to apply the combinatorial approach to nodal sets of Laplace eigenfunctions. Her role in this work is no less than the author's one. Unfortunately, she refused to be a coauthor of this paper* ».

Nous recommandons la lecture de l'article de synthèse LOGUNOV et MALINNIKOVA (2019b), dans lequel toutes les grandes idées des articles LOGUNOV (2018a,b) et LOGUNOV et MALINNIKOVA (2018) sont présentées avec beaucoup de clarté.

Les ensembles nodaux à travers les âges. — Si nous n'avons présenté ci-dessus que des résultats récents concernant le volume de $\mathcal{N}(\varphi_\lambda)$, l'étude des ensembles nodaux des fonctions propres a une longue histoire.

En effet, les ensembles nodaux de fonctions propres (dans des domaines de \mathbb{R}^2) ont pu être observé expérimentalement par Chladni dès la fin du XVIII^{ème} siècle.

Un analogue de (2) en dimension 1 peut être trouvé dans STURM (1836), où il est prouvé que, si ψ_n est la n -ième fonction propre⁽³⁾ d'un opérateur différentiel du second ordre sur $[a, b]$, alors ψ_n s'annule exactement n fois dans $]a, b[$.

Enfin, l'un des premiers résultats mathématiques sur les fonctions propres est le théorème de Courant, prouvé dans les années 1920, qui concerne le nombre de domaines nodaux (c'est-à-dire le nombre de composantes connexes de $M \setminus \mathcal{N}(\varphi_\lambda)$). Nous renvoyons le lecteur à COURANT et HILBERT (1967) pour un énoncé et une preuve de ce théorème, et au séminaire Bourbaki d'ANANTHARAMAN (2016) pour un compte-rendu des résultats plus récents concernant le nombre de domaines nodaux des fonctions propres (et, surtout, de combinaisons linéaires aléatoires de fonctions propres).

Autres résultats concernant les fonctions propres dans la limite semi-classique. — Soit φ_λ une famille de solutions de (1) sur M , telles que $\|\varphi_\lambda\|_{L^2(M)} = 1$.

Nous avons vu que la conjecture de Yau est un résultat *semi-classique*, décrivant les propriétés des fonctions propres φ_λ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$. Il est remarquable que cette conjecture ne fasse intervenir aucune des propriétés de (M, g) , comme sa courbure, ou les propriétés de son flot géodésique.

En effet, on peut se poser de nombreuses autres questions sur les propriétés semi-classiques des φ_λ , concernant le comportement des normes $\|\varphi_\lambda\|_{L^p(M)}$, ou les limites faibles des mesures de probabilité $|\varphi_\lambda(x)|^2 dx$ (appelées *limites semi-classiques*) quand $\lambda \rightarrow +\infty$. Toutefois, la réponse à ces questions dépend en général fortement de la variété (M, g) , et, plus précisément, des propriétés du flot géodésique.

En fait, on dispose de théorèmes (et de conjectures) beaucoup plus précis sur les variétés de courbure négative. Nous ne discuterons pas ces propriétés ici, mais nous renvoyons le lecteur à NONNENMACHER (2013) et ZELDITCH (2010) pour un panorama

3. La valeur propre associée est alors de l'ordre de grandeur de \sqrt{n} , par la loi de Weyl.

des propriétés semi-classiques des fonctions propres en courbure négative, et à DYATLOV et JIN (2018) et DYATLOV, JIN et NONNENMACHER (2019) pour des résultats récents spectaculaires.

Notons que les propriétés des fonctions propres en courbure négative peuvent être utilisées pour améliorer les résultats connus sur les ensembles nodaux dans ce cadre. Par exemple, dans HEZARI et RIVIÈRE (2016), les auteurs avaient amélioré légèrement la borne (3) pour certaines familles de fonctions propres en courbure négative, tandis que dans HEZARI (2018a), l’auteur améliore légèrement la borne supérieure du théorème 1.7 pour ces mêmes fonctions propres.

Nous renvoyons le lecteur à HEZARI (2018b) et ZELDITCH (2012) pour d’autres propriétés des ensembles nodaux de fonctions propres pouvant être établies en courbure négative, et à NAZAROV, POLTEROVICH et SODIN (2005) et ROY-FORTIN (2015) pour des propriétés de l’ensemble nodal pouvant être établies en dimension 2.

Organisation de l’exposé. — Dans la section 2, nous rappellerons quelques propriétés bien connues des valeurs propres et des fonctions propres du laplacien, et nous expliquerons comment elles permettent de prouver la borne inférieure de la conjecture de Yau en dimension 2.

Dans la section 3, nous expliquerons comment, au lieu de travailler avec des fonctions propres du laplacien, on peut se ramener à travailler avec des solutions d’équations elliptiques ne dépendant pas de la valeur propre λ . Nous formulerons alors un équivalent du théorème 1.7 dans ce cadre, en introduisant la notion d’*indice de doublement* d’une fonction dans une boule.

Cette notion est très liée à celle de *fréquence* d’une solution d’une équation elliptique. Nous rappellerons la définition de cette notion dans la section 4, en énonçant ses propriétés de monotonie.

Enfin, les sections 5 et 6 contiendront les grandes idées de la preuve du théorème 1.7.

Notations. — Dans tout cet exposé, si $x \in \mathbb{R}^n$, $B(x, r)$ désignera la boule ouverte de centre x et de rayon r dans \mathbb{R}^n , tandis que si y est un point d’une variété riemannienne (M, g) , la notation $B_g(y, r)$ désignera la boule ouverte de centre y et de rayon r pour la distance induite par la métrique g .

Remerciements. — L’auteur tient à remercier A. Logunov pour ses encouragements, ainsi que I. Moyano, N. Bourbaki, A. Rivera et J. Toulisse pour leur relecture attentive.

2. PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES VALEURS PROPRES ET DES FONCTIONS PROPRES

2.1. La première valeur propre du Laplacien

Soit $\Omega \subset M$ un ouvert d'une variété riemannienne de dimension n , avec un bord de régularité Lipschitz. On note $\lambda_1(\Omega)$ la première valeur propre de l'opérateur de Laplace–Beltrami dans Ω , que l'on peut définir comme

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{\substack{f \in C^1(\bar{\Omega}) \\ f=0 \text{ sur } \partial\Omega}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla_g f|^2}{\int_{\Omega} |f|^2} = - \inf_{\substack{f \in C^2(\bar{\Omega}) \\ f=0 \text{ sur } \partial\Omega}} \frac{\int_{\Omega} f \Delta_g f}{\int_{\Omega} |f|^2}.$$

Il est immédiat que si $\Omega \subset \Omega'$, on a $\lambda_1(\Omega') \leq \lambda_1(\Omega)$.

Dans la suite, on aura besoin du fait que la première valeur propre du laplacien sur une boule dans une variété se comporte comme la première valeur propre du laplacien sur une boule euclidienne de même rayon, lorsque le rayon de la boule tend vers zéro.

Notons $j_n = \lambda_1(B(0,1))$. Par un argument de changement d'échelle, on a $\lambda_1(B(0,r)) = r^{-2}j_n$.

On montre facilement, en écrivant le laplacien dans des coordonnées normales autour d'un point, que

$$(4) \quad \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \lambda_1(B_g(x,r)) = j_n,$$

la convergence étant uniforme en $x \in M$.

2.1.1. Domaines nodaux et $\lambda^{-1/2}$ -densité de l'ensemble nodal. — Si φ_λ est une solution de $-\Delta\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$, rappelons que l'on note $\mathcal{N}(\varphi_\lambda)$ son lieu d'annulation. Les *domaines nodaux* de φ_λ sont les composantes connexes de $M \setminus \mathcal{N}(\varphi_\lambda)$. Ainsi, si Ω est un domaine nodal, φ_λ est de signe constant sur Ω , et s'annule sur $\partial\Omega$. On en déduit que

$$(5) \quad \lambda_1(\Omega) = \lambda.$$

Les équations (4) et (5) permettent de prouver le lemme suivant, qui fournit une motivation pour la borne inférieure dans la conjecture 1.2.

LEMME 2.1 ($\lambda^{-1/2}$ -densité de l'ensemble nodal). — *Il existe $c > 0$ ne dépendant que de (M, g) telle que, si φ_λ est une solution de $-\Delta_g\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$, alors $\mathcal{N}(\varphi_\lambda)$ est $\frac{c}{\sqrt{\lambda}}$ -dense dans M (c'est-à-dire que tout point de M est à une distance au plus $\frac{c}{\sqrt{\lambda}}$ d'un élément de $\mathcal{N}(\varphi_\lambda)$).*

Démonstration. — Soit $x \in M \setminus \mathcal{N}(\varphi_\lambda)$. Notons $r_\lambda(x)$ la distance de x à $\mathcal{N}(\varphi_\lambda)$. φ_λ est alors de signe constant sur $B_g(x, r_\lambda(x))$. Par conséquent, si $\Omega_{\lambda,x}$ est le domaine nodal contenant x , on a $B_g(x, r_\lambda(x)) \subset \Omega_{\lambda,x}$, et donc

$$\lambda = \lambda_1(\Omega_{\lambda,x}) \leq \lambda_1(B_g(x, r_\lambda(x))) \leq \frac{c}{r_\lambda^2},$$

pour un $c > 0$ indépendant de x , où la dernière inégalité découle de (4). □

2.1.2. L'inégalité de Faber–Krahn. — Il a été conjecturé par RAYLEIGH (1877) que parmi les domaines de \mathbb{R}^n de volume fixé, la boule est celle qui minimise λ_1 . Ce résultat a été prouvé indépendamment par FABER (1923), et KRAHN (1925).

L'inégalité de Faber–Krahn affirme donc que lorsque $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert ayant un bord de régularité Lipschitz, si $r_\Omega > 0$ est tel que $\text{Vol}(\Omega) = \text{Vol}(B(0, r_\Omega))$, on a

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(B(0, r_\Omega)) = r_\Omega^{-2} j_n.$$

Par conséquent, on a $r_\Omega \geq \left(\frac{j_n}{\lambda_1(\Omega)}\right)^{1/2}$, donc si V_n désigne le volume de la boule unité dans \mathbb{R}^n , on a

$$(6) \quad \text{Vol}(\Omega) \geq V_n \left(\frac{j_n}{\lambda_1(\Omega)}\right)^{n/2}.$$

Ce résultat se généralise lorsque Ω est un ouvert d'une variété compacte (M, g) : il existe $c_M > 0$ ne dépendant que de (M, g) telle que, pour tout $\Omega \subset M$ ouvert à bord Lipschitz, on a

$$(7) \quad \text{Vol}(\Omega) \geq c_M \lambda_1(\Omega)^{-n/2}.$$

Nous renvoyons le lecteur à CHAVEL (1984, Chapitre IV) pour une preuve de ce fait.

Si Ω est un domaine nodal de φ_λ , alors par (5), on a $\text{Vol}(\Omega) \geq c_M \lambda^{-n/2}$. Comme il existe $c'_M > 0$ telle que $\text{Vol}(\Omega) \leq c'_M \text{diam}(\Omega)^n$, on en déduit le corollaire suivant (qui peut aussi se déduire directement de (4) par un argument variationnel semblable à celui du paragraphe précédent).

COROLLAIRE 2.2. — *Il existe $c > 0$ ne dépendant que de (M, g) telle que, si φ_λ est une solution de $-\Delta_g \varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda$ et si Ω est un domaine nodal de φ_λ , alors $\text{diam}(\Omega) > \frac{c}{\sqrt{\lambda}}$.*

2.2. La borne inférieure dans la conjecture de Yau en dimension 2

Le lemme 2.1 et le corollaire 2.2 permettent de prouver la borne inférieure dans la conjecture 1.2 lorsque $n = 2$.

COROLLAIRE 2.3. — *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension 2. Il existe $c > 0$ ne dépendant que de (M, g) telle que pour toute φ_λ vérifiant $-\Delta_g \varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda$, on a*

$$H^1(\mathcal{N}(\varphi_\lambda)) \geq c\sqrt{\lambda}.$$

Démonstration. — *Étape 1 :* Soit $x_0 \in M$. On sait, par le lemme 2.1 qu'il existe $x_1 \in \mathcal{N}(\varphi_\lambda) \cap B(x_0, c\lambda^{-1/2})$. x_1 est alors au bord d'un domaine nodal Ω , dont on sait par le corollaire 2.2 qu'il a un diamètre supérieur à $c'\lambda^{-1/2}$. Ainsi, $\mathcal{N}(\varphi_\lambda) \cap B_g(x_1, c'\lambda^{-1/2})$ doit contenir une courbe de longueur au moins $c'\lambda^{-1/2}$.

On a donc prouvé que pour tout point $x_0 \in M$, $B_g(x_0, (c+c')\lambda^{-1/2}) \cap \mathcal{N}(\varphi_\lambda)$ contient une courbe de longueur au moins $c'\lambda^{-1/2}$.

Étape 2 : On utilise le fait suivant : il existe $n_M \in \mathbb{N}$, ne dépendant que de (M, g) , tel que, pour tout $r > 0$, on peut recouvrir M par un nombre fini de boules de rayon r , de sorte que tout point de M soit dans au plus n_M boules.

Nous renvoyons par exemple au lemme 2 de COLDING et MINICOZZI (2011) pour une preuve de ce fait, qui repose sur l’inégalité de Bishop–Gromov.

On applique ce fait pour $r = (c + c')\sqrt{\lambda}$. Chaque boule contient une courbe de \mathcal{N}_λ de longueur au moins $c\lambda^{-1/2}$, et chaque courbe est comptée au plus n_M fois. Le résultat en découle. \square

Remarque 2.4. — La preuve précédente utilise très fortement la dimension 2, via le fait qu’un ensemble de grand diamètre a un grand périmètre. Ce fait est complètement faux en dimension supérieure : un cylindre très fin peut avoir un grand diamètre, mais un bord d’aire très petite.

3. FONCTION PROPRES, FONCTIONS HARMONIQUES, ET SOLUTIONS D’ÉQUATIONS ELLIPTIQUES

Le volume de l’ensemble nodal est une propriété *locale* des fonctions propres, au sens où, pour l’estimer, il suffit d’estimer le volume de l’ensemble nodal dans de petites boules⁽⁴⁾. Dans cette section, nous tirerons parti de ce fait, pour nous ramener à l’étude de l’ensemble nodal de solutions d’équations elliptiques dans \mathbb{R}^n .

3.1. D’une fonction propre à une fonction harmonique

On rappelle que dans une carte locale, l’opérateur de Laplace–Beltrami s’écrit comme

$$\Delta_g f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \partial_i (\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j f),$$

où $|g| = |\det(g_{ij})|$, et les g^{ij} sont les entrées de l’inverse de g , c’est-à-dire qu’ils vérifient $\sum_{j=1}^d g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$.

Ainsi, l’équation $-\Delta_g f = \lambda f$ se réécrit comme

$$(8) \quad -\operatorname{div}(A(x)\nabla f(x)) = \lambda\sqrt{|g|}(x)f(x),$$

où $A_{ij} = \sqrt{|g|}g^{ij}$ est une matrice symétrique positive dépendant de façon lisse de x .

Une fonction propre du Laplacien est donc localement solution d’une équation elliptique $\mathcal{L}_\lambda f = 0$, où $\mathcal{L}_\lambda f = \operatorname{div}(A\nabla f) + \lambda\sqrt{|g|}f$. On dispose de nombreuses propriétés et estimées sur les solutions d’équations elliptiques ; le problème, ici, c’est que, l’équation dépendant de λ , les estimées dépendront toutes de λ , d’une manière pas toujours explicite. On préférera donc travailler avec des solutions d’une équation *indépendante* de λ , grâce à l’astuce suivante, due à LIN (1991).

4. Le nombre de domaines nodaux, en revanche, n’est pas une propriété locale, car travailler dans de petites boules ne permet pas d’appréhender les grands domaines nodaux.

DÉFINITION 3.1. — Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n , et soit $\varphi_\lambda \in C^\infty(M)$ une solution de l'équation $-\Delta_g \varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda$.

On introduit alors la variété $\widetilde{M} := M \times \mathbb{R}$, de dimension

$$d := n + 1,$$

munie de la métrique produit \widetilde{g} , et on pose

$$(9) \quad \widetilde{\varphi}_\lambda(x, t) := e^{\sqrt{\lambda}t} \varphi_\lambda(x).$$

La fonction $\widetilde{\varphi}_\lambda \in C^\infty(\widetilde{M})$ vérifie alors

$$(10) \quad \Delta_{\widetilde{g}} \widetilde{\varphi}_\lambda = 0.$$

Remarque 3.2. — Remarquons que, si $\mathcal{N}(\varphi_\lambda)$ est l'ensemble nodal de φ_λ , alors l'ensemble nodal de $\widetilde{\varphi}_\lambda$ est $\mathcal{N}(\widetilde{\varphi}_\lambda) = \mathcal{N}(\varphi_\lambda) \times \mathbb{R}$. Estimer le volume de $\mathcal{N}(\varphi_\lambda)$ revient donc à estimer le volume de $\mathcal{N}(\widetilde{\varphi}_\lambda) \cap (M \times [-1, 1])$.

3.2. Les fonctions harmoniques comme solutions d'équations elliptiques

Si on travaille dans $B_{\widetilde{g}}(x_0, R)$ en utilisant les coordonnées normales en x_0 , la fonction $\widetilde{\varphi}_\lambda$, vue dans cette carte, sera donc solution, dans $B(0, R) \subset \mathbb{R}^d$, de

$$(11) \quad \operatorname{div}(A(x)\nabla f(x)) = 0.$$

Ici, la fonction $A(x)$ est une famille de matrices symétriques de taille $d \times d$, telles que

$$(12) \quad A(0) = \operatorname{Id}.$$

La matrice A dépend de façon lisse, et donc lipschitzienne, de $x \in B(0, R)$, donc il existe $\Gamma > 0$ telle que, pour tous $1 \leq i, j \leq d$ et tous $x, y \in B(0, R)$, on a

$$(13) \quad |A_{ij}(x) - A_{ij}(y)| \leq \Gamma|x - y|.$$

De plus, les matrices $A(x)$ sont définies positives, de sorte que $\mu(x) := \frac{\langle x, Ax \rangle}{|x|^2}$ vérifie

$$(14) \quad \Lambda^{-1} \leq \mu(x) \leq \Lambda$$

pour un $\Lambda > 0$ ne dépendant pas de $x \in B(0, R)$.

Remarque 3.3. — Les constantes Γ et Λ apparaissant dans (13) et dans (14) dépendent de façon lisse de x_0 , et il est donc possible de les borner par des constantes ne dépendant que de la variété (M, g) .

3.3. Ensembles nodaux de solutions d'équations elliptiques

3.3.1. *Une borne inférieure sur le volume des ensembles nodaux.* — L'équation (11) doit être vue comme une généralisation de l'équation $\Delta u = 0$ dans \mathbb{R}^d . Ses solutions ne sont pas tout à fait des fonctions harmoniques dans \mathbb{R}^d , mais elles partagent de nombreuses propriétés des fonctions harmoniques.

Ainsi, pour comprendre l'ensemble nodal de $\widetilde{\varphi}_\lambda$, et donc celui de φ_λ , il est naturel de commencer par s'intéresser à l'ensemble nodal des fonctions harmoniques dans une boule.

La conjecture suivante a été faite dans NADIRASHVILI (1997).

CONJECTURE 3.4. — *Il existe une constante $c(d) > 0$ telle que, si u est une fonction harmonique sur $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^d$ vérifiant $u(0) = 0$, alors*

$$H^{d-1} \{x \in B(0, 1); u(x) = 0\} \geq c(d).$$

Lorsque $d = 2$, la preuve de la conjecture est très simple : une fonction harmonique non identiquement nulle ne peut pas s'annuler sur une courbe fermée (sinon, elle serait nulle dans le domaine délimité par cette courbe, et donc partout), et le lieu d'annulation d'une fonction harmonique ne contient pas de points extrémaux (cela contredirait le principe du maximum). Ainsi, le lieu d'annulation de u doit contenir une courbe allant de 0 à $\partial B(0, 1)$, qui est donc de longueur supérieure à 1.

En dimension supérieure, la conjecture était ouverte, jusqu'au résultat de LOGUNOV (2018a), qui étend le résultat de la conjecture aux solutions de (11).

THÉORÈME 3.5 (LOGUNOV, 2018b). — *Soit $A(x)$ une famille de matrices symétriques vérifiant (13) et (14) pour $x \in B(0, 1)$. Il existe $c > 0$ ne dépendant que de d , Λ et Γ telle que, si u est une solution lisse de (11) vérifiant $u(0) = 1$, on a*

$$H^{d-1} \{x \in B(0, 1); u(x) = 0\} \geq c.$$

Remarque 3.6. — Soit $0 < r < 1$, $A(x)$ une famille de matrices symétriques vérifiant (13) et (14) pour $x \in B(0, r)$, et u une solution lisse de (11) dans $B(0, r)$. Alors, par un argument simple de changement d'échelle, on a

$$H^{d-1} \{x \in B(0, r); u(x) = 0\} \geq cr^{d-1}.$$

3.3.2. *Une borne supérieure sur le volume des ensembles nodaux.* — On ne peut pas espérer avoir un analogue de la conjecture 3.4, qui donnerait une borne supérieure valable pour toute fonction harmonique. En effet, dans $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$, la fonction donnée en coordonnées polaires par

$$f(r, \theta) = r^m \cos(m\theta)$$

est harmonique (c'est la partie réelle de la fonction holomorphe $z \mapsto z^m$), et son lieu d'annulation est de longueur $2m$.

On voit donc que, le lieu d'annulation d'une fonction harmonique peut être de volume arbitrairement grand dans un voisinage d'un point, lorsque cette fonction s'annule à un ordre élevé en ce point. Pour donner une borne supérieure sur le volume de l'ensemble

nodal d'une fonction harmonique, il nous faut introduire la notion d'*indice de doublement* d'une telle fonction, qui sera reliée à son ordre d'annulation, et, pour une fonction de la forme (9), sera reliée à la valeur propre λ .

DÉFINITION 3.7. — *Soit u une solution de (11) dans $B(0, R)$, et soient $x \in B(0, R)$ et $r > 0$ tels que $B(x, 2r) \subset B(0, R)$. On définit l'indice de doublement de u dans $B(x, r)$, que l'on note $\mathcal{N}_u(x, r)$, par*

$$\mathcal{N}_u(x, r) = \log_2 \left(\sup_{B(x, 2r)} |u| \right) - \log_2 \left(\sup_{B(x, r)} |u| \right).$$

THÉORÈME 3.8 (LOGUNOV, 2018a). — *Soit $A(x)$ une famille de matrices symétriques vérifiant (13) et (14) pour $x \in B(0, 1)$. Il existe $C > 0$, $R \in]0, 1[$ ne dépendant que de d , Λ et Γ , et α ne dépendant que de d telles que, si u est une solution lisse de (11), alors on a*

$$H^{d-1}(\{x \in B(0, R); u(x) = 0\}) \leq C \mathcal{N}_u(0, 1)^\alpha.$$

Ainsi, le volume de l'ensemble nodal d'une fonction harmonique croît au plus polynomialement avec son indice de doublement dans une boule assez grande.

3.4. Ensembles nodaux des fonctions propres : preuve du théorème 1.7

Dans cette section, nous allons expliquer pourquoi les théorèmes 3.5 et 3.8 impliquent le théorème 1.7.

Preuve de la borne inférieure dans le théorème 1.7. — Par le lemme 2.1, on sait qu'il existe $c_1 > 0$ tel que $\mathcal{N}(\varphi_\lambda)$ est $(c_1 \lambda^{-1/2})$ -dense dans M . On peut donc trouver $c_2 \lambda^{n/2}$ points x_i tels que $\varphi_\lambda(x_i) = 0$ et que les boules $B_g(x_i, c_3 \lambda^{-1/2})$ sont disjointes, où c_2 et c_3 ne dépendent que de (M, g) .

Il suffit donc de montrer que, pour tout i ,

$$(15) \quad H^{n-1} \left(\mathcal{N}(\varphi_\lambda) \cap B_g(x_i, c_3 \lambda^{-1/2}) \right) \geq \lambda^{(1-n)/2}.$$

On considère la fonction $\widetilde{\varphi}_\lambda$ comme dans la définition 3.1, que l'on regarde dans une carte locale dans une boule $B_{\mathbb{R}^{n+1}}((x_i, 0), c_3 \lambda^{-1/2})$. La fonction ainsi considérée vérifie les hypothèses de la remarque 3.6, de sorte que son domaine nodal est de volume $\geq c_4 \lambda^{-n/2}$. En utilisant la remarque 3.2, on en déduit facilement (15). \square

Pour appliquer le théorème 3.8, il nous faut estimer l'indice de doublement d'une fonction propre. Celui-ci est donné par le théorème suivant, dû à DONNELLY et FEFFERMAN (1988). Bien que l'article DONNELLY et FEFFERMAN (1988) traite de la conjecture de Yau sur les variétés analytiques, ce théorème y est prouvé pour des variétés riemanniennes lisses.

THÉORÈME 3.9 (DONNELLY et FEFFERMAN, 1988). — Soit (M, g) une variété riemannienne compacte. Il existe $r_0, C > 0$ telles que, si $\varphi_\lambda \in C^\infty(M)$ est une solution de l'équation $-\Delta_g \varphi_\lambda = \lambda \varphi_\lambda$, on a, pour tout $x \in M$ et tout $0 < r < r_0$

$$(16) \quad \sup_{B_g(x, 2r)} |\varphi_\lambda| \leq 2^{C\sqrt{\lambda}} \sup_{B_g(x, r)} |\varphi_\lambda|.$$

Ce théorème ne peut pas être prouvé par des arguments *locaux* : localement, une fonction propre est juste une solution d'une équation elliptique dans \mathbb{R}^n , et celles-ci peuvent avoir un indice de doublement arbitrairement élevé (comme $\Re(z^m)$ dans le plan).

La preuve originelle de ce théorème fait appel à des *estimées de Carleman* assez compliquées. Cette approche a été grandement simplifiée dans JERISON et LEBEAU (1999), à l'aide des fonctions $\widetilde{\varphi}_\lambda$ de la définition 3.1, auxquelles on peut appliquer des estimées de Carleman usuelles. (Le lecteur intéressé pourra consulter ZWORSKI (2012, § 7) pour une introduction aux estimées de Carleman).

Toutefois, comme il a été remarqué dans LIN (1991) il est aussi possible d'obtenir une preuve beaucoup plus simple que celle de DONNELLY et FEFFERMAN (1988), n'utilisant pas d'estimées de Carleman, en appliquant aux fonctions $\widetilde{\varphi}_\lambda$ les résultats de monotonie de la section 4.2 ci-dessous. Nous ne décrivons pas cette preuve ici, et nous renvoyons le lecteur intéressé à LOGUNOV et MALINNIKOVA (2019a, § 2) ou à HAN et LIN (2013, Chapitre 6.1).

Expliquons maintenant comment obtenir la borne supérieure du théorème 1.7.

Preuve de la borne supérieure dans le théorème 1.7. — Là encore, on considère la fonction $\widetilde{\varphi}_\lambda$ de la définition 3.1. On recouvre $M \times]-1, 1[$ par un nombre fini de boules suffisamment petites pour appliquer le théorème 3.9. Dans chacune de ces boules, $\widetilde{\varphi}_\lambda$ vérifie les hypothèses du théorème 3.8, avec un indice de doublement (dans une boule plus grande) borné par $C'\sqrt{\lambda}$ par le théorème 3.9. On en déduit que

$$H^d(\{x \in M \times]-1, 1[\}) \leq C''\lambda^{\alpha/2},$$

et le résultat découle par la remarque 3.2. □

La notion d'indice de doublement est essentielle pour prouver le théorème 3.8, mais aussi pour le théorème 3.5. Nous utiliserons en particulier une propriété de *quasi-monotonie* des indices de doublement, que nous présenterons dans la proposition 4.7 ci-dessous. Cette propriété provient de propriétés de (quasi-)monotonie d'une autre quantité, la *fréquence* d'une solution d'une équation elliptique.

Nous conseillons au lecteur impatient de sauter la section suivante, à l'exception de l'énoncé de la proposition 4.7 et de la section 4.5, qui contiennent les seuls résultats que nous utiliserons dans la suite.

4. MONOTONIE DE LA FRÉQUENCE ET DE L'INDICE DE DOUBLEMENT

4.1. Fréquence de fonctions harmoniques dans \mathbb{R}^d

Soit u une fonction harmonique non identiquement nulle sur $B(0, R) \subset \mathbb{R}^d$. Pour tout $r \in]0, R[$, on définit la *fréquence de u dans $B(0, r)$* par

$$\beta_u(r) := \frac{r \int_{B(0,r)} |\nabla u|^2}{\int_{\partial B(0,r)} |u|^2}.$$

Par la formule de Green, on a

$$\int_{B(0,r)} |\nabla u|^2 = - \int_{B(0,r)} u \Delta u + \int_{\partial B(0,r)} u \partial_n u = \frac{1}{2} \int_{\partial B(0,r)} \partial_n |u|^2.$$

En passant en coordonnées sphériques, on voit facilement que

$$\int_{\partial B(0,r)} \partial_n |u|^2 = r^{d-1} \partial_r \left(\frac{1}{r^{d-1}} \int_{\partial B(0,r)} |u|^2 \right).$$

Par conséquent, si on note

$$H_u(r) := \frac{1}{r^{d-1}} \int_{\partial B(0,r)} |u|^2,$$

on a $\beta_u(r) = \frac{r H'_u(r)}{2 H_u(r)}$.

Le résultat suivant est dû à AGMON (1966), et ALMGREN JR. (1979). Une preuve peut être trouvée dans le livre HAN et LIN (2013, § 2.2).

THÉORÈME 4.1. — *Soit u une fonction harmonique sur $B(0, R) \subset \mathbb{R}^d$. Alors la fonction $]0, R[\ni r \mapsto \beta_u(r)$ est croissante.*

De manière équivalente, l'application $r \mapsto \log(H_u(e^r))$ est convexe. Ce résultat peut être vu comme un analogue, pour les fonctions harmoniques, du théorème des trois cercles de Hadamard pour les fonctions holomorphes⁽⁵⁾.

Nous allons maintenant donner un analogue de ce résultat pour les solutions d'équations elliptiques plus générales.

5. Rappelons l'énoncé de ce théorème classique : Soit f une fonction holomorphe sur $B(0, R) \subset \mathbb{C}$. Pour tout $r \in]0, R[$, notons $M(r) := \sup_{z \in \partial B(0,r)} |f(z)|$. Alors $r \mapsto \log M(e^r)$ est une fonction convexe.

4.2. Fréquence des solutions d'équations elliptiques

Soit $R > 0$, et $A(x)$ une famille de matrices symétriques de taille $d \times d$, telle que $A(0) = \text{Id}$, vérifiant (13) et (14).

Soit $u \in C^\infty(B(0, R))$ une solution de (11). On définit

$$H_u(r) := \int_{\partial B(0,r)} \mu(x) |u|^2(x)$$

$$I_u(r) := \int_{B(0,r)} \langle A(x) \nabla u(x), \nabla u(x) \rangle,$$

où $\mu(x)$ est comme dans (14).

Une preuve du théorème suivant peut être trouvée dans LOGUNOV et MALINNIKOVA (2019a, § 2.1). Ce résultat est une variante du résultat de GAROFALO et LIN (1986). Nous renvoyons aussi à MANGOUBI (2013), pour un résultat plus précis et une preuve plus simple que celle de GAROFALO et LIN (1986).

THÉORÈME 4.2. — *Soit $R > 0$, et $A(x)$ une famille de matrices symétriques vérifiant (13) et (14) pour $x \in B(0, R)$. Il existe $C > 0$ ne dépendant que de d , R , Λ et Γ telle que, pour toute solution u de (11), la fonction $]0, R[\ni r \mapsto e^{Cr} \frac{r I_u(r)}{H_u(r)}$ est croissante.*

Comme précédemment, on définit la *fréquence* de u dans $B(0, R)$ par

$$\beta_u(r) := \frac{r H'_u(r)}{2 H_u(r)}.$$

Un calcul simple, mais un peu long, (voir LOGUNOV et MALINNIKOVA, 2019a, § 2.1) montre que

$$\beta_u(r) = \frac{r I_u(r)}{H_u(r)} + O(r)$$

On déduit facilement de ce fait et du théorème 4.2 la propriété suivante de *quasi-monotonie* de β_u .

COROLLAIRE 4.3. — *Soit $R > 0$, et $A(x)$ une famille de matrices symétriques vérifiant (13) et (14) dans $B(0, R)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $0 < R_0 < R$ tel que, pour tout $0 < r_1 < r_2 < R_0$, et toute solution u de (11), on a*

$$\beta_u(r_1) \leq (1 + \varepsilon) \beta_u(r_2).$$

On a

$$(17) \quad \frac{H_u(e^{r_2})}{H_u(e^{r_1})} = \exp \left(2 \int_{r_1}^{r_2} \beta_u(e^r) dr \right),$$

d'où l'on tire facilement que

$$(18) \quad \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{2\beta_u(r_1)(1-\varepsilon)} \leq \frac{H_u(r_2)}{H_u(r_1)} \leq \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{2\beta_u(r_2)(1+\varepsilon)}$$

pour r_1, r_2 assez petits.

COROLLAIRE 4.4. — Soit u une solution de (11) telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $H_u(r) = O(r^N)$. Alors $u \equiv 0$.

En particulier, si u est une solution lisse dont les dérivées de tout ordre s'annulent en zéro, alors $u \equiv 0$.

Démonstration. — Supposons par l'absurde que u n'est pas la fonction nulle. Alors, par le principe de prolongement unique, u ne peut pas s'annuler sur un ouvert non vide.

Par (18), on a pour tout $r \leq r_0$:

$$H_u(r) \geq H_u(r_0) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{2\beta_u(r_0)(1+\varepsilon)}$$

ce qui est absurde. □

Remarque 4.5. — PLIŠ (1963) a montré que le corollaire 4.4 était faux lorsque $x \mapsto A(x)$ n'est pas Lipschitz, mais seulement α -Hölder, pour n'importe quel $\alpha \in]0, 1[$.

4.3. Structure de l'ensemble singulier

Soit (\mathcal{M}, g) une variété riemannienne de dimension d , et soit φ une solution lisse de l'équation

$$\Delta_g \varphi = 0.$$

Notons $\mathcal{S}(\varphi) := \{x \in \mathcal{M}; \varphi(x) = |\nabla_g \varphi(x)| = 0\}$. Le résultat suivant a été prouvé pour la première fois dans CAFFARELLI et FRIEDMAN (1985), et implique immédiatement le Lemme 1.1.

PROPOSITION 4.6. — Il existe une famille dénombrable (S_j) de sous-variétés de \mathcal{M} de dimension $d - 2$ telle que

$$\mathcal{S}(\varphi) \subset \bigcup_j S_j.$$

Démonstration. — Par le corollaire 4.4, on sait que toutes les dérivées de φ ne peuvent pas s'annuler en un point. Notons $u \in C^\infty(B(0, R))$ l'image de φ dans une carte locale. L'équation satisfaite par u se réécrit comme

$$(19) \quad \sum_{1 \leq i, j \leq d} a_{i,j}(x) \partial_{i,j} u(x) + \sum_{i=1}^d b_i(x) \partial_i u(x) = 0,$$

où les fonctions $a_{i,j}$ et b_j sont lisses, et il existe $c > 0$ tel que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ et tout $x \in B(0, R)$, on a

$$(20) \quad \sum_{1 \leq i, j \leq d} a_{i,j}(x) |\xi|^2 \geq c |\xi|^2.$$

Soit $x \in B(0, R)$. On définit l'ordre d'annulation de u en x , noté $\mathcal{O}(x)$, comme l'entier tel que on a $\partial^\beta u(x) = 0$ pour tout multi-indice $\beta \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\beta| < \mathcal{O}(x)$, et tel qu'il existe $\beta' \in \mathbb{N}^d$ avec $|\beta'| = \mathcal{O}(x)$ tel que $\partial^{\beta'} u(x) \neq 0$.

On sait que seul un nombre fini de dérivées de u peuvent s'annuler en un point. Ainsi, on a $\mathcal{S}(u) = \bigcup_{n \geq 2} \mathcal{S}_j(u)$, où $\mathcal{S}_j(u) := \{x \in B(0, R); \mathcal{O}(x) = j\}$.

Montrons que, pour tout $j \geq 2$, $\mathcal{S}_j(u)$ est contenu dans une sous-variété de $B(0, R)$ de dimension $d - 2$. Soit $x_0 \in \mathcal{S}_j(u)$. Par hypothèse, il existe $\alpha \in \mathbb{N}^d$ avec $|\alpha| = j - 2$ tel que, si l'on note $v = \partial^\alpha u$, on a $\partial^2 v(x_0) \neq 0$. En appliquant ∂^α à (19), et en évaluant en x_0 , on obtient

$$(21) \quad \sum_{1 \leq i, j \leq d} a_{i,j}(x_0) \partial_{i,j} v(x_0) = 0,$$

car toutes les dérivées d'ordre $\leq |\alpha| + 1$ de u s'annulent en x_0 par hypothèse.

Quitte à faire un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer que la hessienne ($\partial^2 v(x_0)$) est diagonale. Par hypothèse, elle possède au moins une valeur propre non-nulle. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ ses valeurs propres, avec $\lambda_1 \neq 0$. L'équation (21) se réécrit alors

$$(22) \quad \sum_{j=1}^d a(j) \lambda_j = 0,$$

avec les $a(j)$ tous strictement positifs grâce à (20). Il doit donc exister une autre valeur propre (par exemple, λ_2) qui est non nulle. On a alors

$$\partial \partial_1 v = (\lambda_1, 0, \dots, 0), \quad \partial \partial_2 v = (0, \lambda_2, \dots, 0).$$

Par le théorème des fonctions implicites, on en déduit que, dans un voisinage de x_0 , $\{\partial_1 v = \partial_2 v = 0\}$ est une variété de dimension $d - 2$. Cette variété contient $\mathcal{S}_j(u)$ dans un voisinage de x_0 , d'où le résultat. \square

4.4. Quasi-monotonie pour les indices de doublement

Rappelons que, lorsque u est solution d'une équation de la forme (11), les estimées elliptiques usuelles permettent d'estimer son supremum sur une boule par sa norme L^2 sur une sphère un peu plus grande. Plus précisément, si $A(x)$ vérifie (13) et (14) pour $x \in B(0, 1)$, et si $\varepsilon > 0$, alors on peut trouver C_1 ne dépendant que de d, Λ, Γ et ε telle que, pour toute solution u de (11), tout $x \in B(0, 1)$ et tout $r > 0$ tel que $B(x, r(1+\varepsilon)) \subset B(0, 1)$, on a

$$(23) \quad \sup_{\partial B(x,r)} |u|^2 \leq C_1 \frac{H(r(1+\varepsilon))}{r^{d-1}},$$

tandis qu'on a trivialement l'inégalité opposée

$$(24) \quad \frac{H(r)}{r^{d-1}} \leq C_2 \sup_{\partial B(x,r)} |u|^2.$$

En combinant (23), (24) et le corollaire 4.3, on peut obtenir le résultat suivant. Nous renvoyons le lecteur à LOGUNOV (2018a, § 7) pour une preuve. Rappelons que l'indice de doublement \mathcal{N}_u a été introduit dans la définition 3.7.

PROPOSITION 4.7. — *Soit $A(x)$ une famille de matrices symétriques vérifiant (13) et (14) pour $x \in B(0, 1)$, et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $C > 0$ ne dépendant que de d, Λ, Γ et ε*

telle que, pour toute solution u de (11), pour tous $x \in B(0, 1)$, $\rho > 0$ et $t > 2$ tels que $B(x, t\rho) \subset B(0, 1)$, on a

$$(25) \quad t^{\mathcal{N}_u(x, \rho)(1-\varepsilon)-C} \leq \frac{\sup_{B(x, t\rho)} |u|}{\sup_{B(x, \rho)} |u|} \leq t^{\mathcal{N}_u(x, t\rho)(1+\varepsilon)+C}$$

Remarquons que, si u est une fonction C^∞ , alors $\lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{N}_u(x, r)$ est l'ordre d'annulation de u en x . En particulier, si $u(x) \neq 0$, alors l'ordre d'annulation sur une petite boule centrée en x ne sera pas très grand. En fait, grâce aux inégalités de Harnack, les indices de doublement sont bornés sur toutes les boules où u est de signe constant, comme le dit la remarque suivante.

Remarque 4.8. — Si u vérifie (11) dans $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, et $u > 0$ dans Ω , alors pour tout $\omega \Subset \Omega$, il existe $C = C(\omega, \Omega, \Gamma, \Lambda)$ telle que, pour tous $x, y \in \omega$, on a

$$\frac{1}{C}u(y) \leq u(x) \leq Cu(y).$$

4.5. Un résultat de continuation unique qualitative

Nous avons utilisé précédemment le *principe de continuation unique* pour les équations de la forme (11), qui affirme que si une solution est nulle sur un petit ouvert, alors elle doit être nulle partout. Nous avons vu un raffinement de ce principe dans le corollaire 4.4.

Une autre direction généralisant le principe de continuation unique est la *continuation unique quantitative*, dont le principe général est que, si une solution de (11) est très petite sur un ensemble assez grand, alors elle doit être petite partout. Nous renvoyons le lecteur à LOGUNOV et MALINNIKOVA (2019a) pour un panorama historique des résultats concernant la continuation unique quantitative, et pour des résultats plus récents.

Dans la suite, nous aurons besoin du lemme suivant qui affirme que, si une solution d'une équation elliptique est petite ainsi que son gradient sur une face d'un cube, alors elle sera petite sur tout le cube.

Si $Q \subset \mathbb{R}^d$ est un cube et si $r > 0$, nous noterons rQ le cube de mêmes centre et axes, et de rayon r fois plus grand.

PROPOSITION 4.9. — *Soit $A(x)$ une famille de matrices symétriques vérifiant (12), (13) et (14) pour $x \in [-1, 1]^d$.*

Il existe α ne dépendant que de d , et $r_0, C > 0$ ne dépendant que de d, Γ, Λ , tels que pour tout $0 < \varepsilon < 1$, si q est un cube de côté r inclus dans $[-r_0, r_0]^d$, dont on note F l'une des faces, si u est une solution de (11) vérifiant $|u| \leq 1$ sur q et $|u| \leq \varepsilon$ sur F et $|\nabla u| \leq \frac{\varepsilon}{r}$ sur F , alors on a

$$\sup_{\frac{1}{2}q} |u| \leq C\varepsilon^\alpha.$$

Bien entendu, supposer que (12) est vérifié n'est pas contraignant : il suffit de faire un changement linéaire de coordonnées (et de modifier en conséquence la définition de ce qu'est un cube. . .).

Ce résultat peut être prouvé par des estimées de Carleman (voir le lemme 4.3 de LIN (1991) pour un résultat un peu plus faible), ou en utilisant la monotonie de la fréquence (voir le théorème 1.7 de ALESSANDRINI et al. (2009) pour un résultat un peu plus fort).

5. COMBINATOIRE SUR LES INDICES DE DOUBLEMENT

Dans toute cette section, $A(x)$ sera une famille de matrices vérifiant (13) et (14) dans $B(0, R_0) \subset \mathbb{R}^d$, u sera une solution de (11) dans $B(0, R_0) \subset \mathbb{R}^d$, et, sauf mention du contraire, toutes les constantes qui apparaîtront par la suite ne dépendront que de Γ , Λ , R_0 et d . Nous omettrons donc souvent de noter l'indice u dans les indices de doublement $\mathcal{N}_u(x, r)$.

Si $Q \subset \mathbb{R}^d$ est un cube, on définit l'indice de doublement de Q comme

$$N(Q) := \sup_{x \in Q, r < \text{diam}(Q)} \mathcal{N}(x, r).$$

Le but de cette section est de montrer que, même si l'indice d'un cube est grand, il existe de nombreux sous-cubes dont l'indice est plus petit.

Pour montrer de tels résultats, nous commencerons, dans la section 5.1, nous établirons des propriétés d'*additivité* des indices de doublement, au sens où, s'il existe suffisamment de boules où les indices de doublement sont grands, alors il existera une boule où l'indice de doublement sera encore plus grand. Ce principe se déclinera sous la forme de deux lemmes, le lemme du simplexe et le lemme de l'hyperplan.

Munis de ces propriétés d'additivité, nous partirons dans la section 5.2 d'un grand cube d'indice de doublement N , que nous découperons en nombreux petits cubes, et nous montrerons que la plupart des petits cubes doivent avoir des indices de doublement plus petits.

5.1. Les lemmes du simplexe et de l'hyperplan

Le lemme du simplexe. — Soient x_1, \dots, x_{d+1} les sommets d'un simplexe S dans \mathbb{R}^d , que l'on suppose non dégénéré, et soit x_0 le barycentre de ces points. On note $\text{diam}(S)$ le diamètre de S , et $\text{lar}(S)$ la *largeur* de S , c'est-à-dire la distance minimale entre deux hyperplans entre lesquels S est contenu. On définit la largeur relative de S par

$$\text{lar}_{rel}(S) := \frac{\text{lar}(S)}{\text{diam}(S)}.$$

Soit $a > 0$ tel que $\text{lar}_{rel}(A) > a$.

Nous utiliserons le lemme suivant, qui est illustré par la figure 1, et qui ne repose que sur de la géométrie euclidienne élémentaire.

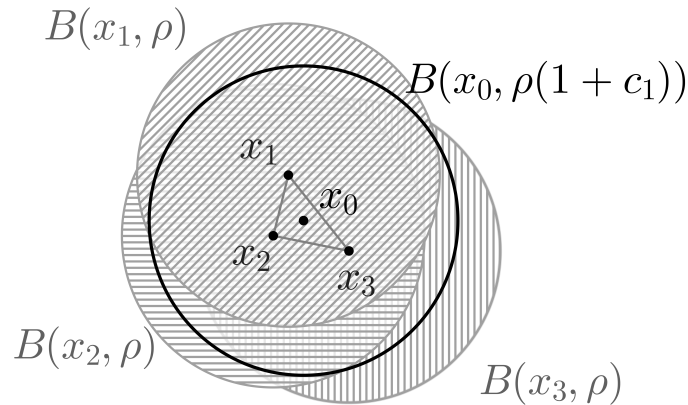


FIGURE 1. La situation du lemme 5.1 (i)

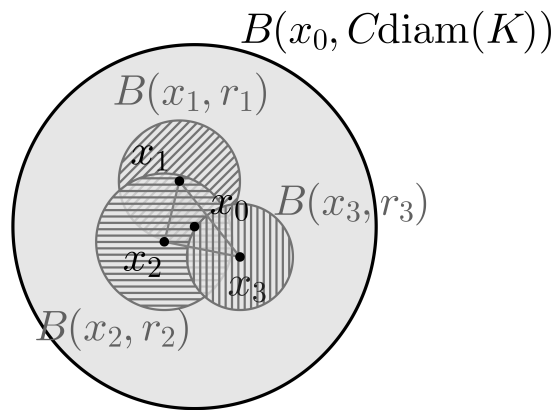


FIGURE 2. La situation du lemme 5.2

LEMME 5.1. — (i) Il existe $c_1 > 0$ et $K \geq 2/a$, ne dépendant que de d et de a , tels que, si $\rho = K \text{diam}(S)$, on a $B(x_0, \rho(1 + c_1)) \subset \cup_{i=1}^{d+1} B(x_i, \rho)$.

(ii) Soit $\rho > 0$. Pour tout t assez grand, il existe $\delta(t)$ tel que $\delta(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ et pour chaque i , on a $B(x_i, \rho t) \subset B(x_0, \rho t(1 + \delta(t)))$.

On peut déduire du résultat précédent et de la proposition 4.7 le lemme du simplexe suivant, qui est illustré par la figure 2 :

LEMME 5.2 (Le lemme du simplexe). — Soit $K \geq 2/a$ comme ci-dessus, et soient r_1, \dots, r_{d+1} des rayons dans $]0, \frac{K}{2} \text{diam}(S)[$. Il existe des nombres positifs $c = c(a, d)$, $C = C(a, d) \geq K$, $R_1 = R_1(\Gamma, \Lambda, d, a, R_0) < 1$, $N_0 = N_0(\Gamma, \Lambda, d, a, R_0)$ tels que, si $S \subset B(0, R_1)$ et si, pour tout $i = 1, \dots, d + 1$, on a $\mathcal{N}(x_i, r_i) > N$ pour un $N \geq N_0$, alors $\mathcal{N}(x_0, C \text{diam}(S)) > N(1 + c)$.

Idée de la démonstration. — Pour simplifier les notations dans la preuve, nous supposons que (25) est vérifiée pour $\varepsilon = 0$, $C = 0$, de sorte que

$$(26) \quad t^{\mathcal{N}(x,R)} \leq \frac{\sup_{B(x,tR)} |u|}{\sup_{B(x,R)} |u|} \leq t^{\mathcal{N}(x,tR)}$$

On a donc $\mathcal{N}(x_i, K \operatorname{diam}(S)) > N$ pour chaque i , et on peut donc multiplier tous les r_i par un facteur pour les rendre tous égaux à $\rho = K \operatorname{diam}(S)$.

Notons $M := \sup \{|u(x)|; x \in \bigcup_i B(x_i, \rho)\}$. En appliquant (26) et le point (ii) du lemme 5.1, on a

$$\left[\frac{t(1 + \delta(t))}{1 + c_1} \right]^{\mathcal{N}(x_0, \rho t(1 + \delta(t)))} \geq \frac{\sup_{B(x_0, \rho t(1 + \delta(t)))} |u|}{\sup_{B(x_0, (1 + c_1)\rho)} |u|}.$$

Dans le membre de droite, le numérateur est supérieur à

$$\sup \left\{ |u(x)|; x \in \bigcup_i B(x_i, \rho t) \right\} \geq M t^N,$$

par (26) et par définition de N . Quant au dénominateur, il est supérieur à M par le point (i) du lemme 5.1. On a donc

$$t^{\mathcal{N}(x_0, \rho t(1 + \delta(t)))} \left[\frac{(1 + \delta(t))}{1 + c_1} \right]^{\mathcal{N}(x_0, \rho t(1 + \delta(t)))} \geq t^N.$$

En prenant t assez grand, on peut se débrouiller pour que $\left[\frac{(1 + \delta(t))}{1 + c_1} \right]^{\mathcal{N}(x_0, \rho t(1 + \delta(t)))}$ soit de la forme $t^{-c \mathcal{N}(x_0, \rho t(1 + \delta(t)))}$, pour un $c > 0$, d'où l'on tire le résultat. \square

Le lemme de l'hyperplan. — Soit $Q = [-R, R]^d \subset B(0, R_0)$ un cube. Si $A \in \mathbb{N}$, on partitionne Q en $(2A + 1)^d$ cubes disjoints de côté $\frac{2R}{2A + 1}$, que l'on note $(q_i^{A,R})_{i \in I_A}$, où $I_A = \{1, \dots, (2A + 1)^d\}$. Notons $I_{0,A} = \{i \in I; q_i^{A,R} \cap \{x_d = 0\} \neq \emptyset\}$, de sorte que $|I_{0,A}| = (2A + 1)^{d-1}$.

LEMME 5.3. — *Il existe A_0 ne dépendant que de d , et N_0 et R_2 tels que, pour tous $A > A_0$, $N > N_0$, $R < R_2$, le résultat suivant soit vrai.*

Supposons que pour tout $i \in I_{0,A}$, il existe $x_i \in q_i$ et un $r_i < 10 \operatorname{diam}(q_i) > N$ tel que $\mathcal{N}(x_i, r_i) > N$. Alors $N(Q) > 2N$.

Moralement, le lemme nous dit que si l'indice de doublement de tous les petits cubes $10q_i$, $i \in I_{0,A}$ est plus grand que N , alors l'indice de doublement de Q sera plus grand que $2N$.

Idée de la preuve. — Sans perte de généralité, on peut supposer que Q est le cube unité (par un changement d'échelle), et que $|u| \leq 1$ sur Q . Par la proposition 4.7, on peut

montrer que pour chaque $i \in I_{0,A}$, la fonction u est petite sur $2q_i$, au sens où on peut trouver des constantes $c, C > 0$ ne dépendant que de d, Λ, Γ, R_0 telles que

$$\sup_{2q_i} |u| \leq CA^{-cN}.$$

Par des estimées elliptiques usuelles, on obtient une estimée similaire pour $\sup_{q_i} |\nabla u|$.

Ainsi, la fonction u et son gradient sont plus petites que $\varepsilon := CA^{-cN}$ sur l'hyperplan $\{x_d = 0\}$. On peut alors appliquer la proposition 4.9 pour en déduire que $|u| \leq C'A^{-c'N}$ sur un cube q de côté r ne dépendant ni de A , ni de N . En appliquant la borne inférieure dans (25), on en déduit facilement qu'il existe une boule incluse dans q ayant un indice de doublement supérieur à $c''N \log A$, d'où le résultat en prenant A assez grand. \square

5.2. Découper des cubes

DÉFINITION 5.4. — Soit $Q = [-R, R]^d \subset \mathbb{R}^d$ un cube, et $A \in \mathbb{N}$. Si $k \geq 0$, on introduit $I_A^k = \{(i_1, \dots, i_k)\}$, où les $i_j \in I_A = \{1, \dots, (2A+1)^d\}$. On définit les cubes $q_{i_1, \dots, i_k}^{A,Q}$ de manière inductive : les $q_i^{A,Q}$ sont définis comme dans le paragraphe précédent le lemme 5.3, puis, si $q_{i_1, \dots, i_k}^{A,Q}$ a été défini, on le partitionne en $(2A+1)^d$ cubes disjoints de côté $\frac{2R}{(2A+1)^{k+1}}$, que l'on note $(q_{i_1, \dots, i_k, i_{k+1}}^{A,R})_{i_{k+1} \in I_A}$.

Le lemme suivant est une conséquence du lemme de l'hyperplan.

LEMME 5.5. — Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A_1 = A_1(d, \varepsilon)$ et R_2, N_0 tels que, si $Q = [-R, R]^d \subset \mathbb{R}^d$ avec $R < R_2$, et si $N > \max(N_0, N(Q))$, alors

$$\left| \left\{ i \in I_{0, A_1}; N(q_i^{A, Q}) \geq \frac{N}{2} \right\} \right| \leq \varepsilon A_1^{d-1}.$$

Démonstration. — Soit $N > \max(N_0, N(Q))$. Par le lemme 5.3, on sait qu'il existe au moins un $i \in I_{0, A}$ tel que $N(q_i^{A_0, R}) \leq \frac{N}{2}$.

Notons M_k le nombre d'éléments de I_A^k tels que le cube $q_{i_1, \dots, i_k}^{A, Q}$ intersecte $\{x_d = 0\}$ et a un indice de doublement supérieur à $N/2$.

Si $N(q_{i_1, \dots, i_k}^{A, Q}) < \frac{N}{2}$, alors pour tout $i_{k+1} \in I_A$, on a $N(q_{i_1, \dots, i_k, i_{k+1}}^{A, Q}) < \frac{N}{2}$.

De plus, par le lemme 5.3, parmi les sous-cubes d'un cube intersectant $\{x_d = 0\}$, au moins un a un indice inférieur à $N/2$ (voir la figure 3).

On obtient donc que $M_{k+1} \leq M_k \left((2A_0 + 1)^{d-1} - 1 \right)$, et, par conséquent,

$$M_k \leq \left((2A_0 + 1)^{d-1} - 1 \right)^k = \left(1 - \frac{1}{(2A_0 + 1)^{d-1}} \right)^k (2A_0 + 1)^{k(d-1)}.$$

En prenant k suffisamment grand pour que $\left(1 - \frac{1}{(2A_0 + 1)^{d-1}} \right)^k \leq \varepsilon$, et en prenant $2A_1 + 1 = (2A_0 + 1)^k$, on obtient le résultat. \square

Le lemme précédent n'estimait que le nombre de cubes ayant un grand indice de doublement près de l'hyperplan $\{x_d = 0\}$. En combinant ce lemme avec le lemme du simplexe, on peut déduire le théorème suivant.

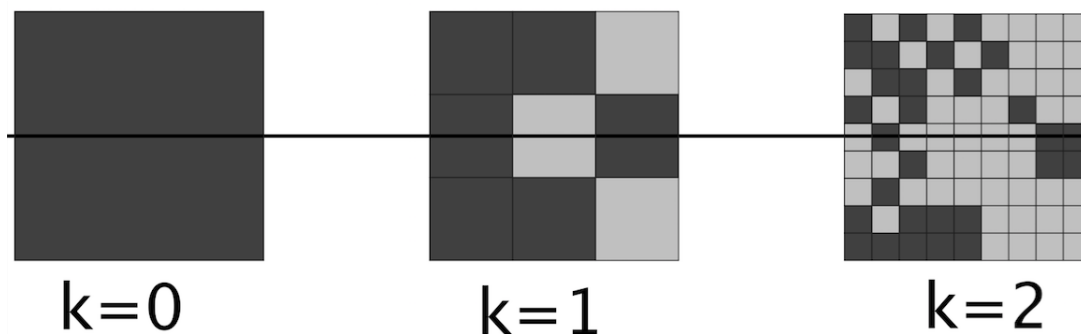


FIGURE 3. La construction itérative utilisée dans la preuve du lemme 5.5. Les cubes d'indice de doublement inférieur à $N/2$ sont en gris clair, les autres sont en gris foncé.

THÉORÈME 5.6. — *Il existe $c > 0$, $A = A(d)$, N_0 , R_2 tels que, pour tout cube $Q \subset B(0, R_2)$, on a le résultat suivant.*

Si on partitionne Q en A^n sous-cubes égaux, alors le nombre de sous-cubes ayant un indice de doublement supérieur à $\max\left(\frac{N(Q)}{1+c}, N_0\right)$ est inférieur à $\frac{1}{2}A^{d-1}$.

Choisissons $A_1 \in \mathbb{N}$ assez grand pour que le lemme 5.5 s'applique pour $\varepsilon = \frac{1}{6^{d+1}}$.

On introduit les mêmes notations que dans la définition 5.4. La constante $c > 0$ étant fixée, on dira qu'un cube $q \subset Q$ est *mauvais* si $N(q) \geq \frac{N(Q)}{1+c}$, et on dira que q est *bon* autrement.

Le théorème découle alors du lemme suivant.

LEMME 5.7. — *Soit $c > 0$ suffisamment petit. Il existe k_0 tel que, pour tout $k \geq k_0$ et tous $i_1, \dots, i_k \in I_{A_1}^k$, on a*

$$\left| \left\{ i_{k+1} \in I_{A_1}; q_{i_1, \dots, i_k, i_{k+1}}^{A_2, Q} \text{ est mauvais} \right\} \right| \leq \frac{1}{2}(2A_1 + 1)^{d-1}.$$

Preuve que le lemme 5.7 implique le théorème 5.6. — Notons M_k le nombre de mauvais cubes parmi les $q_{i_1, \dots, i_k}^{A_2, Q}$. On déduit du lemme 5.7 et du fait que les sous-cube d'un bon cube sont toujours bons que, pour tout $k \geq k_0$, on a $M_{k+1} \leq \frac{1}{2}(2A_1 + 1)^{d-1}M_k$, et donc que $M_k \leq M_{k_0} \frac{1}{2^{k-k_0}}(2A_1 + 1)^{(d-1)(k-k_0)}$. En prenant $A = (2A_1 + 1)^{(d-1)k}$ pour k assez grand, on obtient bien le résultat voulu. \square

Avant de prouver le lemme 5.7, introduisons quelques notations.

Si $q \subset Q$ est un cube et $c > 0$, on introduit l'ensemble des mauvais points de q

$$\mathcal{B}(q) = \left\{ x \in q; \exists r \in]0, \text{diam}(q)[; \mathcal{N}(x, r) > \frac{N(Q)}{1+c} \right\}.$$

Ainsi, q est mauvais si et seulement si $\mathcal{B}(q) \neq \emptyset$. Si q est mauvais, on définit alors

$$\widetilde{\text{lar}}(q) := \frac{\text{lar}(\mathcal{B}(q))}{\text{diam}(q)}.$$

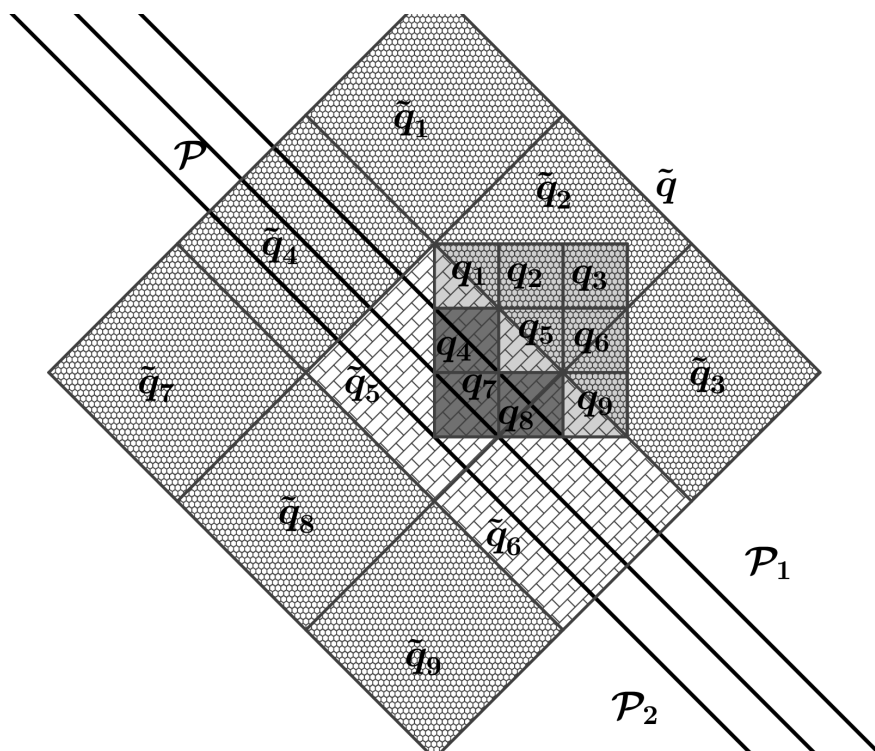


FIGURE 4. Tous les mauvais points de q sont compris dans un voisinage de l'hyperplan \mathcal{P} , entre \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 . Les mauvais sous-cubes de q sont donc tous inclus dans des mauvais sous-cubes de \tilde{q} intersectant \mathcal{P} . Chaque sous-cube de q intersecte au plus 2^d sous-cubes de \tilde{q} .

LEMME 5.8. — Pour tout $\ell > 0$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$, $c_0 > 0$ tels que si $k \geq k_0$, $c < c_0$, alors pour tous $i_1, \dots, i_k \in I_{A_1}^k$, on a

$$\widetilde{\text{lar}}(q_{i_1, \dots, i_k}^{A_1, Q}) < \ell.$$

Démonstration du lemme 5.8. — On utilisera le fait suivant de géométrie euclidienne : il existe une constante $c(d)$ ne dépendant que de d telle que, pour tout ensemble $F \subset q$, on peut trouver un simplexe $S \subset F$ tel que $\text{lar}(S) \geq c(d)\text{lar}(F)$.

On applique ce fait à $F = \mathcal{B}(q)$, et on pose $a := \frac{\widetilde{\text{lar}}(q)}{2c(d)} \leq \frac{\text{lar}(S)}{2\text{diam}(q)}$, de sorte que $\text{lar}(S) > a$, et $\text{diam}(S) > a \cdot \text{diam}(q)$.

Pour chaque sommet $x_j \in S$, on peut trouver un rayon $r_j < \text{diam}(q) < \frac{1}{a}\text{diam}(S)$ tel que $\mathcal{N}(x_j, r_j) \geq \frac{N(Q)}{1+c}$. On peut alors appliquer le lemme 5.2 au simplexe S , avec $N = \frac{N(Q)}{1+c}$. On obtient qu'il existe des constantes c_0 et C_0 ne dépendant que de a , donc que de $\widetilde{\text{lar}}(q_{i_1, \dots, i_k})$, telles que $\mathcal{N}(x_0, C_0\text{diam}(S)) > \frac{1+c_0}{1+c}N(Q)$, où x_0 est le barycentre du simplexe S .

Si $c < c_0$, on en déduit que $\mathcal{N}(x_0, C_0\text{diam}(S)) > N(Q)$, ce qui est absurde dès que $C_0\text{diam}(S) \leq \text{diam}(Q)$, et donc dès que k est assez grand, car $\text{diam}(S) \leq 3^{-k}\text{diam}(Q)$. \square

Démonstration du lemme 5.7. — Pour alléger les notations, nous noterons q à la place de $q_{i_1, \dots, i_k}^{A_1, Q}$ dans cette preuve.

Par le lemme 5.8, quitte à prendre k assez grand et c assez petit, on peut supposer que $\widetilde{\text{lar}}(q) < \frac{1}{2A_1+1}$. Ainsi, il existe un hyperplan \mathcal{P} tel que tous les mauvais points de q sont inclus dans un voisinage de taille $\frac{1}{2A_1+1}$ de \mathcal{P} . On supposera aussi c assez petit pour que $\frac{1}{1+c} > \frac{3}{4}$.

On construit alors un cube \tilde{q} dont l'une des faces est parallèle à \mathcal{P} , dont le centre est sur $\mathcal{P} \cap q$ (voir la figure 4), et dont le côté est $10\sqrt{d}\text{diam}(q)$. On a alors $q \subset \tilde{q}$. On divise \tilde{q} en $(2A_1 + 1)^d$ sous-cubes, notés $(\tilde{q}_i)_{i \in I_{A_1}}$, et on note I_{0, A_1} l'ensemble des sous-cubes de \tilde{q} intersectant \mathcal{P} . On a alors

$$\mathcal{B}(q) \subset \bigcup_{i \in I_{0, A_1}} \tilde{q}_i.$$

Comme, de plus, chaque q_j intersecte au plus $2^d \tilde{q}_i$, on a

$$|\{i \in I_{A_0} | q_i \text{ est mauvais}\}| \leq 2^d \left| \left\{ j \in I_{0, A_1} | N(\tilde{q}_j) > \frac{N(Q)}{1+c} \right\} \right|.$$

Le cube \tilde{q} n'est pas nécessairement inclus dans Q , mais il est toujours dans un petit voisinage de Q , de sorte qu'on peut montrer, à partir de la proposition 4.7 que pour k assez grand,

$$N(\tilde{q}) \leq \frac{3}{2}N(Q).$$

On a alors

$$\begin{aligned} \left| \left\{ j \in I_{0, A_1} | N(\tilde{q}_j) > \frac{N(Q)}{1+c} \right\} \right| &\leq \left| \left\{ j \in I_{0, A_1} | N(\tilde{q}_j) > \frac{2N(\tilde{q})}{3(1+c)} \right\} \right| \\ &\leq \left| \left\{ j \in I_{0, A_1} | N(\tilde{q}_j) > \frac{N(\tilde{q})}{2} \right\} \right|. \end{aligned}$$

On peut alors appliquer le lemme 5.5, en se rappelant que $\varepsilon = 6^{-d-1}$, pour obtenir $\left| \left\{ j \in I_{0, A_1} | N(\tilde{q}_j) > \frac{N(\tilde{q})}{2} \right\} \right| \leq 6^{-d-1} A_1^{d-1} \leq 2^{-d-1} (2A_1 + 1)^{d-1}$, d'où

$$|\{i \in I_{A_0} | q_i \text{ est mauvais}\}| \leq \frac{1}{2} (2A_1 + 1)^{d-1},$$

et le résultat suit. \square

Le théorème 5.6 est tout ce dont nous avons besoin pour prouver le théorème 3.8. Toutefois, pour le théorème 3.5, nous aurons besoin du raffinement suivant :

PROPOSITION 5.9. — *Il existe $c_1, c_2, C > 0$ et $B_0 \in \mathbb{N}$ ne dépendant que de d , ainsi que N_0, R_3 tels que, pour tout cube $Q \subset B(0, R_3)$, on a le résultat suivant : pour tout $B \geq B_0$, pour toute solution u de (11), on a*

$$(27) \quad \left| \left\{ i \in I_B; N(q_i^{B, Q}) \leq \max \left(N_u(Q) 2^{-c_1 \log B / \log \log B}, N_0 \right) \right\} \right| \leq C B^{d-1-c_2}.$$

Nous ne prouverons pas cette proposition, et renvoyons le lecteur à la section 5 de LOGUNOV (2018b). L'idée de la preuve est d'itérer de nombreuses fois le résultat du théorème 5.6. À chaque nouvelle étape, une proportion d'au moins $1 - \frac{1}{2A}$ des cubes voit son indice de doublement multiplié par au plus $\frac{1}{1+c}$, s'il n'est pas déjà inférieur à N_0 .

On remarque que si, à chaque étape, une proportion d'exactement $1 - \frac{1}{2A}$ des cubes voyait son indice de doublement multiplié exactement par $\frac{1}{1+c}$, alors le nombre de cubes à l'étape n ayant un indice de doublement valant $N(Q)(1+c)^{-k}$ serait exactement décrit par une loi binomiale. L'inégalité (27) doit donc être rapprochée d'une estimée sur la queue de la loi binomiale.

6. DES INDICES DE DOUBLEMENT AUX ENSEMBLES NODAUX

6.1. Une borne supérieure polynomiale

Nous allons maintenant prouver une proposition qui implique immédiatement le théorème 3.8.

PROPOSITION 6.1. — *Il existe $\alpha > 0$ ne dépendant que de d , ainsi que R_2 tels que pour tout cube $Q \subset B(0, R_2)$, on a*

$$H^{d-1}(\{u = 0\} \cap Q) \leq C \text{diam}^{d-1}(Q) N_u(Q)^\alpha.$$

Démonstration. — Prenons c, R_2, N_0 et A comme dans le théorème 5.6. Notons

$$F(N) := \sup \left\{ \frac{H^{d-1}(\{u = 0\} \cap Q)}{\text{diam}^{d-1}(Q)} \right\},$$

où la borne supérieure est prise sur les u solutions de (11), $Q \subset B(0, R_2)$ un cube et $N_u(Q) \leq N$. Il s'agit de montrer que $F(N) \leq CN^\alpha$. Par HARDT et SIMON (1989), on a $F(N) < +\infty$ pour tout $N > 0$.

Montrons tout d'abord que, pour tout $N \geq N_0$, avec N_0 comme dans le théorème 5.6, on a

$$(28) \quad F(N) \leq 4AF\left(\frac{N}{1+c}\right).$$

Ceci suffit bien à prouver le théorème : il suffit de prendre α tel que $4A \leq (1+c)^\alpha$ et d'utiliser le fait que F est monotone.

Supposons qu'il existe un $N \geq N_0$ tel que (28) n'est pas vérifiée. Soient alors $Q \subset B(0, R)$, et u une solution de (11) avec $N_u(Q) \leq N$ et

$$(29) \quad \frac{H^{d-1}(\{u = 0\} \cap Q)}{\text{diam}^{d-1}(Q)} > \frac{3}{4}F(N).$$

On divise Q en A^d sous-cubes disjoints $(q_i)_{i \in I}$, de diamètre $A^{-1} \text{diam}(Q)$. Rappelons que pour tout $i \in I$, on a $N(q_i) \leq N$. Notons $I_1 = \left\{ i \in I; N(q_i) > \frac{N}{1+c} \right\}$, et $I_2 = \left\{ i \in I; N(q_i) \leq \frac{N}{1+c} \right\}$.

Par le théorème 5.6, on a $|I_1| \leq \frac{1}{2}A^{d-1}$. On écrit ensuite que

$$\begin{aligned} H^{d-1}(\{u=0\} \cap Q) &\leq \sum_{i \in I_1} H^{d-1}(\{u=0\} \cap q_i) + \sum_{i \in I_2} H^{d-1}(\{u=0\} \cap q_i) \\ &\leq \sum_{i \in I_1} F(N) \left(\frac{\text{diam}(Q)}{A} \right)^{d-1} + \sum_{i \in I_2} F\left(\frac{N}{1+c}\right) \left(\frac{\text{diam}(Q)}{A} \right)^{d-1} \\ &\leq \text{diam}(Q)^{d-1} \left[|I_1| F(N) A^{1-d} + |I_2| F\left(\frac{N}{1+c}\right) A^{1-d} \right] \\ &\leq \text{diam}(Q)^{d-1} \left[\frac{F(N)}{2} + AF\left(\frac{N}{1+c}\right) \right], \end{aligned}$$

car $|I| = A^d$. En combinant cela avec (29), on obtient

$$\frac{1}{4}F(N) < AF\left(\frac{N}{1+c}\right),$$

ce qui contredit la définition d'un mauvais N . On en déduit que tous les mauvais N sont inférieurs à N_0 . \square

6.2. La borne inférieure

Donnons maintenant les idées de la preuve du théorème 3.5. De façon analogue à la section précédente, on introduit la quantité

$$F(N) := \inf \left\{ \frac{H^{d-1}(\{u=0\} \cap B(x, \rho))}{\rho^{d-1}} \mid B(x, \rho) \subset B(0, R_0), \right. \\ \left. u \text{ vérifie (11) dans } B(0, 2R_0), u(x) = 0, \text{ et } N_u(B(0, R_0)) \leq N \right\},$$

où $N_u(B(0, R_0))$ est le supremum de $\mathcal{N}_u(x, \rho)$ sur l'ensemble des boules $B(x, \rho) \subset B(0, R_0)$.

Le résultat suivant est prouvé dans LOGUNOV (2018b), et implique immédiatement le théorème 3.5.

THÉORÈME 6.2. — *Il existe $c > 0$ tel que $F(N) \geq c$ pour tout $N > 0$.*

Avant de donner les idées de la preuve de cette proposition, prouvons le lemme suivant, qui est moins précis, mais permet de traiter les petites valeurs de N .

LEMME 6.3. — *Il existe c_2 tel que*

$$F(N) \geq \frac{c_2}{N^{d-2}}.$$

Idée de preuve du lemme 6.3. —

Étape 1 : Trouver de bonnes couches sphériques où les extremums ne croissent pas trop.

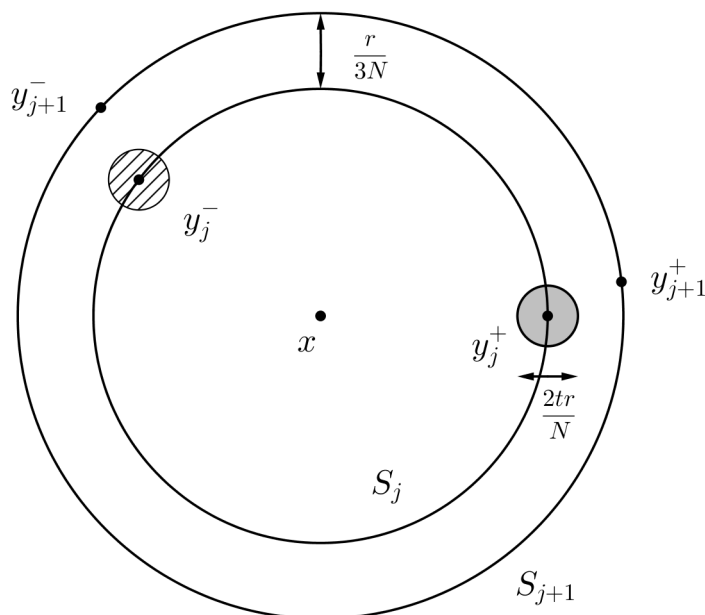


FIGURE 5. La construction de la seconde étape du lemme 6.3. Par hypothèse, $C'u(y_j^-) < u(y_{j+1}^-) < 0 < u(y_{j+1}^+) < C'u(y_j^+)$. La fonction u est alors positive dans la boule grise, et négative dans la boule hachurée.

On suppose que $u(x) = 0$, $N_u(B(x, r/2)) \leq N$. Par des estimées elliptiques usuelles, on obtient que

$$(30) \quad \frac{\max_{\partial B_r}(\pm u)}{\max_{\partial B_{2r/3}}(\pm u)} \leq C2^N.$$

On considère alors une suite de sphères S_j de centre x et de rayon $r_j := r \left(\frac{2}{3} + \frac{j}{3N} \right)$, pour $j = 0, \dots, N$. On note $m_j^+ := \max_{S_j} u$, $m_j^- := \min_{S_j} u$ et $\tau_j^\pm := \frac{|m_{j+1}^\pm|}{|m_j^\pm|}$. Par le principe du maximum, on a $\tau_j^\pm \geq 1$ pour tout j . De plus, $\prod_j \tau_j^\pm \leq C2^N$ par (30). On en déduit qu'il existe une constante $C' > 0$ et au moins $N/2$ indices j tels que

$$\tau_j^+ \leq C', \quad \tau_j^- \leq C'.$$

Étape 2 : Construire des boules de signe fixé dans chaque bonne couche sphérique.

Si j est un tel indice, on note y_j^\pm le point de S_j où $\pm u$ atteint son maximum (voir la figure 5). On a alors $u(y_j^+) = m_j^+$, et $\sup_{B(y_j^+, \frac{r}{6N})} u \leq C'm_j^+$. Par des estimées elliptiques sur le gradient de u , on en déduit l'existence d'un $t > 0$ tel que $u > 0$ sur $B(y_j^+, tr/N)$. De même, on trouve une boule de même rayon autour de y_j^- sur laquelle u est négative.

Sur chaque sphère de rayon compris entre $r \left(\frac{2}{3} + \frac{j}{3N} - \frac{t}{N} \right)$ et $r \left(\frac{2}{3} + \frac{j}{3N} + \frac{t}{N} \right)$, la fonction u s'annule. En tout, il y a $N/2$ telles couches sphériques. On a donc

$$H^{d-1}(\{y \in B(x, r); u(y) = 0\}) \geq \frac{N}{2} \times c \left(\frac{t}{N} \right)^{d-1},$$

d'où le résultat. □

En fait, le lemme 6.3 permet bien de prouver le théorème 6.2, grâce au lemme suivant.

LEMME 6.4. — *Il existe N_0 et $g : [N_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{N}$ avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = +\infty$ tels que, pour tout $N \geq N_0$, si u vérifie (11) dans $B(0, 2R_0)$ et $N_u(x, \rho) \geq N_0$, alors on peut trouver au moins $N^{(d-1)/2}g(N)$ boules disjointes $B(x_i, \frac{\rho}{\sqrt{N}}) \subset B(x, 2\rho)$ telles que $u(x_i) = 0$.*

Preuve du théorème 6.2. — Soit u vérifiant (11) dans $B(0, 2R_0)$, avec $u(x) = 0$,

$$\frac{H^{d-1}(\{u = 0\} \cap B(x, \rho))}{\rho^{d-1}} \leq 2F(N),$$

et $N_u(B(0, R_0)) \leq N$. Notons $N' := N_u(B(0, R_0))$, et supposons que N' (et donc N) est grand. Par le lemme 6.4, on peut alors trouver $(N')^{(d-1)/2}g(N')$ boules disjointes $B(x_i, \frac{\rho}{\sqrt{N'}}) \subset B(x, 2\rho)$ telles que $u(x_i) = 0$. On applique la définition de F , pour trouver que, dans chacune de ces boules, l'ensemble nodal a un volume borné inférieurement par $(\frac{\rho}{\sqrt{N'}})^{d-1} F(N')$, et on a donc

$$2F(N) \geq \left(\frac{\rho}{\sqrt{N'}}\right)^{d-1} F(N)(N')^{(d-1)/2}g(N'),$$

ce qui est absurde pour N' assez grand.

Par conséquent, N' doit être borné par un $N_1 > 0$, et pour tout $N \geq N_1$, on a $F(N) \geq \frac{1}{2}F(N_1)$. Le résultat découle alors du lemme 6.3. \square

La preuve du lemme 6.4 est assez longue, et occupe la majeure partie de l'article LOGUNOV (2018b). Essayons néanmoins d'en donner les principales idées.

Idée de preuve du lemme 6.4. —

Étape 1 : Trouver un pavé à croissance rapide.

En utilisant les propriétés de monotonie de la fréquence, on peut trouver un $c \in]1, 2[$, $C' > 0$ tel que, si \mathcal{S}_2 est la sphère de centre x et de rayon cr , et si \mathcal{S}_1 est une sphère de centre x et de rayon $cr(1 - (C' \log N)^{-2})$, alors

$$\sup_{z \in \mathcal{S}_1} |u(z)| \leq C2^{-C''N(\log N)^{-2}} \sup_{z \in \mathcal{S}_2} |u(z)|.$$

On note alors y le point de \mathcal{S}_2 où $|u|$ atteint son maximum, et on considère un pavé \mathcal{R} dont la face supérieure \mathcal{F}_2 est un hypercube de côté $(\log N)^{-6}$, centré en y , et tangent à \mathcal{S}_1 , et dont la face inférieure \mathcal{F}_1 est tangente à \mathcal{S}_1 (voir la figure 6). Les points de \mathcal{F}_2 étant tous proches de y , on peut alors montrer que l'on a

$$(31) \quad \forall z_1 \in \mathcal{F}_1, z_2 \in \mathcal{F}_2, \quad |u(z_1)| \leq C2^{-C''N(\log N)^{-2}} |u(z_2)|.$$

Autrement dit, la fonction u croît rapidement entre les faces \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 .

Étape 2 : Trouver de bons tunnels.

On découpe ensuite les faces \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 en hypercubes de côté $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}(\log N)^6}\right)$, et on note T_i les différents pavés de \mathbb{R}^d basés sur ces faces (voir la figure 7). Ces pavés, beaucoup plus longs que larges, sont appelés par l'auteur des *tunnels*, et le nombre de tunnels est de l'ordre de \sqrt{N} .

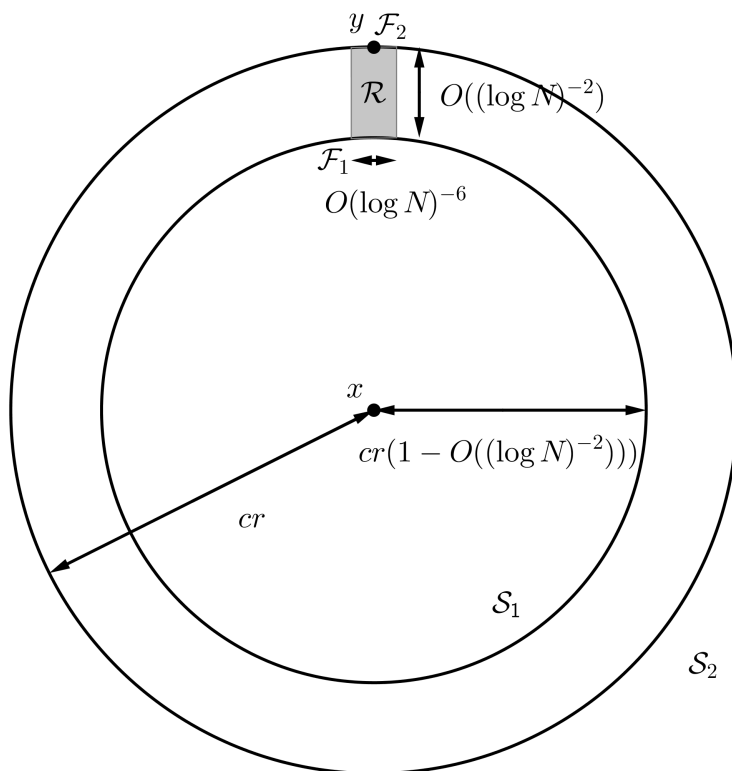


FIGURE 6. La construction de l'étape 1 de la preuve du lemme 6.4.

Chaque tunnel T_i est ensuite découpé en cubes $q_{i,j}$ de côté $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}(\log N)^6}\right)$ le long de sa hauteur de sorte que chaque tunnel comporte $\sqrt{N}(\log N)^4$ cubes.

On dira qu'un cube $q_{i,j}$ est bon si $\mathcal{N}_u(q_{i,j}) \leq \max\left(\frac{N}{2^c \log N / \log \log N}, N_0\right)$, et on dira qu'un tunnel T_{i_0} est bon si tous les $q_{i_0,j}$ sont bons.

En utilisant la proposition 5.9 pour $B = \lfloor \sqrt{N} \rfloor$, on peut montrer que le nombre de mauvais cubes $q_{i,j}$ est borné par $C\sqrt{N}^{d-1-c_2}(\log N)^4 \leq \frac{1}{2}(\sqrt{N})^{d-1}$. Par conséquent, il y a au moins $\frac{1}{2}(\sqrt{N})^{d-1}$ bons tunnels T_i . Il suffit donc de montrer que chaque bon tunnel contient au moins $g(N)$ points d'annulation de u , avec $g(N) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$.

Étape 3 : Compter les changements de signes dans un bon tunnel.

Soit T_i un bon tunnel. Pour chaque j , on considère la quantité

$$(32) \quad \tau_j := \frac{\sup_{\frac{1}{2}q_{i,j+1}} |u|}{\sup_{\frac{1}{2}q_{i,j}} |u|} \leq \frac{\sup_{4q_{i,j}} |u|}{\sup_{\frac{1}{2}q_{i,j}} |u|} \leq \frac{N}{2^{c'} \log N / \log \log N},$$

par la proposition 4.7 et le fait que $q_{i,j}$ est un bon cube.

On peut déduire de (31) que

$$(33) \quad \prod \tau_j \geq C2^{C''N(\log N)^{-2}}.$$

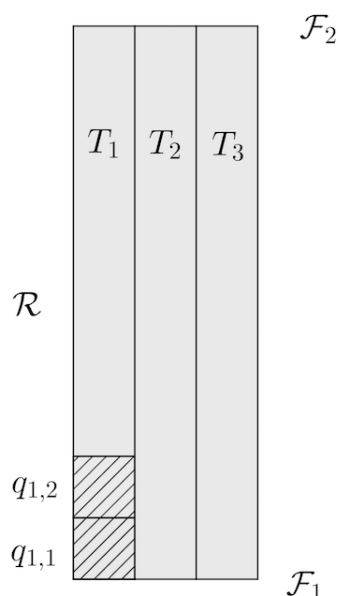


FIGURE 7. La construction de l'étape 2 de la preuve du lemme 6.4.

Mais, si u est de signe constant sur $q_{i,j} \cup q_{i,j+1}$, alors, par la remarque 4.8, on a $\tau_j \leq C_0$. On peut alors déduire de ce fait, et de (32) et (33) que le nombre d'indices j tels que u n'est pas de signe constant sur $q_{i,j} \cup q_{i,j+1}$ est d'au moins $2^{c'' \log N / \log \log N}$.

On en déduit donc le résultat, pour $g(N) = 2^{c'' \log N / \log \log N}$. \square

RÉFÉRENCES

- Shmuel AGMON (1966). « Unicité et convexité dans les problèmes différentiels ». In : *Séminaire de Mathématiques Supérieures*. T. 13. Montréal : Presses de l'Université de Montréal.
- Giovanni ALESSANDRINI et al. (2009). « The stability for the Cauchy problem for elliptic equations », *Inverse problems* **25** (12). article numéro 123004.
- Frederick J. ALMGREN JR. (1979). « Dirichlet's problem for multiple valued functions and the regularity of mass minimizing integral currents ». In : *Minimal submanifolds and geodesics (Proc. Japan-United States Sem., Tokyo, 1977)*. T. 1. 6.
- Nalini ANANTHARAMAN (2016). « Topologie des hypersurfaces nodales de fonctions aléatoires Gaussiennes », *Sem. Bourbaki* (1116).
- Jochen BRÜNING (1978). « Über knoten von eigenfunktionen des Laplace-Beltrami-operators », *Mathematische Zeitschrift* **158** (1), p. 15-21.
- Luis A. CAFFARELLI et Avner FRIEDMAN (1985). « Partial regularity of the zero-set of solutions of linear and superlinear elliptic equations », *Journal of differential equations* **60** (3), p. 420-433.

- Isaac CHAVEL (1984). *Eigenvalues in Riemannian geometry*. volume 115 of Pure et Applied Mathematics. Academic Press, Inc.
- Tobias COLDING et William P. MINICOZZI (2011). « Lower bounds for nodal sets of eigenfunctions », *Comm. Math. Phys.* **306** (3), p. 777-784.
- Richard COURANT et David HILBERT (1967). *Methods of Mathematical Physics, Vol.I*. Interscience Publishers Inc. N.Y.
- Rui-Tao DONG (1992). « Nodal sets of eigenfunctions on Riemann surfaces », *J. Diff. Geom.* **36** (2), p. 493-506.
- Harold DONNELLY et Charles FEFFERMAN (1988). « Nodal sets of eigenfunctions on Riemannian manifolds », *Inventiones mathematicae* **93** (1), p. 161-183.
- (1990). « Nodal sets of eigenfunctions of the Laplacian on surfaces », *J. Amer. Math. Soc.* **3**, p. 333-353.
- Semyon DYATLOV et Long JIN (2018). « Semiclassical measures on hyperbolic surfaces have full support », *Acta Mathematica* **220** (2), p. 297-339.
- Semyon DYATLOV, Long JIN et Stéphane NONNENMACHER (2019). « Control of eigenfunctions on surfaces of variable curvature », *arXiv preprint arXiv :1906.08923*.
- Georg FABER (1923). « Beweis dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt », *Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. München, Math.-Phys. Kl*, p. 169-172.
- Herbert FEDERER (1969). *Geometric measure theory*. Springer-Verlag.
- Nicola GAROFALO et Fang-Hua LIN (1986). « Monotonicity properties of variational integrals, A_p weights and unique continuation », *Indiana University Mathematics Journal* **35** (2), p. 245-268.
- Qin HAN et Fang-Hua LIN (2013). *Nodal Sets of Solutions of Elliptic Differential Equations*. Book available on Han's homepage.
- Robert HARDT et Leon SIMON (1989). « Nodal sets for solutions of elliptic equations », *J. Differential Geom.* **30**, p. 505-522.
- Hamid HEZARI (2018a). « Applications of small-scale quantum ergodicity in nodal sets », *Analysis & PDE* **11** (4), p. 855-871.
- (2018b). « Inner radius of nodal domains of quantum ergodic eigenfunctions », *Proceedings of the American Mathematical Society* **146** (11), p. 4661-4666.
- Hamid HEZARI et Gabriel RIVIÈRE (2016). « L^p norms, nodal sets, and quantum ergodicity », *Advances in Mathematics* **290**, p. 938-966.
- Hamid HEZARI et Christopher D. SOGGE (2012). « A natural lower bound for the size of nodal sets », *Anal. PDE* **5**, p. 1133-1137.
- Hamid HEZARI et Zuoqin WANG (2012). « Lower bounds for volumes of nodal sets : an improvement of a result of Sogge–Zelditch », *AMS Special Issue on Spectral Geometry*.
- David JERISON et Gilles LEBEAU (1999). « Nodal sets of sums of eigenfunctions », *Harmonic analysis and partial differential equations (Chicago, IL, 1996)*, *Chicago Lectures in Math*, p. 223-239.

- Edgar KRAHN (1925). « Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises », *Mathematische Annalen* **94** (1), p. 97-100.
- Fang-Hua LIN (1991). « Nodal sets of solutions of elliptic and parabolic equations », *Communications on Pure and Applied Mathematics* **44** (3), p. 287-308.
- Alexander LOGUNOV (2018a). « Nodal sets of Laplace eigenfunctions : polynomial upper estimates of the Hausdorff measure », *Annals of Mathematics* **187** (1), p. 221-239.
- (2018b). « Nodal sets of Laplace eigenfunctions : proof of Nadirashvili's conjecture and of the lower bound in Yau's conjecture », *Annals of Mathematics* **187** (1), p. 241-262.
- Alexander LOGUNOV et Eugenia MALINNIKOVA (2018). « Nodal sets of Laplace eigenfunctions : estimates of the Hausdorff measure in dimensions two and three », in : *50 years with Hardy spaces*. Springer, p. 333-344.
- (2019a). « Lecture notes on quantitative unique continuation for solutions of second order elliptic equations », *arXiv preprint arXiv :1903.10619*.
- (2019b). « Review of Yau's conjecture on zero sets of Laplace eigenfunctions », *arXiv preprint arXiv :1908.01639*.
- Dan MANGOUBI (2013). « The effect of curvature on convexity properties of harmonic functions and eigenfunctions », *Journal of the London Mathematical Society* **87** (3), p. 645-662.
- Nikolai S. NADIRASHVILI (1988). « On the length of the nodal curve of an eigenfunction of the Laplace operator », *Russian Mathematical Surveys* **43** (4), p. 227.
- (1997). « Geometry of nodal sets and multiplicity of eigenvalues », *Current Developments in Mathematics* **1997** (1), p. 231-235.
- Fedor NAZAROV, Leonid POLTEROVICH et Mikhail SODIN (2005). « Sign and area in nodal geometry of Laplace eigenfunctions », *American Journal of Mathematics* **127** (4), p. 879-910.
- Stéphane NONNENMACHER (2013). « Anatomy of quantum chaotic eigenstates », in : *Chaos*. Springer, p. 193-238.
- Andrzej PLIŚ (1963). « On non-uniqueness in Cauchy problem for an elliptic second order differential equation », *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys* **11**, p. 95-100.
- John William Strutt RAYLEIGH Baron (1877). *The Theory of Sound*. MacMillan et co. London, Vol. I, xlii+480 pp., vol. II, xii+504.
- Guillaume ROY-FORTIN (2015). « Nodal sets and growth exponents of Laplace eigenfunctions on surfaces », *Analysis & PDE* **8** (1), p. 223-255.
- Christopher D. SOGGE et Steven ZELDITCH (2011). « Lower bounds on the Hausdorff measure of nodal sets », *Math. Res. Lett.* **18**, p. 25-37.
- Stefan STEINERBERGER (2014). « Lower bounds on nodal sets of eigenfunctions via the heat flow », *Communications in Partial Differential Equations* **39** (12), p. 2240-2261.
- Charles STURM (1836). « Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre. » *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, p. 106-186.

- Shing-Tung YAU (1982). « Seminar on Differential Geometry, Problem section », *Ann. of Math. Stud.* **1021**, p. 669-706.
- Steven ZELDITCH (2010). « Recent developments in mathematical quantum chaos », *Current developments in mathematics* **2009**, p. 115-204.
- (2012). « Eigenfunctions and nodal sets », *arXiv preprint arXiv :1205.2812*.
- Maciej ZWORSKI (2012). *Semiclassical analysis*. volume 138 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI.

Maxime Ingremeau

Laboratoire J.A. Dieudonné

Université Côte d'Azur, Campus Valrose

E-mail : `maxime.ingremeau@univ-cotedazur.fr`