

## SÉMINAIRE NICOLAS BOURBAKI

29–30 MARS 2008

### RÉSUMÉS DES EXPOSÉS

Pierre CARTIER – *Groupoïdes de Lie et leurs algébroïdes*

Les groupoïdes de Lie ont été introduits par Ch. Ehresmann autour de 1950 et sont les groupoïdes dans la catégorie des variétés différentielles. Ils constituent donc une généralisation des groupes de Lie et, comme ceux-ci, ils ont une contrepartie infinitésimale : les «algébroïdes de Lie». Cette dernière notion a un pendant algébrique, connu sous le nom d'algèbres de Lie-Rinehart (introduites indépendamment par A. Grothendieck). À côté de nombreuses applications, portant surtout sur la géométrie des variétés symplectiques et de Poisson, les recherches se sont surtout orientées vers la démonstration d'un analogue du troisième théorème de Lie (remontant d'une algèbre de Lie à un groupe de Lie). Cette histoire est longue et mouvementée, avec des contributions de J. Pradines, A. Douady et M. Lazard, K. Brown,... et vient de se conclure par des résultats définitifs obtenus par les collaborateurs d'Alan Weinstein : Krainic, Fernandes, Ping Xu, Zhu... Pour cela, il a été nécessaire d'élargir le cadre conceptuel, en considérant les 2-groupoïdes, les champs,... fournissant une bonne démonstration de l'utilité de ces concepts dus à Grothendieck.

Hakan ELIASSON – *Résultats non-perturbatifs pour l'équation de Schrödinger et d'autres co-cycles quasi-périodiques [d'après Krikorian, Bourgain, Jitomirskaya, Avila, Puig,...]*

Des méthodes de type KAM ont été utilisées avec succès depuis une cinquantaine d'années pour étudier la dynamique des co-cycles quasi-périodiques à valeurs dans  $SL(2, R)$ . L'exemple le plus important d'un tel co-cycle est l'équation de Schrödinger quasi-périodique uni-dimensionnelle, pour laquelle il y a des connections importantes entre les propriétés dynamiques et spectrales. KAM est une théorie perturbative : elle est valable au voisinage d'un co-cycle à coefficients constants (ou de l'équation de Schrödinger libre), et la taille de ce voisinage dépend des propriétés arithmétiques des «quasi-périodes». Récemment deux approches basées, respectivement, sur la renormalisation et sur la localisation + dualité, ont été développées. Ces méthodes sont beaucoup plus globales mais restent (pour le moment) restreintes à des co-cycles avec une fréquence.

Carlo GASBARRI – *The strong ABC conjecture over function field [after McQuillan and Yamanoi]*

The *abc* conjecture predicts a highly non trivial upper bound for the height of an algebraic point in terms of its discriminant and its intersection with a fixed divisor of the projective line counted without multiplicity. We will report on the two independent proofs of the strong *abc* conjecture over function fields given by McQuillan and Yamanoi. The first proof relies on tools from differential and algebraic geometry; the second relies on analytic and topological methods. They correspond respectively to the Nevanlinna and the Ahlfors approach to the Nevanlinna Second Main Theorem.

Michel LEDOUX – *Géométrie des espaces métriques mesurés : les travaux de Lott, Villani, Sturm*

Grâce aux travaux parallèles et complémentaires de J. Lott et C. Villani et K.-T. Sturm, l'étude géométrique des espaces métriques mesurés s'est récemment dotée d'une définition synthétique de borne inférieure de courbure de Ricci à travers une propriété de convexité d'une fonctionnelle de type entropique le long de géodésiques dans l'espace des mesures de probabilités. Ces développements récents, issus de la théorie du transport optimal de mesures, ont pris place au carrefour de l'analyse, de la géométrie et du calcul des probabilités.

Mihai PĂUN – *Les Courants d'Ahlfors et parabolicité de leurs singularités [d'après J. Duval]*

Soit  $(\Delta_k)$  une suite divergente de disques holomorphes dans une variété complexe compacte  $X$ . Le lemme de Brody montre que cette suite produit (par reparamétrage) une courbe entière  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow X$ , mais en général on ne peut pas localiser l'image de  $\varphi$  : si l'origine des disques précédents est fixée en  $x_0 \in X$ , en général, l'image de  $\varphi$  ne contient pas  $x_0$ . Supposons maintenant que la longueur du bord de  $\Delta_k$  soit négligeable par rapport à son aire lorsque  $k \rightarrow \infty$  ; dans ce cas la suite  $(\Delta_k)$  induit un courant positif fermé  $T$ , classiquement appelé courant d'Ahlfors. Le but principal de notre exposé sera de montrer la version quantitative suivante du lemme de Brody, établie récemment par J. Duval : pour tout compact  $K \subset X$  chargé par  $T$ , il existe une courbe entière  $\varphi_K$  telle que l'aire de l'intersection de son image avec  $K$  soit positive. Ce résultat peut être également vu comme une généralisation des travaux de Nishino, Suzuki et autres ; il montre qu'on peut utiliser le courant  $T$  pour déterminer des sous-variétés paraboliques de  $X$ . Nous expliquerons également ses retombées sur les travaux de M. McQuillan concernant l'hyperbolicité des variétés algébriques.